♦ Corrigés des exercices du chapitre 8

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Déterminer la loi de X puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$.

Solution. Par propriété, pour tout $n \geqslant 1$,

$$P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1) = \frac{2^n - 1}{2^n} - \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1 - 2(2^{n-1} - 1)}{2^n}$$
$$= \frac{2^n - 1 - 2^n + 2}{2^n}$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{1}{2^k}}$. Dès lors,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \underset{0 \leqslant \frac{1}{2} < 1}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1}$.

Exercice 2. Une urne contient initialement une boule noire. On y effectue des tirages successifs d'un boule. Si on tire la boule noire, on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule blanche. On s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages que l'on effectue dans l'urne ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k : « on tire une boule noire au k-ème tirage ».

Par exemple, si on tire une boule noire, puis une boule noire, puis une boule blanche, on s'arrête après le troisième tirage, donc $X = 3$.

1. Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$.

a. Exprimer l'événement $\{X = n\}$ en fonction des événements N_1, N_2, ..., N_n et de leurs contraires.

b. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Si on a obtenu des boules noires lors des $k - 1$ premiers tirages, combien l'urne contient-elle de boules blanches au moment du k-ème tirage ?

c. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{n-1}{n!}$.

3. Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$.

4. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

5. **a.** Montrer que $X(X - 2)$ admet une espérance la calculer

b. En déduire que X^2 admet une espace et la calculer.

c. Conclure que X admet une variance et la calculer.

Solution.

1. L'ensemble des valeurs prises par X est $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.

2. a. Par définition, $\boxed{\{X = n\} = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap \overline{N_n}}$.

b. Si on a obtenu la boule noire au cours des $k-1$ premiers tirages, on a ajouté $k-1$ boules blanches donc $\boxed{\text{il y a } k-1 \text{ boules blanches au moment du } k\text{-ème tirage}}$.

c. Soit un entier $n \geqslant 2$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n) &= \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}(N_2 \mid N_1)\mathbf{P}(N_3 \mid N_1 \cap N_2) \cdots \mathbf{P}(\overline{N_n} \mid N_1 \cap N_2 \cap \cdots N_{n-1}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{n-1}{n!}}$.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) \\ &\underset{j=k-1}{=} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} e - e + 1 = e\end{aligned}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{n} k \times \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \underset{j=k-2}{=} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$$

donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(X) = e}$.

5. a. D'après le théorème de transfert, $X(X-2)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-2)P(X = n)$ converge. Or, pour tout entier $n \geqslant 3$, sachant que $2(2-2) = 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-2)P(X = k) &= \sum_{k=3}^{n} k(k-2)\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} \\ &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} \underset{j=k-3}{=} \sum_{j=0}^{n-3} \frac{1}{j!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e\end{aligned}$$

donc $X(X-2)$ admet une espérance et $\mathbf{E}(X(X-2)) = e$.

b. En remarquant que $X^2 = X(X-2) + 2X$ donc on en déduit que X^2 admet une espérance et, par linéarité, $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}((X(X-2)) + \mathbf{E}(2X) = e + 2\mathbf{E}(X) = e + 2e$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = 3e}$.

c. Comme X et X^2 admette des espérances, par la formule de König-Huygens, X admet une variance $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 3e - e^2$ i.e. $\boxed{\mathbf{V}(X) = e(3-e)}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X le premier numéro obtenu, Y le second, et $Z = \max(X, Y)$ le plus grand des deux.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer $F_X(k)$ et $F_Y(k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3. Quel est l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs que peut prendre Z ?
4. **a.** Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?

   b. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $F_Z(k) = F_X(k)F_Y(k)$.

   c. Déterminer la loi de Z.

Solution.

