⧫ Corrigés des exercices du chapitre 7

Exercice 1. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues par morceaux.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x < -1 \\ 1 \text{ si } x \in [-1\,;0] \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **2.** $g : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \in [0\,;1] \\ x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Solution.

1. La fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme fonction de référence ou composée de fonctions de référence. De plus, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$. Ainsi, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Ainsi, f n'a pas une limite finie à gauche en 0 donc f n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \longmapsto \begin{cases} t \text{ si } t < 0 \\ t^2 \text{ si } t \in [0\,;1] \\ \frac{1}{t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$

2. $J = \displaystyle\int_{1}^{e^2} g(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ si } t \in [1\,;4] \\ \frac{1}{t\ln(t)} \text{ si } t > 4 \end{cases}$

Solution.

1. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale a bien un sens et

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{0} t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{1} + [\ln(t)]_1^3 = 0 - \frac{(-2)^2}{2} + \frac{1^3}{3} - 0 + \ln(3) - \ln(1) \\ &= \ln(3) - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

2. La fonction g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale a bien un sens et

$$\begin{aligned} J &= \int_{1}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{e^2} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[2\sqrt{t}\right]_1^4 + [\ln(\ln(t))]_4^{e^2} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} + \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(4)) \\ &= 2 + \ln(2) - \ln(\ln(2^2)) = 2 + \ln(2) - \ln(2\ln(2)) = 2 + \ln(2) - (\ln(2) + \ln(\ln(2))) \\ &= 2 - \ln(\ln(2)) \end{aligned}$$

Exercice 3. À l'aide d'une primitive, étudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leurs valeurs en cas de convergence.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$$

Solution.
Soit $a > 1$. Alors,

$$\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \underbrace{\frac{1}{t}\ln(t)}_{u'u}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^a = \frac{1}{2}(\ln(a))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 = \frac{1}{2}(\ln(a))^2 \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$$

donc I_1 diverge.

Soit $a > 0$. Alors,

$$\int_0^a \frac{u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^a \underbrace{\frac{2u}{(1+u^2)^2}}_{\frac{u'}{u^2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+u^2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+0^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+a^2)} \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc I_2 converge.

Soit $a > 0$. Alors,

$$\int_0^a t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^a \underbrace{(-2t)\mathrm{e}^{-t^2}}_{u'\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^0\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2} \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc I_3 converge.

Soit $a > 0$. Alors,

$$\int_2^a \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^a \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}}_{\frac{u'}{u}}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(x))]_2^a = \ln(\ln(a)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$$

donc I_4 diverge.

Exercice 4. Calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t^2\mathrm{e}^{-t^3} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Solution. Comme I est continue par morceaux,

$$I = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $a > 0$,

$$\int_0^a t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\int_0^a \underbrace{(-3t^2)\mathrm{e}^{-t^3}}_{u'\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^a = -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^0\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-a^2} \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{3}$$

donc $I = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 5. Étudier, en fonction du réel α, la nature de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. Soit un réel $A > 0$.
Si $\alpha = 0$ alors
$$\int_0^A \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^A 1\,\mathrm{d}t = A \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$
donc I_α diverge.
Si $\alpha \neq 0$ alors
$$\int_0^A \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]_0^A = -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha A} + \frac{1}{\alpha}.$$
Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{A\to+\infty} -\alpha A = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ donc I_α diverge.
Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{A\to+\infty} -\alpha A = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$ donc I_α converge.
On conclut que I_α converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice 6. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Solution. Soit $a > 0$ et $I_a = \displaystyle\int_0^a t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On remarque que $I_a = \displaystyle\int_0^a t^2 \times (t\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t$. On pose, pour tout réel t,

$$u(t) = t^2 \qquad u'(t) = 2t$$
$$v(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \qquad v'(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,
$$I_a = \left[t^2 \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right)\right]_0^a - \int_0^a 2t \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^{-a^2} + \int_0^a t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or,
$$\int_0^a t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^a \underbrace{-2t\mathrm{e}^{-t^2}}_{u'e^u}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^0\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}$$
donc
$$I_a = -\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^{-a^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}.$$
Enfin, $\lim\limits_{a\to+\infty} -a^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a^2} = 0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{a\to+\infty} a^2\mathrm{e}^{-a^2} = 0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} I_a = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, I converge vers $I = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right)$.

1. Donner l'expression de f' sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ et que $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e+1}{e-1}\right)$.

Solution.

