⧫ Corrigés des exercices du chapitre 5

Exercice 1. Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto (x^2 - 2x + 3)^5$

2. $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 5 \times (2x - 2) \times (x^2 - 2x + 3)^4 = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4.$$

Pour tout réel x, $10(x^2 - 2x + 3)^4$ est positif donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;1\right]$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[1\,;+\infty\right[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^5 = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^5 = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	32	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1 \times (1 + x^2) - x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Pour tout réel x, $(1 + x^2)^2$ est positif donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Ainsi, $g'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;\infty\right[$ et $g'(x) \geqslant 0$ si $x \in [-1\,;1]$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \longmapsto x\exp(x)$.

Indication. On pourra calculer les dérivées première, seconde et troisième, conjecturer une expression générale puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Solution. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

De même, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f''(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

et f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f^{(3)}(x) = 1 \times e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x.$$

On peut conjecture de f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

Montrons-le par récurrence. Pour $n = 0$, c'est vrai puisque, pour tout réel x, $f^{(0)}(x) = xe^x = (x+0)e^x$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^{(k)}$ existe et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x$. Alors, $f^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = 1 \times e^x + (x+k)e^x = (x+k+1)e^x$$

donc la proposition est vraie au rang $n = k+1$.

Ainsi, par le principe de récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

Exercice 3. Déterminer un équivalent de f au voisinage de a.

1. $f : x \longmapsto x^3 - x + 2$ et $a = +\infty$

2. $f : x \longmapsto e^x + x^2$ et $a = +\infty$

3. $f : x \longmapsto x^4 + 3x$ et $a = 0$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{5x^2 + 3x - 2}{x+1}$ et $a = +\infty$

5. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + x}{x^5 + x^3}$ et $a = 0$

6. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x+1}$ et $a = 0$

Solution.

1. f est un polynôme donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$.

2. Pour tout réel x, $\dfrac{f(x)}{e^x} = 1 + \dfrac{x^2}{e^x}$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = 1$ et ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

3. f est un polynôme donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$.

4. Par quotient de fonctions polynôme, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{5x^2}{x}$ c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x$.

5. Par quotient de fonctions polynôme, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x^3}$ c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

6. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et, comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1 = 1 \neq 0$, $2x+1 \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Ainsi, par quotient, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Exercice 4.

1. Déterminer un équivalent en 0 dans chacun des cas suivants et en déduire la limite en 0.

   a. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin x}{x^2+x^3}$ **c.** $f(x) = \dfrac{(\cos x - 1)\sin^3 x}{3x^4}$

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ dans chacun des cas et en déduire la limite en $+\infty$.

   a. $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$ **b.** $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x\ln(x)$ **c.** $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

   Pour **b.**, utiliser une propriété du logarithme pour simplifier l'expression.

Solution.

1. a. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{2}$.

b. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x \times x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -1$.

c. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2} \times x^3}{3x^4} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{6}$.

2. a. Pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$ et, comme $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left[\ln(1+x^2) - \ln(x^2)\right] = x\ln\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

c. Étant donné que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction et faire l'étude aux bornes.

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \qquad g : x \longmapsto x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \qquad h : x \longmapsto \frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

Solution.

• La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 1 \geqslant 0$ donc $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$.

En $+\infty$ et en $-\infty$, $x^2+1 \sim x^2$ et $x^2-1 \sim x^2$ donc $f(x) \sim 2\sqrt{x^2} \sim 2|x|$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Au voisinage de -1 et de 1, x^2+1 tend vers 2 et x^2-1 tend vers 0 donc, par composition et somme, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \sqrt{2}$.

• La fonction f est définie si et seulement si $\dfrac{x+1}{x} > 0$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$ donc

$$\frac{x+1}{x} > 0 \iff 1 + \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} > -1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ou } x < -1.$$

Ainsi, $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$.

Aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, $f(x) = x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \sim x^2 \times \dfrac{1}{x} \sim x$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -1^-} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = -\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -1} x^2 = 1$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left[\ln(x+1) - \ln(x)\right] = x^2\ln(x+1) - x^2\ln(x)$. Or, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x+1) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2\ln(x+1) = 0$ et, par croissance comparées, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

- f est définie si et seulement si $x \neq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

  Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 donc, par composition, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ tend vers 1 et ainsi $f(x) \sim \dfrac{x}{2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$. Par somme et quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

  $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Par somme et quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Exercice 6. Dans chaque cas, déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ **2.** $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x\,(1-x)}$ **3.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$ **4.** $f(x) = \dfrac{(x+1)^3\,(x-3)}{x^2\,(x-2)}$

Solution.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 donc, par composition, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ tend vers 1 et ainsi $f(x) \sim x + 2 \sim x$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} x + 2 = 2$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} x+2 = 2$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$.

Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x^2}{x(-x)} \sim -1$ don $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{(-2)^2}{x} \sim \dfrac{4}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{(-1)^2}{1-x} \sim \dfrac{1}{1-x}$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

3. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $\dfrac{x^3-1}{x} \geqslant 0$. Étant donné que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $1^3 = 1$, on a la tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de x^3-1		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{x^3-1}{x}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0[\cup [1\,;+\infty[$.

Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $\dfrac{x^3-1}{x} \sim x^2$ donc $f(x) \sim \sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Au voisinage de 0, $\dfrac{x^3-1}{x} \sim -\dfrac{1}{x}$ donc $f(x) \sim \sqrt{-\dfrac{1}{x}}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{-\dfrac{1}{x}} = +\infty$ et, par suite, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \sqrt{X} = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$.

4. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}$.

Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x^3\times x}{x^2\times x} \sim x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{1^3\times(-3)}{x^2\times(-2)} \sim \dfrac{3}{2x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Au voisinage de 2, $f(x) \sim \dfrac{3^3\times(-1)}{2^2(x-2)} \sim \dfrac{-9}{4(x-2)}$ donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

Exercice 7. Déterminer le développement limité de f à l'ordre indiqué en 0.

1. $f : x \longmapsto x^4 + x + 1$ à l'ordre 2.

2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.

3. $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 3.

4. $f : x \longmapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3. ;

5. $f : x \longmapsto \cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

6. $f : x \longmapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 3.

7. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2.

8. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 2.

Solution.

1. $f(x) = 1 + x + o(x^2)$.

2. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)$.

3. $f(x) = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \dfrac{(2x)^2}{2} + o(x^3)\right) = x - 2x^3 - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \dfrac{13}{6}x^3 + o(x^3)$

4. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}(-x) + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(-x)^2 + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}(-x)^3 + o(x^3)1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + o(x^3) = 2 - \dfrac{1}{4}x^2 + o(x^3)$.

5. $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

6. $f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$

$$= x^2 + 2x\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 - x^3 + o(x^3)$$

7. $f(x) = \dfrac{x + o(x^2) - 1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1} = \dfrac{-1 + x + o(x^2)}{2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = (-1 + x + o(x^2)) \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + o(x^2)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

8. $f(x) = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \dfrac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exercice 8.

1. Écrire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

2. En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$

3. En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Solution.

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

2. On en déduit que

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right))^3 + o(x^3)\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

3. Remarquons que, pour tout réel x, $(1-x)(2-x) = 2 - x - 2x + x^2 = x^2 - 3x + 2$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{2-x} \\
&= \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 9.

1. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1+x) + 2\mathrm{e}^x$
2. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1-x^2)$
3. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$

Solution.

1. $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) + 2\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 2 + 3x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$
2. $f(x) = -x^2 + o(x^3)$
3. $f(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right)(1 + x + x^2 + o(x^2)) = x + x^2 + x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$$

Exercice 10. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

1. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$
2. $f : x \longmapsto \ln(1+\sin(x))$
3. $f : x \longmapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{3+\cos(x)}$
5. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$
6. $f : x \longmapsto \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$
7. $f : x \longmapsto \ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$
8. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1}$
9. $f : x \longmapsto \dfrac{x - \sin(x)}{1-\cos(x)}$

Solution.