1. Par définition, comme il y a remise, X et Y suivent tous les deux des lois $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$F_X(k) = \mathbf{P}(X \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$
Comme X et Y suivent la même loi, elles ont également la même fonction de répartition donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ F_X(k) = F_Y(k) = \frac{k}{n}}$.
3. X et Y prennent des valeurs entre 1 et n donc $\boxed{Z(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.
4. **a.** Comme il s'agit de tirage avec remise, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

   b. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Remarquons que $\{Z \leqslant k\} = \{X \leqslant k\} \cap \{Y \leqslant k\}$ (le maximum de X et Y est inférieur ou égal à k si et seulement si X et Y sont inférieures ou égales à k). Ainsi, par indépendance,
$$F_Z(k) = \mathbf{P}(Z \leqslant k) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k\} \cap \{Y \leqslant k\}) = \mathbf{P}(X \leqslant k)\mathbf{P}(Y \leqslant k)$$
   i.e. $\boxed{F_Z(k) = F_X(k)F_Y(k)}$.

   c. Comme $F_X = F_Y$, on en déduit que $F_Z = F_X^2$ donc, par propriété, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\mathbf{P}(Z = k) = F_Z(k) - F_Z(k-1) = F_X^2(k) - F_X^2(k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{k^2 - (k^2 - 2k + 1)}{n^2}$$
   i.e. $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}}$.

Exercice 4. Le trousseau d'un gardien de phare compte n clés ($n \geqslant 1$) dont une seule ouvre son phare. Il essaye les clés une par une. On note X le nombre d'essais qu'il lui faut pour ouvrir le phare.

1. Après avoir testé une clé, il l'enlève de son trousseau.

   a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X ?

   b. Déterminer $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$ puis $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

   c. Combien d'essais lui faut-il en moyenne pour ouvrir le phare ?

2. On suppose maintenant que notre gardien est étourdi et qu'il oublie d'enlever les clés qu'il a déjà essayées. Combien d'essais lui faut-il en moyenne pour ouvrir le phare ?

Solution.

1. a. L'ensemble des valeurs prises par X est $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

b. Au premier essai, il y a n clés, toutes équiprobables donc $\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{n}}$.

Remarquons que $\{X = 2\} \subset \{X > 1\}$ donc $\{X = 2\} = \{X = 2\} \cap \{X > 1\}$. Par suite, $\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X > 1)\mathbf{P}(X = 2 \mid X > 1)$. Or, si $X > 1$, la clé n'a pas été trouvée au premier essai et, par conséquent, il reste $n - 1$ clés, toutes équiprobables, donc $P(X = 2 \mid X > 1) = \frac{1}{n-1}$. On en déduit que $\mathbf{P}(X = 2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1}$ donc $\mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{n}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Supposons que $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \cdots = \mathbf{P}(X = k - 1) = \frac{1}{n}$. Alors, comme précédemment, $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X > k - 1)\mathbf{P}(X = k \mid X > k - 1)$. Or, $\mathbf{P}(X > k-1) = 1-\mathbf{P}(X \leqslant k-1) = 1-(k-1)\times\frac{1}{n} = \frac{n-k+1}{n}$ et, si $X > k-1$, il reste, au k-ème essai, $n-(k-1)$ clés donc $P(X = k \mid X > k-1) = \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n-k+1}$.

Il s'ensuit que $P(X = k) = \frac{n-k+1}{n} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$.

Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. On en déduit que $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])}$.

c. En particulier, on déduit de la question précédente que $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et, par conséquent, $\boxed{\text{il faudra en moyenne } \frac{n+1}{2} \text{ essais au gardien pour trouver la bonne clé}}$.

2. Si le gardien ne retire pas la clé qu'il a essayé alors ses essais successifs constitue un schéma de Bernoulli avec comme succès « Trouver la bonne clé ». La variable X est alors égale au premier succès donc X suit une loi $\mathscr{G}(\frac{1}{n})$. Dès lors, $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ donc $\boxed{\text{il faudra en moyenne } n \text{ essais au gardien pour trouver la bonne clé}}$.

Exercice 5. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si la variable X suit l'une des lois usuelles du cours et, si oui, préciser laquelle.

1. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On y effectue 10 tirages successifs avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 5 des boules numérotées de 1 à 5, et on note X le résultat obtenu.

3. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note X la somme des deux numéros obtenus.

4. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On y effectue des tirages avec remise et note X le numéro du tirage auquel on obtient la première boule blanche.

5. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le nombre de 3 obtenus.

6. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le numéro obtenu au troisième lancer.

Solution.

1. La situation est un schéma de Bernoulli (car il y a remise) en prenant comme succès S : « Tirer une boule blanche ». Ainsi, X, qui compte le nombre de succès, suit une loi $\mathscr{B}(10, \frac{3}{7})$.
2. Par définition, X suit une loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, 5 \rrbracket)$.
3. X ne suit pas une loi usuelle.
4. Par propriété, X suit une loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{3}{7})$.
5. La situation est un schéma de Bernoulli en prenant comme succès S : « Obtenir 3 ». Ainsi, X, qui compte le nombre de succès, suit une loi $\mathscr{B}(10, \frac{1}{6})$.
6. Par définition, X suit une loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.