1. Considérons $g : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme sommes et quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,
$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x + 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

Étant donné que $f = \ln \circ g$, on en déduit que, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \times \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x-1)} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

2. Soit $a > 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^a \frac{e^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}\,\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{e^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{1}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}f(x)\right]_1^a = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^a-1}{\mathrm{e}^a+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)\end{aligned}$$

Or, lorsque a tend vers $+\infty$, $\mathrm{e}^a - 1 \sim \mathrm{e}^a$ et $\mathrm{e}^a + 1 \sim \mathrm{e}^a$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^a-1}{\mathrm{e}^a+1} \sim \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a} = 1$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^a-1}{\mathrm{e}^a+1} = 1$ donc, par continuité de ln en 1, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^a-1}{\mathrm{e}^a+1}\right) = \ln(1) = 0$. Ainsi, I converge et

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right).$$

Exercice 8. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

1. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$ et précisera sa valeur.

3. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \ln(2)$.

Indication. Après avoir intégré par parties, écrire que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ pour calculer l'intégrale restante.

Solution.

1. On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u^2}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

2. Soit $a > 0$. Alors,

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(0) = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^a} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^a}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^a = +\infty$ donc, par somme et quotient, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^a} = 0$. Ainsi, I converge et $I = \dfrac{1}{2}$.

3. Soit $a > 0$ et $I_a = \displaystyle\int_0^a \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$. On pose, pour tout réel x,

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v(x) = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \qquad v'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$I_a = \left[-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^a - \int_0^a -\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{1+\mathrm{e}^a} + \int_0^a \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Or,

$$\int_0^a \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^a \underbrace{\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}}_{\frac{u'}{u}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)\right]_0^a = -\ln(\mathrm{e}^{-a}+1)+\ln(2)$$

Ainsi,

$$I_a = -\frac{a}{1+\mathrm{e}^a} - \ln(\mathrm{e}^{-a}+1)+\ln(2)$$

Or, lorsque a tend vers $+\infty$, $\dfrac{a}{1+\mathrm{e}^a} \sim \dfrac{a}{\mathrm{e}^a}$ qui tend vers 0 par croissance comparée et $\lim \mathrm{e}^{-a}+1 = 1$ donc, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{a\to+\infty} \ln(\mathrm{e}^{-a}+1) = \ln(1) = 0$. Ainsi, J converge et $J = \ln(2)$.

Exercice 9. Pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A, on pose :

$$I_n(A) = \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Calculer, pour tout $A > 0$, $I_0(A)$ et en déduire que l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

2. **a.** Soit $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre $I_{n+1}(A)$ et $I_n(A)$.

b. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge. On note I_n cette intégrale.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire la relation liant I_{n+1} et I_n puis en déduire une expression de I_n en fonction de n.

Solution.

1. Soit $A > 0$. Alors, $I_0(A) = \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A = -\mathrm{e}^{-A}+\mathrm{e}^0 = 1-\mathrm{e}^{-A}$. Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-A} = 0$ donc I_0 converge et $I_0 = 1$.

2. **a.** Par définition,

$$I_{n+1}(A) = \int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose, pour tout réel t,

$$u(t) = t^{n+1} \qquad u'(t) = (n+1)t^n$$
$$v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$I_{n+1}(A) = \left[t^{n+1}\times(-\mathrm{e}^{-t})\right]_0^A - \int_0^A (n+1)t^n\times(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A}+(n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

donc $I_{n+1}(A) = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)I_n(A)$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(0)$: « l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge ».

D'après la question **1.**, $P(0)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(k)$ est vraie. Alors, $I_k(A)$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{k+1}\mathrm{e}^{-A} = 0$ donc, par somme, $I_{k+1}(A)$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$ et ainsi $P(k+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Sachant que, pour tout $A > 0$, $I_{n+1}(A) = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)I_n(A)$, en faisant tendre A vers $+\infty$, on a en déduit que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$. Comme $I_0 = 1 = 0!$, le résultat est vrai pour $n = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_k = k!$. Alors, $I_{k+1} = (k+1)I_k = (k+1) \times k! = (k+1)!$ donc le résultat est établi au rang $k+1$. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in_N$, $I_n = n!$.

Exercice 10.

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

Solution.

1. Soit un réel $t \geqslant 1$. Alors,

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{t(1+t^2)} - \frac{t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t(t1+t^2)}$$

2. Soit $a > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_1^a \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{\frac{u'}{u}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^a = \ln(a) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2) - \ln(1) + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\ln(2) + \ln(a) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2).
\end{aligned}$$

Or, pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2) = \ln(a) - \ln\left(\sqrt{1+a^2}\right) &= \ln(a) - \ln\left(a\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\right) \\
&= \ln(a) - \ln(a) - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\right) \\
&= -\ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\right).
\end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{a\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{a^2}+1} = 1$ donc, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{a\to+\infty} \ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\right) = \ln(1) = 0$.

