Feuille de calcul n°12 — Équations différentielles linéaires

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 2y = -7$ avec la condition $y(0) = \frac{1}{3}$. On cherchera une solution particulière constante.

2. $y' + \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}t$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

3. $y' - 3y = 2\,\mathrm{e}^{-3t} + 1$ avec la condition $y(0) = 5$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-3t} + B$ où A et B sont des réels.

4. $y' = 2y + 3$. On cherchera une solution particulière constante.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 3y = -4t + 1$ avec la condition $y(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

2. $y' = -2y$ avec la condition $y(1) = 3$.

3. $y' - \frac{1}{2}y = 2t + \frac{1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

4. $y' + y = 2\,\mathrm{e}^{t}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{t}$ où $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 4y' - 5y = 0$

2. $y'' - 4y' + 3y = -\frac{1}{5}$. On cherchera une solution particulière constante.

3. $y'' - 2y' + y = -2$. On cherchera une solution particulière constante.

4. $y'' - 3y' = \frac{1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 4y' - 5y = 10$ avec les conditions $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$. On cherchera une solution particulière constante.

2. $y'' - 2y' + y = t$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

3. $y'' + y' + y = 1$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$. On cherchera une solution particulière constante.

4. $y'' - 3y' = \frac{1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = B$ avec la condition initiale $v(0) = v_0$. Ici, τ et B sont des constantes strictement positives et on cherchera une solution particulière constante.

2. $\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k[A]$ avec la condition initiale $[A](0) = [A]_0$. Ici, k est une constante.

3. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec les conditions $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$. Ici, ω_0 est un constante strictement positive.

4. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \cos(\Omega t)$ avec les conditions $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$. Ici, ω_0 et Ω sont des constantes strictement positives telles que $\omega_0 \neq \Omega$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\cos(\Omega t)$ avec $A \in \mathbb{R}$.