Exercice 6. Une puce se déplace vers la droite le long d'un axe gradué. Elle se trouve initialement à l'abscisse 0. À chaque seconde, elle effectue soit un petit saut d'une unité vers la droite avec probabilité $\frac{1}{3}$ soit un grand saut de deux unités avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n l'abscisse à laquelle se trouve la puce après n sauts et G_n le nombre de grands sauts qu'elle a fait.

1. Déterminer la loi de G_n, son espérance et sa variance.
2. Exprimer X_n en fonction de G_n.
3. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

Solution.

1. La succession de n sauts constitue un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « La puce fait un grand saut ». Ainsi, G_n, qui compte le nombre de succès, suit une loi $\mathscr{B}(n, \frac{2}{3})$.
2. Par définition, G_n est le nombre de grands sauts donc $n - G_n$ est le nombre de petits et donc $X_n = 2G_n + (n - G_n)$ i.e. $\boxed{X_n = n + G_n}$.
3. Par propriété, $\mathbf{E}(G_n) = \frac{2n}{3}$ et $\mathbf{V}(G_n) = \frac{2n}{9}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(G_n) + n = \frac{2n}{3} + n$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \frac{5n}{3}}$. Par propriété de la variance, on a également $\boxed{\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{V}(G_n) = \frac{2n}{9}}$.

Exercice 7. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant respectivement une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ et une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Solution. On a $\{X = Y\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{X = k\} \cap \{Y = k\}$ donc, comme cette union est disjointe et les variables indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \frac{p\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} = \frac{p\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-p}\left[\mathrm{e}^{(1-p)\lambda} - 1\right]\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X = Y) = \dfrac{p}{1-p}\left[\mathrm{e}^{-p\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}\right]}$.

Exercice 8. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer $\mathbf{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$\mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+n} = p(1-p)^n \frac{1}{p}$$
donc $\boxed{\mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\{Z > n\} = \{X > n\} \cap \{Y > n\}$ (le minimum de X et Y est strictement supérieur à n si et seulement si X et Y sont toutes les deux strictement supérieures à n) donc, comme X et Y sont indépendantes et de même loi, il s'ensuit que
$$\mathbf{P}(Z > n) = \mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(Y > n) = (1-p)^{2n}.$$
Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_Z(n) = \mathbf{P}(Z \leqslant n) = 1 - \mathbf{P}(Z > n) = 1 - (1-p)^{2n}$. On en déduit, par propriété, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) = F_Z(n) - F_Z(n-1) &= 1 - (1-p)^{2n} - \left[1 - (1-p)^{2n-2}\right] \\ &= -(1-p)^{2n} + (1-p)^{2n-2} = (1-p)^{2n-2}[1 - (1-p)^2]\end{aligned}$$
donc
$$\mathbf{P}(Z = n) = (1-p)^{2n-2}(-p^2 + 2p) = p(2-p)[(1-p)^2]^{n-1} = p(2-p)[1 - p(2-p)]^{n-1}.$$
On conclut que $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p(2-p))}$.

Exercice 9. On considère un péage composé de m guichets numérotés de 1 à m où m est un entier naturel non nul. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au péage en une heure. On suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les conducteurs se présentant au péage choisissent aléatoirement un guichet de manière équiprobable et indépendamment les uns des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de conducteurs se présentant au guichet n°1 en une heure.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(X = k \mid N = n)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\dfrac{\lambda}{m}\right)^k \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \lambda^n \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^n$.
3. Reconnaître la loi suivie par X.

Solution.