On en déduit que I converge et que $I = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 11. En utilisant une intégration par parties, montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes. (Pour J, on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Solution.

Soit $a > 0$ et $I_a = \displaystyle\int_1^a \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour tout réel t,

$$u(t) = \ln(1+t^2) \qquad u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$v(t) = -\frac{1}{t} \qquad v'(t) = \frac{1}{t^2}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_a &= \left[\ln(1+t^2) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^a - \int_1^a \frac{2t}{1+t^2} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\ln(1+a^2)}{a} + \ln(2) + 2\int_1^a \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(1+a^2)}{a} + \ln(2) + 2\left[\arctan(x)\right]_1^a = -\frac{\ln(1+a^2)}{a} + \ln(2) + 2\arctan(a) - 2\arctan(1) \\ &= \ln(2) - \frac{\pi}{2} + 2\arctan(a) - \frac{\ln(1+a^2)}{a} \end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \arctan(a) = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout $a > 0$,

$$\frac{\ln(1+a^2)}{a} = \frac{\ln\left(a^2\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\right)}{a} = \frac{2\ln(a)}{a} + \frac{\ln\left(\frac{1}{a^2}+1\right)}{a}.$$

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{\ln(a)}{a} = 0$ et, de plus, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a^2} + 1 = 1$ donc, par composition et quotient, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a^2}+1\right)}{a} = 0$.

On en déduit que I converge et que $I = \ln(2) - \dfrac{\pi}{2} + 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \ln(2) + \dfrac{\pi}{2}$.

Soit $a > 0$ et $J_a = \displaystyle\int_1^a \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour tout réel t,

$$u(t) = \arctan(t) \qquad u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$v(t) = -\frac{1}{t} \qquad v'(t) = \frac{1}{t^2}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$J_a = \left[\arctan(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{1+t^2} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\arctan(a)}{a} + \frac{\pi}{4} + \int_1^a \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \arctan(a) = \frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{\arctan(a)}{a} = 0$ et, d'après le résultat de l'exercice précédent, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2)$ donc J converge et que $J = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 12. En utilisant un changement de variable simple, calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution. Utilisons le changement de variable $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$. La fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{t}{\sqrt{2}}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ donc

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$$

Exercice 13. En utilisant le changement de variable indiqué, étudier la nature des intégrales ci-dessous et calculer leurs valeurs en cas de convergence.

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+4}\mathrm{d}t \quad (t = 2u) \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x \quad (x = \ln(t))$$

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}\mathrm{d}x \quad (t = \ln(x)) \qquad L = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \quad \left(u = \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour le calcul de L, une fois le changement de variable effectué, on pourra remarquer que, pour tout $u > 1$, $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1-u+u}{u^2-1}$.

Solution.

• La fonction $\varphi : u \longmapsto 2u$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, en posant $t = 2u$, on a $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$ et, comme $\varphi(1) = 2$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2u)^2+4} 2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\left[\arctan(u)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

• La fonction $\varphi : t \longmapsto \ln(t)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc, en posant $x = \ln(t)$, on a $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et, comme $\lim\limits_{t\to0} \varphi(u) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$,

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

• La fonction $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, en posant $t = \ln(x)$ (c'est-à-dire $x = \mathrm{e}^t$), on a $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et, comme $\varphi(0) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$,

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^t(1+t^2)} \times \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

• La fonction $\varphi : u \longmapsto \sqrt{u^2-1}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$ donc, en posant $u = \sqrt{x^2+1}$ (c'est-à-dire $x = \sqrt{u^2-1}$), on a $\mathrm{d}x = \dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ et, comme $\varphi(\sqrt{2}) = 1$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$,

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2-1} \times u} \times \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}.$$

Or, pour tout réel $u > 1$, $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1-u+u}{u^2-1} = \dfrac{1-u}{(u-1)(u+1)} + \dfrac{u}{u^2-1} = -\dfrac{1}{u+1} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2u}{u^2-1}$
donc, pour tout réel $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{a} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} &= \int_{\sqrt{2}}^{a} -\frac{1}{u+1} + \frac{1}{2} \times \frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \left[-\ln(u+1) + \frac{1}{2}\ln(u^2-1)\right]_{\sqrt{2}}^{a} \\
&= -\ln(a+1) + \frac{1}{2}\ln(a^2-1) + \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2}\ln(1) \\
&= -\ln(a+1) + \frac{1}{2}\ln((a-1)(a+1)) + \ln(\sqrt{2}+1) \\
&= -\ln(a+1) + \frac{1}{2}\ln(a-1) + \frac{1}{2}\ln(a+1) + \ln(\sqrt{2}+1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(a-1) + \ln(a+1)\right) + \ln(\sqrt{2}+1) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

