Feuille de calcul n°11 — Séries

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes en cas de convergence.

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \qquad \sum_{n\geqslant 10} \frac{1}{3^n}$$

Solution.

Comme $2 \geqslant 1$, la série géométrique $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} 2^n \text{ diverge}}$.

Comme $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$, la série géométrique $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2}^n = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ converge}}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ i.e. } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2}.$$

Comme $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, la série géométrique $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ converge}}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}^2-1^2} \text{ i.e. } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2+\sqrt{2}}.$$

Comme $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$, la série géométrique $\boxed{\sum_{n\geqslant 10} \frac{1}{3}^n = \sum_{n\geqslant 10} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ converge}}$ et

$$\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \underset{k=n-10}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{k+10}} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3^{10}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \text{ i.e. } \boxed{\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2\times 3^9}}.$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes en cas de convergence.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{2^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n \times n!}$$

Solution.

La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ converge est $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}^1 = e}$.

La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$ converge est $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}^2}$.

La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n \times n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$ converge est $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n \times n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}}$.

Exercice 3. Déterminer la nature des séries suivantes. On ne demande pas de calculer leurs sommes.

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^3+1}$$

Solution.

Par théorème, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} \text{ converge}}$.

Par théorème, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n} \text{ diverge}}$.

Comme $\frac{n}{n+1}\sim\frac{n}{n}\sim 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1 \neq 0$ donc la série $\boxed{\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \text{ diverge grossièrement}}$.

Comme $\frac{n}{n^3+1}\sim\frac{n}{n^3}\sim\frac{1}{n^2}$ et, comme $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, par équivalence, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n^3+1} \text{ converge}}$.

Exercice 4. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes.

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

Solution.

Soit $N\in\mathbb{N}$. En reconnaissant une somme téléscopique, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$

donc $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1}$.

Pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)=\ln\left(\frac{n\times n}{(n+1)(n-1)}\right)=\ln\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n}{n-1}\right)=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

donc, comme précédemment, pour tout entier $N\geqslant 2$,

$$\sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)=\sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=\ln\left(\frac{N}{N+1}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Or, $\frac{N}{N+1}\sim\frac{N}{N}\sim 1$ donc $\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{N+1}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=0$ donc, par composition, $\lim_{N\to+\infty}\ln\left(\frac{N}{N+1}\right)=0$. Ainsi,

$$\sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$$

donc la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)=\ln(2)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$ donc, comme précédemment, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}}$.

Exercice 5. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes en cas de convergence.

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^{2n}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{1-n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} n2^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{n-1}}$$

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{4^n}$ donc, comme $0 \leqslant \dfrac{1}{4} < 1$, la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n}}}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{1-n} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{-k} = \sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{e}\right)^k$ et comme $0 \leqslant \dfrac{1}{e} < 1$, la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} e^{1-n}}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{1-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \text{ i.e. } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{1-n} = \frac{e}{e-1}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n2^n \to +\infty$, la série $\boxed{\sum n2^n \text{ diverge grossièrement}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{n-1}} = \lim_{n\geqslant 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{n-1}}$ une série géométrique dérivée qui converge car $0 \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$ et

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4}$$

Exercice 6. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes en cas de convergence.

$$\sum_{n\geqslant 1} n3^{-n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{3n+1}{3^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} \qquad \sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathrm{e}^{-n}$$

Solution.

Comme $\sum_{n\geqslant 0} n3^{-n} = \frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, on reconnaît une série géométrique dérivée convergente car $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n3^{-n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} \text{ i.e. } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n3^{-n} = \frac{3}{4}}$$

Pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{3n+1}{3^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{3n}{3^n} + \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée et d'une série géométrique, toutes les deux de raison $\frac{1}{3} \in [0\,;1[$ donc toutes deux convergentes. Ainsi, par somme, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n+1}{3^n}$ converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{3^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - \left(\frac{1}{3}\right)^{0}\\ &= \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1\end{aligned}$$

soit $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{3^n} = \frac{11}{4}}$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est une série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{2} \in [0\,;1[$ donc elle converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 16}.$$

En remarquant que $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{e^2}\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n-2}$, on fait apparaître une série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{e} \in [0\,;1[$ donc la série converge et

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{e^2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{e})^3} = \frac{2e}{(e-1)^3}}.$$