1. Supposons l'évènement $\{N = n\}$ réalisé. Alors, en une heure, il y a n voitures qui se présentent au péage. Notons S_n le nombre de conducteurs qui choisissent le guichet n°1. La situation est un schéma de Bernoulli (car les conducteurs ont des comportements indépendants les un des autres) en prenant comme succès « le conducteur choisit le guichet n°1 ». Ainsi, la variable aléatoire S_n qui compte le nombre de succès suit une loi $\mathscr{B}(n, \frac{1}{m})$. Il s'ensuit que
$$\mathbf{P}(X = k \mid N = n) = \mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{m^k} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'évènements donc, par la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{X=k\}\cap\{N=n\})$. Or, pour $n \in [\![0, k-1]\!]$, $\{X=k\}\cap\{N=n\} = \varnothing$ donc

$$\mathbf{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(\{X=k\}\cap\{N=n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(X=k \mid N=n).$$

Ainsi, grâce à la question 1.,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\binom{n}{k}\frac{1}{m^k}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{1}{k!m^k}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{1}{k!m^k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+k}}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n}$.

3. Étant donné que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)^n = \mathrm{e}^{\lambda-\frac{\lambda}{m}},$$

on déduit de la question **2.** que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{\lambda-\frac{\lambda}{m}} = \frac{(\frac{\lambda}{m})^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{m}}$$

donc $\boxed{X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \frac{\lambda}{m}}$.

Exercice 10. Deux joueurs lancent successivement et chacun à son tour un dé cubique équilibré. Le gagnant est le premier à obtenir un 6. On note X le numéro du tour auquel le premier 6 est obtenu.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Calculer la probabilité que le premier joueur gagne.

Solution.

1. Les lancers de dés successifs étant identiques et indépendants, il constitue un schéma de Bernoulli donc, par propriété, X suit une loi $\mathscr{G}(\frac{1}{6})$.

2. Le premier joueur gagne si et seulement si le premier 6 sort lors d'un lancer impair. Ainsi, comme les évènements sont incompatibles, la probabilité que le joueur 1 gagner est

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\{X=2k+1\}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^k \underset{0\leqslant\frac{25}{36}<1}{=} \frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

i.e. $\boxed{\text{la probabilité que le premier joueur gagne est } \frac{6}{11}}$.

Exercice 11. On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, que l'on lance plusieurs fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k : « Obtenir pile au k-ème lancer ». On considère les variables aléatoire suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est égale au nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers ;
- U est égale au rang du lancer auquel on obtient le deuxième pile.

1. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre U ?

2. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'événement $\{U = n\}$ en fonction de X_{n-1} et de A_n.

4. En déduire la loi de U.

5. Démontrer que U admet une espérance et la calculer.

Solution.

1. L'ensemble des valeurs prises par U est $\boxed{\mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les n premiers lancers constituent un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « Obtenir pile ». Ainsi, X_n, qui compte le nombre de succès, suit une loi $\boxed{\mathscr{B}(n, \frac{1}{3})}$.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$. L'évènement $\{U = n\}$ est réalisé si on a obtenu exactement 1 pile lors des $n-1$ premiers lancers et si on obtient pile au n-ème lancer. Ainsi, $\boxed{\{U = n\} = \{X_{n-1} = 1\} \cap A_n}$.

4. Comme les lancers sont indépendants, les évènements $\{X_{n-1} = 1\}$ et A_n sont indépendants donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathbf{P}(U = n) = \mathbf{P}(X_{n-1} = 1)\mathbf{P}(A_n) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3} = \frac{n-1}{3^2} \times \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(U = n) = \dfrac{(n-1)2^{n-2}}{3^n}}$.

5. On doit étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} nP(U = n)$ i.e. $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\dfrac{(n-1)2^{n-2}}{3^n}$. Or, pour tout entier $n \geqslant 2$, $n\dfrac{(n-1)2^{n-2}}{3^n} = \dfrac{1}{9} \times n(n-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$ et, au facteur $\dfrac{1}{9}$, on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée deux fois qui converge car $0 \leqslant \dfrac{2}{3} < 1$. Ainsi, U possède une espérance et

$$\mathbf{E}(U) = \frac{1}{9}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3} = \frac{1}{9} \times \frac{2}{\frac{1}{27}}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{E}(U) = 6}$.

Exercice 12. On dispose de deux dés cubiques équilibrés. On effectue des lancers de ces deux dés simultanément jusqu'à obtenir au moins un 6. Si on obtient deux 6, on arrête. Sinon, on relance seulement le dé avec lequel on n'a pas obtenu 6 et on continue jusqu'à obtenir 6 avec ce dé. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir un 6 avec le premier (resp. le deuxième) dé.

1. Quelles sont les lois de X et Y ?

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X > n) = (\frac{5}{6})^n$.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers qu'on effectue en tout.