Or, quand a tend vers $+\infty$, $\dfrac{a-1}{a+1} \sim \dfrac{a}{a} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{a-1}{a+1} = 1$ et, par continuité de ln en 1, on en déduit que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \ln(1) = 0$.

On conclut que L converge et que $L = \ln(\sqrt{2}+1)$.

Exercice 14. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4+t+t^2}$$

Solution.

• Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{t}}{t^2+1} \sim \dfrac{\sqrt{t}}{t^2} = \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. Comme $\dfrac{3}{2} > 1$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge et donc, par théorème de comparaison, I_1 converge.

• Pour tout $t > 1$, $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t^3} \leqslant \dfrac{1}{t^3}$. Comme $3 > 1$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge et donc, par théorème de comparaison, I_2 converge.

• I_3 est une intégrale de Riemann divergente d'après le cours.

• Pour tout $a > 0$,

$$\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t} \times \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^a = \frac{1}{2}(\ln(a))^2 \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$$

donc I_4 diverge.

• Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{t^2+t} \sim \dfrac{1}{t^2}$ et, comme $2 > 1$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donc, par théorème de comparaison, I_5 converge.

• Remarquons que, pour tout $t \geqslant 0$, $4+t+t^2 > 0$ donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{4+t+t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Par la relation de Chasles, $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{4+t+t^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4+t+t^2}$.

Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{4+t+t^2} \sim \dfrac{1}{t^2}$ et, comme $2 > 1$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donc, par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{4+t+t^2}$ converge. Par ailleurs, $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{4+t+t^2}$ est finie car $t \longmapsto \dfrac{1}{4+t+t^2}$ est continue sur le segment $[0\,;1]$. On conclut donc que I_6 converge.

Exercice 15. Dans chaque cas, justifier la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad L \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour L, on pourra commencer par remarquer que, pour tout réel t, $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ puis effectuer le changement de variable $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}$.

Solution.

• Pour tout réel $a > 0$,

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a} \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc I converge et $I = \dfrac{1}{2}$.

• Soit $a > 0$ et $J_a = \displaystyle\int_0^a t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour tout réel t,

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$$
$$v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$J_a = \left[t \times (-\mathrm{e}^{-t})\right]_0^a - \int_0^a (-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = -a\mathrm{e}^{-a} + \int_1^a \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -a\mathrm{e}^{-a} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a = -a\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-a} + 1$$

Or, $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a} = 0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{a\to+\infty} a\mathrm{e}^{-a} = 0$ donc $J_a \xrightarrow[a\to+\infty]{} 1$. Ainsi, J converge et $J = 1$.

• Soit $a > 0$ et $K_a = \displaystyle\int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour tout réel t,

$$u(t) = \ln(t) \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v(t) = -\frac{1}{t} \qquad v'(t) = \frac{1}{t^2}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} K_a &= \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\ln(a)}{a} + \int_1^a \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(a)}{a} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^a = -\frac{\ln(a)}{a} - \frac{1}{a} + 1 \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{1}{a} = 0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{\ln(a)}{a} = 0$ donc $K_a \xrightarrow[a\to+\infty]{} 1$. Ainsi, K converge et $K = 1$.

- Pour tout réel t, $(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=t^2+2\times t\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=t^2+t+1$. Ainsi,

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $t=\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{1}{2}$. La fonction $varphi : u\longmapsto\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{1}{2}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$ et, de plus, $\lim\limits_{u\to-\infty}=-\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}=+\infty$ donc

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Or, pour tous réel a et b,

$$\int_a^b\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_a^0\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_0^b\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\arctan(0)-\arctan(a)+\arctan(b)-\arctan(0)=\arctan(b)-\mathrm{arc}$$

De plus, $\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan(a)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan(b)=\dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

On conclut donc que L converge et que $L=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

Exercice 16. On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $a>0$, $I_a=\displaystyle\int_0^a t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $J_a=\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}}u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

a. Montrer, à l'aide du changement de variable $t=u^2$, que $I_a=2J_a$.

b. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que

$$J_a=6-\left(\sqrt{a}^3+3a+6\sqrt{a}+6\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}.$$

2. En déduire que I est convergente et déterminer sa valeur.

Solution.