1. $\ln(\frac{x^2+1}{x+1}) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = x^2 + o(x^3) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
2. $\ln(1+\sin(x)) = \ln(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}{2} + \frac{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3}{3} + o(x^3) =$
$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
3. $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(1 + (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))) = \ln(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))$ donc
$$\begin{aligned}\ln(1+\mathrm{e}^x) &= \ln\left[2(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3))\right]\\ &= \ln(2) + \ln(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3))\\ &= \ln(2) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) - \frac{(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3))^2}{2} + \frac{(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3))^3}{3} + o(x^3)\\ &= \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$
4. $\sqrt{3+\cos(x)} = \sqrt{3 + (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{8} + o(x^3)}$ donc
$\sqrt{3+\cos(x)} = 2\left(1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{8} + o(x^3)) + o(x^3)\right) = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
5. $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e}^{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)}$ donc
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} &= \mathrm{e}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})^2}{2} + \frac{(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)\\ &= \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{48}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

6. $\ln(1+\sqrt{1+x}) = \ln(1+(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3))) = \ln(2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3))$ donc

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sqrt{1+x}) &= \ln\left[2\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o(x^3)\right)\right] \\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o(x^3)\right) \\
&= \ln(2)+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}-\frac{(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o(x^3))^2}{2}+\frac{(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o(x^3))^3}{3}+o(x^3) \\
&= \ln(2)+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{64}+\frac{x^3}{192}+o(x^3) \\
&= \ln(2)+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{96}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

7. $\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) = \ln(3(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})+1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = \ln(4+2x+2x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3))$ donc

$$\begin{aligned}
\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) &= \ln\left[4\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)\right] \\
&= \ln(4)+\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right) \\
&= \ln(4)+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3))^2}{2}+\frac{(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3))^3}{3}+o(x^3) \\
&= \ln(4)+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^3}{24}+o(x^3) \\
&= \ln(4)+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

8. $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} = \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)}$. Or,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)} \\
&= 1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)^3+o(x^3) \\
&= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{8}+o(x^3) \\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1} &= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right) \\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{4}+o(x^3) \\
&= 1-x+\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{24}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

9. $\frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)} = \frac{\frac{x}{3}-\frac{x^3}{60}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)} = (\frac{x}{3}-\frac{x^3}{60}+o(x^3))(1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)) = \frac{1}{3}x+\frac{1}{90}x^3+o(x^3)$

Exercice 11. On cherche à calculer la limite de $f : x \longmapsto \dfrac{x+\cos(x)-\mathrm{e}^x}{\ln(1+x)-\sin(x)}$ en 0.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(x+\cos(x)-\mathrm{e}^x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x)-\sin(x))$.

c. Peut-on répondre à la question posée ? Pourquoi ?

2. Montrer que $x+\cos(x)-e^x = -x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

3. Montrer que $\ln(1+x)-\sin(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

4. En déduire que $f(x) = \dfrac{-1+\underset{x\to 0}{o}(1)}{-\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)}$.

5. Lorsqu'on fait tendre x vers 0, que peut-on dire, par définition, de $\underset{x\to 0}{o}(1)$?

6. En déduire la limité cherchée.

Solution.

1. a. Par somme de limite, $\lim\limits_{x\to 0}(x+\cos(x)-\mathrm{e}^x) = 0+1-1 = 0$.

b. Pa somme de limite, $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x)-\sin(x)) = 0+0 = 0$.

c. On ne peut pas conclure car on aboutit à une forme indéterminée.

2. $x+\cos(x)-\mathrm{e}^x = x+1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -x^2+o(x^2)$.

3. $\ln(1+x)-\sin(x) = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-(x+o(x^2)) = -\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

4. On en déduit que $f(x) = \dfrac{-x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \dfrac{x^2(-1+o(1))}{x^2(-\frac{1}{2}+o(1))} = \dfrac{-1+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)}$.