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $\{Z \leqslant n\}$ et $\{X \leqslant n\} \cap \{Y \leqslant n\}$ sont égaux.

b. En déduire la fonction de répartition de Z.

c. Déterminer la loi de Z puis son espérance.

Solution.

1. Pour chaque dé, les lancers successifs constituent un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « Obtenir 6 ». Ainsi, X et Y qui correspondant, pour chaque dé, au rang d'appartiion du premier succès suivent une même loi $\mathscr{G}(\frac{1}{6})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} \underset{j=k-n-1}{=} \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j+n} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j} \\ &\underset{0 \leqslant \frac{5}{6} < 1}{=} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \underset{0 \leqslant \frac{5}{6} < 1}{=} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \times \frac{1}{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X > n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable Z est inférieur à n si et seulement si on a obtenu le premier 6 sur chaque dé au bout d'au plus n lancers donc $\boxed{\{Z \leqslant n\} = \{X \leqslant n\} \cap \{Y \leqslant n\}}$.

b. Comme les variables X et Y sont indépendantes, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_Z(n) = \mathbf{P}(Z \leqslant n) = \mathbf{P}(\{X \leqslant n\} \cap \{Y \leqslant n\}) = \mathbf{P}(X \leqslant n)\mathbf{P}(Y \leqslant n).$$

De plus X et Y suivent la même loi et $\mathbf{P}(X \leqslant n) = 1 - \mathbf{P}(X > n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}$ donc

$\boxed{F_Z(n) = P(X \leqslant n)^2 = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)^{2}}$.

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) = F_Z(n) - F_Z(n-1) &= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)^{2} - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^{2} \\ &= \left[\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right) - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\right]\left[\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right) + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\right] \\ &= \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right]\left[2 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right] \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{5}{6}\right)\left[2 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{6} + 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left[2 - \frac{11}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

i.e. en développant, $\boxed{\mathbf{P}(Z = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{11}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}\right] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{11}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}.$$

On reconnaît deux sommes partielles de séries géométriques dérivées. Celles-ci sont convergentes car $0 \leqslant \frac{5}{6} < 1$ et $0 \leqslant \frac{25}{36} < 1$ donc Z admet une espérance et

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} - \frac{11}{36} \times \frac{1}{(1-\frac{25}{36})^2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{36}} - \frac{11}{36} \times \frac{1}{(\frac{11}{36})^2} = 12 - \frac{36}{11}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{96}{11}}$.

Exercice 13.

1. Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

2. Soit $p \in \,]0\,;1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

a. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

b. En déduire l'espérance de $\frac{1}{X+1}$.

Solution.

1. Par le théorème de transfert, on doit étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!} \underset{j=k+1}{=} \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{j!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} - 1\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)$$

Ainsi, la série converge donc $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance et, par le théorème de transfert, $\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}}$.

2. a. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Alors,

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}$$

donc $\boxed{\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}}$.

b. Par le théorème de transfert, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&\underset{j=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^{j-1}(1-p)^{n+1-j} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left[\underbrace{\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^j(1-p)^{n+1-j}}_{\text{binôme de Newton}} - (1-p)^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left[(p+(1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}}$.

Exercice 14. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On y effectue des tirages sans remise et on note Y_n le nombre de boules blanches obtenues après n tirages pour tout entier $n \leqslant b+r$. On note également, pour tout entier $k \leqslant b+r$, X_k la variable aléatoire égale à 1 si on obtient une boule blanche au k-ème tirage et 0 sinon.

1. Si on avait effectué des tirages avec remise, combien aurait-on eu de boules blanches en moyenne sur n tirages ?

2. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

3. Calculer $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$, puis en déduire la loi de X_2.

4. Soit $n \in [\![0, b+r-1]\!]$.

 a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X_{n+1} ?

 b. Combien reste-t-il de boules dans l'urne après n tirages ?

 c. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $k \leqslant b$. Si $Y_n = k$, combien de boules blanches et de boules rouges reste-t-il après n tirages ? En déduire $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$.

 d. Justifier que :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b-k}{b+r-n}\mathbf{P}(Y_n = k)$$

 puis que :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{b - \mathbf{E}(Y_n)}{b+r-n}.$$

5. **a.** Justifier que, pour tout $n \in [\![0, b+r-1]\!]$, $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$.

 b. En déduire que pour tout $n \in [\![0, b+r-1]\!]$,

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}) = \mathbf{E}(Y_n) + \frac{b - \mathbf{E}(Y_n)}{b+r-n}.$$

 c. Démontrer par récurrence que, $n \in [\![0, b+r]\!]$, $\mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{nb}{b+r}$.