1. a. On effectue le changement de variable $t=u^2$. On a donc $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$, quand $t=0$, $u=0$ et, quand $t=a$, $u=\sqrt{a}$ donc

$$I_a=\int_0^{\sqrt{a}}u^2\mathrm{e}^{-u}\times 2u\,\mathrm{d}u=2\int_0^{\sqrt{a}}u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=2J_a.$$

b. On pose

$$f(u)=u^3 \qquad f'(u)=3u^2$$
$$g(u)=-\mathrm{e}^{-u} \qquad g'(u)=\mathrm{e}^{-u}$$

On définit ainsi deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;a[$ donc, en intégrant par parties,

$$J_a=\left[-u^3\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{\sqrt{a}}-\int_0^{\sqrt{a}}3u^2(-\mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u=-\sqrt{a}^3\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}+3\int_0^{\sqrt{a}}u^2\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}t.$$

En réitérant l'intégration par parties en posant cette fois-ci,

$$f(u) = u^2 \qquad\qquad f'(u) = 2u$$
$$g(u) = -\mathrm{e}^{-u} \qquad\qquad g'(u) = \mathrm{e}^{-u}$$

il vient

$$\int_0^{\sqrt{a}} u^2\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}t = \left[-u^2\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{\sqrt{a}} - \int_0^{\sqrt{a}} 2u(-\mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u = -a\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} + 2\int_0^{\sqrt{a}} u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, à l'aide d'une troisième intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{a}} u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u &= \left[-u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{\sqrt{a}} - \int_0^{\sqrt{a}} -\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = -\sqrt{a}\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} + \int \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= -\sqrt{a}\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} + \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} - \mathrm{e}^{\sqrt{a}} + 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}J_a &= -\sqrt{a}^3\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} + 3\left(-a\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} + 2\left(-\sqrt{a}\mathrm{e}^{-\sqrt{a}} - \mathrm{e}^{\sqrt{a}} + 1\right)\right)\\ &= 6 - \left(\sqrt{a}^3 + 3a + 6\sqrt{a} + 6\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}\end{aligned}$$

2. On déduit des questions précédentes que, lorsque a tend vers $+\infty$, $J_a \sim 6 - \sqrt{a}^3\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}$ donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{a\to+\infty} J_a = 6$. Ainsi, I converge et $I = \lim\limits_{a\to+\infty} I_a = 2\times 6 = 12$.

Exercice 17. Pour $a > 1$, on pose $I_a = \displaystyle\int_1^a \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_a = \dfrac{-\ln(a)}{2(1+a)^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2}$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel $t > 0$, $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$

b. En déduire une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+t)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}$

Solution.

1. On pose

$$u(t) = \ln(t) \qquad\qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v(t) = -\frac{1}{2(1+t)^2} \qquad\qquad v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3}$$

On définit ainsi deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;a[$ donc, en intégrant par parties,

$$I_a = \left[\ln(t)\times\left(-\frac{1}{2(1+t)^2}\right)\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{t}\times\left(-\frac{1}{2(1+t)^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{-\ln(a)}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2}.$$

2. **a.** Soit un réel $t > 0$. Alors,

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2 - t(1+t) - t}{t(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2-t-t^2-t}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t(1+t)^2}$$

b. On en déduit qu'une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+t)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction $t \longmapsto \ln(t) - \ln(1+t) + \dfrac{1}{1+t}$.

3. On déduit des questions précédentes que, pour tout réel $a > 0$,

$$\begin{aligned}
I_a &= -\frac{\ln(a)}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln(t) - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t}\right]_1^a \\
&= -\frac{\ln(a)}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln(a) - \ln(1+a) + \frac{1}{1+a} - \ln(1) + \ln(2) - \frac{1}{2}\right] \\
&= -\frac{\ln(a)}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a}{1+a}\right) + \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Or, quand a tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln(a)}{2(1+a)^2} \sim \dfrac{\ln(a)}{a^2}$ qui tend vers 0 par croissance comparée. De plus, $\dfrac{a}{1+a} \sim \dfrac{a}{a} = 1$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{a}{1+a} = 1$ et, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{a\to+\infty} \ln\left(\dfrac{a}{1+a}\right) = \ln(1) = 0$. Enfin, $\lim \dfrac{1}{2(1+a)} = 0$ donc, par somme $\lim\limits_{a\to+\infty} I_a = \dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{4}$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}$.