Feuille de calcul n°12 — Équations différentielles linéaires

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 2y = -7$ avec la condition $y(0) = \dfrac{1}{3}$. On cherchera une solution particulière constante.

2. $y' + \dfrac{3}{2}y = \dfrac{3}{2}t$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

3. $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1$ avec la condition $y(0) = 5$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-3t} + B$ où A et B sont des réels.

4. $y' = 2y + 3$. On cherchera une solution particulière constante.

Solution.

1. Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2t}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus, une fonction constante $g : t \longmapsto a$ est solution de $y' - 2y = -7$ si et seulement si $0 - 2a = -7$ i.e. $a = \dfrac{7}{2}$. Ainsi, les solutions de $y' - 2y = -7$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{7}{2}$ où $C \in \mathbb{R}$. Or,

$$C\,\mathrm{e}^{2\times 0} + \frac{7}{2} = \frac{1}{3} \iff A = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{19}{6}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la solution de } y' - 2y = -7 \text{ vérifiant } y(0) = \dfrac{1}{3} \text{ est } t \longmapsto -\dfrac{19}{6}\,\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{7}{2}}$.

2. Les solutions de l'équation $y' + \dfrac{3}{2}y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus, une fonction affine $g : t \longmapsto at + b$ est solution de $y' + \dfrac{3}{2}y = +\dfrac{3}{2}t$ si et seulement si $a + \dfrac{3}{2}(at + b) = \dfrac{3}{2}t$ i.e. $\dfrac{3}{2}at + a + \dfrac{3}{2}b = \dfrac{3}{2}t$. Pour cela, il suffit que $a = 1$ et $b = -\dfrac{2}{3}$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } y' + \dfrac{3}{2}y = \dfrac{3}{2}t \text{ est } \left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t} + t - \dfrac{2}{3} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$.

3. Les solutions de l'équation $y' - 3y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{3t}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus, une fonction $g : t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-3t} + B$ est solution de $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1$ si et seulement si $-3A\,\mathrm{e}^{-3t} - 3(A\,\mathrm{e}^{-3t} + B) = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1$ i.e. $-6A\,\mathrm{e}^{-3t} - 3B = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1$. Pour cela, il suffit que $A = -\dfrac{1}{3}$ et $B = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi, les solutions de $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{3t} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{1}{3}$ où $C \in \mathbb{R}$. Or,

$$C\,\mathrm{e}^{3\times 0} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3\times 0} - \frac{1}{3} = 5 \iff C = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la solution de } y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1 \text{ vérifiant } y(0) = 5 \text{ est } t \longmapsto \dfrac{17}{3}\,\mathrm{e}^{3t} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{1}{3}}$.