6. Pour tout $n \in [\![1; b+r]\!]$, calculer la probabilité de tirer une boule blanche au n-ème tirage.

Solution.

1. Si on avait effectué des tirages avec remise, on aurait eu affaire à un schéma de Bernoulli et Y_n aurait suivi une loi $\mathscr{B}(n, \frac{b}{b+r})$. Dans ce cas, le nombre moyen de boules blanches obtenues en n tirages aurait été $\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{nb}{b+r}}$.

2. X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \frac{b}{b+r}}$ et $\mathbf{V}(X_1) = \frac{b}{b+r}\left(1 - \frac{b}{b+r}\right) = \frac{b}{b+r} \times \frac{b+r-b}{b+r}$ i.e. $\boxed{\mathbf{V}(X_1) = \frac{br}{b+r}}$.

3. $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{b}{b+r-1}$ et $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{b-1}{b+r-1}$. Comme $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$ forment un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2=1) &= \mathbf{P}(X_1=0)\mathbf{P}(X_2=1 \mid X_1=0)+\mathbf{P}(X_1=1)\mathbf{P}(X_2=1 \mid X_1=1)\\ &= \frac{r}{b+r}\times\frac{b}{b+r-1}+\frac{b}{b+r}\times\frac{b-1}{b+r-1}\\ &= \frac{rb+b(b-1)}{(b+r)(b+r-1)}=\frac{b(r+b-1)}{(b+r)(b+r-1)}\\ &= \frac{b}{b+r}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{X_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{b}{b+r}}$ (comme X_1 !).

4. a. Par définition, $\boxed{X_{n+1}(\Omega)=\{0\,;1\}}$.

b. Après n tirages, il reste $b+r-n$ boules dans l'urne.

c. Si $Y_n=k$, on a enlevé k boules blanches de l'urne donc il en reste $b+r-k$. Ainsi, $\mathbf{P}(X_{n+1}=1 \mid Y_n=k)=\frac{b-k}{b+r-n}$.

d. Notons m le minimum entre n et b. Alors, $(Y_n=k)_{k\in[\![0,m}$ forment un système complet d'évènements donc, par le formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(X_{n+1}=1)=\sum_{k=0}^{m}P(Y_n=k)P(X_{n+1}=1 \mid Y_n=k)=\sum_{k=0}^{m}\frac{b-k}{n+r-n}P(Y_n=k).$$

Si $b\geqslant n$ alors $m=n$ donc $\mathbf{P}(X_{n+1}=1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{b-k}{n+r-n}P(Y_n=k)$. Si $b<n$ alors $m=b$ mais, pour tout $k>b$, $\mathbf{P}(Y_n=k)=0$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{b-k}{n+r-n}P(Y_n=k) &= \sum_{k=0}^{b}\frac{b-k}{n+r-n}P(Y_n=k)+\sum_{k=b+1}^{n}\frac{b-k}{n+r-n}\underbrace{P(Y_n=k)}_{=0}\\ &= \sum_{k=0}^{b}\frac{b-k}{n+r-n}P(Y_n=k)=\mathbf{P}(X_{n+1}=1).\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1}=1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{b-k}{n+r-n}P(Y_n=k)}$. Par linéarité de la somme, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{b}{n+r-n}P(Y_n=k)-\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n+r-n}P(Y_n=k)\\ &= \frac{b}{n+r-n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}P(Y_n=k)}_{=1}-\frac{1}{n+r-n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}kP(Y_n=k)}_{=\mathbf{E}(Y_n)}\\ &= \frac{b}{n+r-n}-\frac{1}{n+r-n}\mathbf{E}(Y_n)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1}=1)=\dfrac{b-\mathbf{E}(Y_n)}{n+r-n}}$.