4. L'équation est équivalente à $y' - 2y = 3$. Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2t}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus, une fonction constante $g : t \longmapsto a$ est solution de $y' - 2y = 3$ si et seulement si $0 - 2a = 3$ i.e. $a = -\dfrac{3}{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } y' = 2y + 3 \text{ est } \left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{3}{2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 3y = -4t + 1$ avec la condition $y(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. $y' = -2y$ avec la condition $y(1) = 3$.
3. $y' - \frac{1}{2}y = 2t + \frac{1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
4. $y' + y = 2\,\mathrm{e}^{t}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{t}$ où $A \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. Les solutions de l'équation $y' + 3y = 0$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-3t}$ où $C \in \mathbb{R}$. Considérons une fonction affine $g : t \longmapsto at + b$. Alors, pour tout réel t, $g'(t) + 3g(t) = a + 3(at + b) = 3at + a + 3b$ donc, pour que g soit solution de $y' + 3y = -4t + 1$, il suffit que $3a = -4$ et $a + 3b = 1$ i.e. $a = -\frac{4}{3}$ et $b = \frac{7}{9}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } y' + 3y = -4t + 1 \text{ est } \left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{4}{3}t + \frac{7}{9} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$.
2. $y' = -2y$ équivaut à $y' + 2y = 0$ donc les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. De plus,
   $$C\,\mathrm{e}^{-2\times 1} = 3 \Longleftrightarrow C = 3\,\mathrm{e}^{2}$$
   donc la solution de g de $y' = -2y$ telle que $g(1) = 3$ est $g : t \longmapsto 3\,\mathrm{e}^{2}\mathrm{e}^{-2t}$ i.e. $\boxed{g : t \longmapsto 3\,\mathrm{e}^{2-2t}}$.
3. Les solutions de l'équation $y' - \frac{1}{2}y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus, une fonction affine $g : t \longmapsto at + b$ est solution de $y' - \frac{1}{2}y = 2t + \frac{1}{2}t$ si et seulement si $a - \frac{1}{2}(at + b) = 2t + \frac{1}{2}$ i.e. $-\frac{1}{2}at + a - \frac{1}{2}b = 2t + \frac{3}{2}$. Pour cela, il suffit que $-\frac{1}{2}a = 2$ et $a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}$ i.e. $a = -4$ et $b = -9$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } y' - \frac{1}{2}y = 2t + \frac{1}{2} \text{ est } \left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - 4t - 9 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}}$.
4. Les solutions de l'équation $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{t}$. Alors, pour tout réel t, $g'(t) + g(t) = A\,\mathrm{e}^{t} + A\,\mathrm{e}^{t} = 2A\,\mathrm{e}^{t}$ donc, pour que g soit solution de $y' + y = 2\,\mathrm{e}^{t}$, il suffit que $2A = 2$ i.e. $A = 1$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } y' + y = 2\,\mathrm{e}^{t} \text{ est } \{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t} \mid c \in \mathbb{R} \}}$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 4y' - 5y = 0$
2. $y'' - 4y' + 3y = -\frac{1}{5}$. On cherchera une solution particulière constante.
3. $y'' - 2y' + y = -2$. On cherchera une solution particulière constante.
4. $y'' - 3y' = \frac{1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

Solution.

1. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 4x - 5 = 0$. Le discriminant de $x^2 - 4x - 5$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$ dont l'équation caractéristique possède deux solutions réelles :
   $$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{36}}{2 \times 1} = 5$$
   Par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' - 4y' - 5y = 0$ est $\boxed{\{ t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{5t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}}$.

2. L'équation homogène associée est $y'' - 4y' + 3y = 0$ et son équation caractéristique est $x^2 - 4x + 3 = 0$. Le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ donc l'équation caractéristique possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$$

Par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' - 4y' + 3y = 0$ est $\{t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{t} + B\,\mathrm{e}^{3t} |\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
Considérons une fonction constante $g : t \longmapsto a$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) - 4g'(t) + 3g(t) = 0 - 4 \times 0 + 3a = 3a$ donc, pour que g soit solution de $y'' - 4y' + 3y = -\frac{1}{5}$, il suffit que $3a = -\frac{1}{5}$ i.e. $a = -\frac{1}{15}$. Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $y'' - 4y' + 3y = -\frac{1}{5}$ est $\boxed{\left\{t \longmapsto -\frac{1}{15} + A\,\mathrm{e}^{t} + B\,\mathrm{e}^{3t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

3. L'équation homogène associée est $y'' - 2y' + y = 0$ et son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$. Or, $x^2 - 2x + 1 = 0$ si et seulement si $(x-1)^2 = 0$ ce qui équivaut à $x - 1 = 0$ i.e. $x = 1$. Ainsi, l'équation caractéristique possède une unique solution réelle donc, par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ est $\{t \longmapsto (At + B)\,\mathrm{e}^{t} |\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
Considérons une fonction constante $g : t \longmapsto a$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) - 2g'(t) + g(t) = 0 - 2 \times 0 + a = a$ donc, pour que g soit solution de $y'' - 2y' + y = -2$, il suffit que $a = -2$. Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + y = -2$ est $\boxed{\{t \longmapsto -2 + (At + B)\,\mathrm{e}^{t} |\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}$.

4. L'équation homogène associée est $y'' - 3y' = 0$ et son équation caractéristique est $x^2 - 3x = 0$. Or, $x^2 - 3x = 0$ si et seulement si $x(x - 3) = 0$ ce qui équivaut à $x = 0$ ou $x = 3$. Ainsi, l'équation caractéristique possède deux solution réelles donc, par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' - 3y' = 0$ est $\{t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{0t} + B\,\mathrm{e}^{3t} |\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ i.e. $\{t \longmapsto A + B\,\mathrm{e}^{3t} |\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
Considérons une fonction affine $g : t \longmapsto at + b$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) - 3g'(t) = 0 - 3a = -3a$ donc, pour que g soit solution de $y'' - 3y' = \frac{1}{2}$, il suffit que $a = -\frac{1}{6}$ (et il n'y a pas de condition sur b donc toute valeur de b convient, par exemple $b = 0$). Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de $y'' - 3y' = \frac{1}{2}$ est $\boxed{\left\{t \longmapsto -\frac{1}{6}t + A + B\,\mathrm{e}^{3t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 4y' - 5y = 10$ avec les conditions $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$. On cherchera une solution particulière constante.
2. $y'' - 2y' + y = t$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
3. $y'' + y' + y = 1$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$. On cherchera une solution particulière constante.
4. ~~$y'' - 3y' = \frac{1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.~~
(Identique au **4.** de l'**Exercice 3.**)

Solution.

1. L'équation homogène associée est $y'' + 4y' - 5y = 0$ et son équation caractéristique est $x^2 + 4x - 5 = 0$. Le discriminant de $x^2 + 4x - 5$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$ donc l'équation caractéristique possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = 1$$

Par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' + 4y' - 5y = 0$ est $\{t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-5t} + B\,\mathrm{e}^{t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Considérons une fonction constante $g : t \longmapsto a$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) + 4g'(t) - 5g(t) = 0 + 4 \times 0 - 5a = -5a$ donc, pour que g soit solution de $y'' + 4y' - 5y = 10$, il suffit que $-5a = 10$ i.e. $a = -2$. Ainsi, les solutions de $y'' + 4y' - 5y = 10$ sont les fonctions de la forme $g : t \longmapsto -2 + A\,\mathrm{e}^{-5t} + B\,\mathrm{e}^{t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Or,

$$\begin{cases} g(0) = 4 \\ g'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 + A + B = 4 \\ -5A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + 5A = 6 \\ B = 5A \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 5 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution g de $y'' + 4y' - 5y = 10$ telle que $g(0) = 4$ et $g'(0) = 0$ est $\boxed{g : t \longmapsto -2 + \mathrm{e}^{-5t} + 5\,\mathrm{e}^{t}}$.

2. L'équation homogène associée est $y'' - 2y' + y = 0$ et son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$. Or, $x^2 - 2x + 1 = 0$ équivaut à $(x-1)^2 = 0$ i.e. $x - 1 = 0$ soit $x = 1$. Ainsi, 'équation caractéristique possède une unique solution réelle donc, par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ est $\{t \longmapsto (At + B)\,\mathrm{e}^{t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Considérons une fonction affine $g : t \longmapsto at + b$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) - 2g'(t) + g(t) = 0 - 2 \times a + (at + b) = at - 2a + b$ donc, pour que g soit solution de $y'' - 2y' + y = t$, il suffit que $a = 1$ et $-2a + b = 0$ i.e. $a = 1$ et $b = 2$. Ainsi, les solutions de $y'' - 2y' + y = t$ sont les fonctions de la forme $g : t \longmapsto t + 2 + (At + B)\,\mathrm{e}^{t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Or, pour une telle fonction g, pour tout réel t, $g'(t) = 1 + A\,\mathrm{e}^{t} + (At + B)\,\mathrm{e}^{t} = 1 + (At + A + B)\,\mathrm{e}^{t}$ donc

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + B = 0 \\ 1 + A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -2 \\ A = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution g de $y'' - 2y' + y = t$ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$ est $\boxed{g : t \longmapsto t + 2 + (t-2)\,\mathrm{e}^{t}}$.