5. a. Soit $n\in[\![0,b+r-1]\!]$. Le nombre de boules blanches tirées au cours des $n+1$ premiers tirages est égal au nombre de boules blanches tirées lors des n premiers tirages plus le nombre de boules blanches tirées au $(n+1)$-ème tirage donc $\boxed{Y_{n+1}=Y_n+X_{n+1}}$.

b. Soit $n \in [\![0, b+r-1]\!]$. Par linéarité de l'espérance, on déduit de la question précédente que $\mathbf{E}(Y_{n+1}) = \mathbf{E}(Y_n) + \mathbf{E}(X_n)$. Or, d'après la question **4.d.**, X_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b - \mathbf{E}(Y_n)}{n+r-n}$ donc $\mathbf{E}(X_n) = \dfrac{b-\mathbf{E}(Y_n)}{n+r-n}$.

Ainsi, on conclut que, $\boxed{\mathbf{E}(Y_{n+1}) = \mathbf{E}(Y_n) + \dfrac{b-\mathbf{E}(Y_n)}{b+r-n}}$.

c. Considérons, pour tout entier $n \in [\![0, b+r]\!]$, la proposition H_n : « $\mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{nb}{b+r}$ ».

Initialisation. Comme Y_0 est constante égale à 0, $\mathbf{E}(Y_0) = 0$ donc H_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in [\![0, b+r-1]\!]$. Supposons que H_n est vraie. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_{n+1}) &= \frac{nb}{b+r} + \frac{b - \frac{nb}{b+r}}{b+r-n} = \frac{nb(b+r-n)}{(b+r)(b+r-n)} + \frac{b(b+r)-nb}{(b+r-n)(b+r)}\\
&= \frac{nb(b+r-n) + b(b+r-n)}{(b+r)(b+r-n)} = \frac{(nb+b)(b+r-n)}{(b+r)(b+r-n)}\\
&= \frac{(n+1)n}{b+r}
\end{aligned}$$

donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion. Ainsi, par le principe de récurrence, on conclut de ce qui précède que, $\boxed{\text{pour tout } n \in [\![0, b+r]\!],\ \mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{nb}{b+r}}$.

6. Soit $n \in [\![1, b+r]\!]$. Alors, d'après la question **5.a.**, $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(Y_n) - \mathbf{E}(Y_{n-1}) = \frac{nb}{b+r} - \frac{(n-1)b}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

Or, X_n suit une loi de Bernoulli donc on conclut que $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{b}{b+r})}$. (Ainsi, les variables aléatoires X_n suivent toutes la même loi.)

Exercice 15.

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilité, indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Déterminer la loi de $X+Y$.

2. **a.** Soit $k > 0$. Montrer qu'on ne peut pas trouver des réels strictement positifs a, b, c et d tels que $ab = k$, $cd = k$ et $ac + bd \leqslant k$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on trouver deux variables aléatoires X et Y indépendantes et à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telles que $X+Y$ suive une loi uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$?

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, l'événement $\{X+Y=n\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X = n-k\} \cap \{Y = k\}$ pour k allant de 0 à n. Dès lors, comme les variables X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X=n-k\} \cap \{Y=k\}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=n-k)\mathbf{P}(Y=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k
\end{aligned}$$

donc, par la formule du binôme de Newton,

$$\mathbf{P}(X+Y=n)=\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^n}{n!}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^n=\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}$$

i.e. $\boxed{X+Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda+\mu)}$.

2. a. Supposons qu'il existe de tels réels a, b, c et d. D'une part, $abcd=(ab)(cd)=k^2$ et, d'autre part, des trois inégalités $ac+bd\leqslant k$, $ac>0$ et $bd>0$, on déduit que $ac<k$ et $bd<k$ donc $abcd=(ac)(bd)<k^2$, ce qui donne une contraction. Ainsi, de tels réels n'existent pas.

b. Posons, pour tout entier k entre 0 et n, $x_k=P(X=k)$ et $y_k=P(Y=k)$. Supposons qu'il existe deux telles variables aléatoires X et Y. Alors, par indépendance, pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$,

$$\frac{1}{2n+1}=P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=\sum_{i+j=k}x_iy_j.$$

Pour $k=0$, on trouve $\frac{1}{2n+1}=x_0y_0$, pour $k=2n$, on trouve $\frac{1}{2n+1}=x_ny_n$ et, pour tout $k=n$, on trouve $x_0y_n+x_ny_0\leqslant\frac{1}{2n+1}$. On aboutit à une contradiction grâce à la question précédente donc de telles variables n'existe pas.