3. L'équation homogène associée est $y'' + y' + y = 0$ et son équation caractéristique est $x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2 \times 1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \overline{x_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y' + y = 0$ est $\left\{ t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Considérons une fonction constante $g : t \longmapsto a$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) + g'(t) + g(t) = 0 + 0 + a = a$ donc, pour que g soit solution de $y'' + y' + y = 1$, il suffit que $a = 1$. Ainsi, les solutions de $y'' + y' + y = 1$ sont les fonctions de la forme $g : t \longmapsto 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Or, pour une telle fonction g, pour tout réel t,

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(-A\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

donc

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + A = 0 \\ -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution g de $y'' + y' + y = 1$ telle que $g(0) = 40$ et $g'(0) = 0$ est $\boxed{g : t \longmapsto 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} v = B$ avec la condition initiale $v(0) = v_0$. Ici, τ et B sont des constantes strictement positives et on cherchera une solution particulière constante.

2. $\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A]$ avec la condition initiale $[A](0) = [A]_0$. Ici, k est une constante.

3. $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec les conditions $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$. Ici, ω_0 est un constante strictement positive.

4. $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \cos(\Omega t)$ avec les conditions $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$. Ici, ω_0 et Ω sont des constantes strictement positives telles que $\omega_0 \neq \Omega$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\cos(\Omega t)$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. Les solutions de $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} = 0$ sont les fonctions de la forme $v : t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Considérons une fonction constante $v : t \longmapsto a$. Alors, pour tout réel t, $v'(t) + \dfrac{1}{\tau} v(t) = 0 + \dfrac{1}{\tau} a = \dfrac{a}{\tau}$ donc, pour que v vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} = B$, il suffit que $\dfrac{a}{\tau} = B$ i.e. $a = B\tau$.
Ainsi, les solutions de $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} = B$ sont les fonctions de la forme $B\tau + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
De plus,

$$C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}\times 0} + B\tau = v_0 \iff C = v_0 - B\tau$$

donc la seule fonction v telle que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} = 0$ et $v(0) = v_0$ est $\boxed{v : t \longmapsto B\tau + (v_0 - B\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$.

2. Comme $\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A]$ équivaut à $\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} + k[A] = 0$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $[A] : t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-kt}$ avec $C \in \mathbb{R}$. De plus,

$$C\,\mathrm{e}^{-k\times 0} = [A]_0 \iff C = [A]_0$$

donc la seule fonction $[A]$ telle que $\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A]$ et $[A](0) = [A]_0$ est $\boxed{[A] : t \longmapsto [A]_0\,\mathrm{e}^{-kt}}$.

3. L'équation caractéristique de l'équation est $r^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \mathrm{i}\,\omega_0$ et $r = -\mathrm{i}\,\omega_0$ donc, par théorème, les solutions de $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$ sont les fonctions de la forme $x : t \longmapsto \mathrm{e}^{0t}(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))$ i.e. $x : t \longmapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Pour une telle fonction x, pour tout réel t,

$$x'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

donc

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A\omega_0 = 0 \\ B\omega_0 = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$ telle que $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$ est la fonction $\boxed{x : t \longmapsto \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

4. L'équation homogène associée est l'équation de la question précédente. Considérons une constante $A \in \mathbb{R}$ et $x_0 : t \longmapsto A\cos(\Omega t)$. Alors, pour tout réel t, $x_0'(t) = -A\Omega\sin(\Omega t)$ et $x_0''(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t)$ donc

$$x_0''(t) + \omega^2 x_0(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t) + \omega_0^2 A\cos(\Omega t) = A(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t).$$

Ainsi, pour que x_0 soit une solution de l'équation, il suffit que $A(\omega_0^2 - \Omega^2) = 1$ i.e. $A = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}$. Dès lors, les solutions de $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \cos(\Omega t)$ sont les fonctions de la forme $x : t \longmapsto \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t) + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour une telle fonction, pour tout réel t, $x'(t) = -\dfrac{\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin(\Omega t) - A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ donc

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} + A = 0 \\ B\omega_0 = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \\ B = \dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \cos(\Omega t)$ telle que $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$ est la fonction $x : t \longmapsto \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t) - \dfrac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ i.e.

$$\boxed{x : t \longmapsto \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)\right) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$