5. Par définition, $o(1)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

6. On déduit que $\lim\limits_{x\to 0}(x) = \dfrac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$.

Exercice 12. On cherche à calculer la limite de $f : x \longmapsto \dfrac{x^5}{\ln(1+x^2)-x\sin(x)}$ en 0.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x^5$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x^2)-x\sin(x)$.

c. Peut-on répondre à la question posée ? Pourquoi ?

2. Montrer que $\ln(1+x^2)-x\sin(x) = -\dfrac{x^4}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)$.

3. En déduire que $f(x) = \dfrac{x}{-\frac{1}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x)}$.

4. En déduire la limité cherchée.

Solution.

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} x^5 = 0$.

b. Par somme et produit de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x^2)-x\sin(x) = 0-0\times 0 = 0$.

c. On ne peut pas conclure car on aboutit à une forme indéterminée.

2. $\ln(1+x^2) - x\sin(x) = x^2 - \dfrac{(x^2)^2}{2} + o(x^5) - x\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = -\dfrac{x^4}{3} + o(x^5).$

3. On en déduit que

$$f(x) = \frac{x^5}{-\frac{x^4}{3} + o(x^5)} = \frac{x^5}{x^4\left(-\frac{1}{3} + o(x)\right)} = \frac{x}{-\frac{1}{3} + o(x)}$$

4. Comme $o(x) = xo(1)$, $\lim\limits_{x\to 0} o(x) = 0$, par somme somme et quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercice 13. En utilisant les développements limités, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}$ **4.** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t} - 1 - \frac{t}{2}}{t^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ **6.** $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1-u) + u}{u}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2}$

Solution.

1. $\dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x^2} = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

2. $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \dfrac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\dfrac{1}{6} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$.

3. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \dfrac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \dfrac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

4. $\dfrac{\sqrt{1+t} - 1 - \frac{t}{2}}{t^2} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + o(t^2) - 1 - \frac{t}{2}}{t^2} = \dfrac{-\frac{t^2}{8} + o(t^2)}{t^2} = -\dfrac{1}{8} + o(1)$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t} - 1 - \frac{t}{2}}{t^2} = -\dfrac{1}{8}$.

5. $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

6. $\dfrac{\ln(1-u) + u}{u} = \dfrac{-u + o(u) + u}{u} = \dfrac{o(u)}{u} = o(1)$ donc $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1-u) + u}{u} = 0$.

7. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2} = \dfrac{1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{-\frac{x^2}{9} + o(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{9} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+t)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2} = -\dfrac{1}{9}$.

Exercice 14. Déterminer les limites suivantes en utilisant des développements limités.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2} - \frac{3}{2} - \frac{x}{2}}{(x+1)^2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\exp(x-2) + 1 - x}{(x-2)^2}$

Solution.

1. Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$. On va faire un développement limité de f au voisinage de 1 donc pour cela, on considère la fonction g définie par
$$g(h) = f(1+h) = \frac{\ln(1+h) - (1+h) + 1}{((1+h)-1)^2} = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}.$$
Ainsi, $g(h) = \dfrac{h - \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2) - h}{h^2} = -\dfrac{1}{2} + \underset{h\to 0}{o}(1)$ donc $f(x) = g(x-1) = -\dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(1)$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

2. Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+2} - \frac{3}{2} - \frac{x}{2}}{(x+1)^2}$. On va faire un développement limité de f au voisinage de -1 donc pour cela, on considère la fonction g définie par
$$g(h) = f(-1+h) = \frac{\sqrt{-1+h+2} - \frac{3}{2} - \frac{-1+h}{2}}{(-1+h+1)^2} = \frac{\sqrt{1+h} - 1 - \frac{h}{2}}{h^2}.$$
Ainsi, $g(h) = \dfrac{1 + \frac{1}{2}h + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2) - h - \frac{h}{2}}{h^2} = -\dfrac{1}{8} + \underset{h\to 0}{o}(1)$ donc il s'ensuit que $f(x) = g(x+1) = -\dfrac{1}{8} + \underset{x\to -1}{o}(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2} - \frac{3}{2} - \frac{x}{2}}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{8}$.

3. Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{\exp(x-2) + 1 - x}{(x-2)^2}$. On va faire un développement limité de f au voisinage de 2 donc pour cela, on considère la fonction g définie par
$$g(h) = f(2+h) = \frac{\exp(2+h-2) + 1 - (2+h)}{(2+h-2)^2} = \frac{\mathrm{e}^h - 1 - h}{h^2}.$$
Ainsi, $g(h) = \dfrac{1 + h + \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2) - 1 - h}{h^2} = -\dfrac{1}{2} + \underset{h\to 0}{o}(1)$ donc $f(x) = g(x-2) = \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 2}{o}(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\exp(x-2) + 1 - x}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0 ?

Solution.

1. $f(x) = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x) + \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{3} + o(1)$$
donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{3}$ et ainsi f est dérivable en 0.

2. L'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 est $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}$. Or,

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{4} + o(x^4)$$

donc $f(x) - \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{x^2}{4} + o(x^4)$. Ainsi, au voisinage de 0, l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et T est du signe de $-\dfrac{x^2}{4}$ c'est-à-dire négatif donc, au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T.

Exercice 16. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Par opération sur les fonctions de référence, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x}{1 + x + o(x) - 1} = \frac{x}{x + o(x)} = \frac{1}{1 + o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Dès lors, au voisinage de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1}{x} = \frac{\frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} - 1}{x} = \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} - 1}{x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (\mathrm{e}^x - 1) - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$

donc, au voisinage de 0,

$$f'(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x(1 + x + o(x))}{(1 + x + o(x) - 1)^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{(x + o(x))^2} = \frac{x^2(-\frac{1}{2} + o(1))}{x^2(1 + o(1))^2} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{(1 + o(1))^2}.$$

Or, par définition, $\displaystyle\lim_{x\to 0} o(1) = 0$ donc, par somme produit et quotient, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$. Ainsi, f' est bien continue en 0.

Ainsi, on conclut que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f

2. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse 0.

3. Étudier la position relative de la courbe de f et de $\mathcal{T}$ au voisinage de 0

Solution.

1.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

donc $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{48}+o(x^3)$.

2. On en déduit que l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

3. L'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 0 est du signe de $\dfrac{x^3}{48}$ donc la courbe est en dessous de la tangente à gauche de 0 et au-dessus à droite de 0.

Exercice 18. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$.

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=\ln(2)+\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$.

b. En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 et montrer que la courbe traverse sa tangente.

Solution.

1. Le discriminant de x^2+2x+2 est $\Delta=2^2-4\times1\times2=-4<0$ donc x^2+2x+2 est du signe de $a=2>0$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel x, $x^2+2x+2>0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Pour tout réel x,

$$f(x)=\ln\left(2\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)\right)=\ln(2)+\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right).$$

b. On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln(2)+x+\frac{x^2}{2}-\frac{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3}{3}+o\left(\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3\right)\\&=\ln(2)+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\&=\ln(2)+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

3. On en déduit que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 a pour équation $y=x+\ln(2)$ et que l'écart entre la courbe et la tangente au voisinage de 0 et du signe de $-\dfrac{x^3}{6}$ donc ce signe change lorsque x change de signe ce qui signifie que la courbe traverse la tangente. (Plus précisément, la courbe est au-dessus de la tangente à gauche de 0 et en dessous à droite.)

Exercice 19. On se propose de calculer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction tangente de deux manières différentes.

1. Première méthode

Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x\longmapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$ et en déduire un $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.

2. Seconde méthode

a. Vérifier que, pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=1+\tan^2(x)$.

b. Déterminer $\mathrm{DL}_1(0)$ de tan.

c. En déduire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto 1+\tan^2(x)$.

d. En utilisant la question **2.a.**, en déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.

e. En appliquant à nouveau la même méthode, en déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan.

Solution.

1. $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}\tan(x) = \sin(x)\times\frac{1}{\cos(x)} &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\\ &= x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ &= x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

2. a. pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos(x)\times\cos(x)-\sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= 1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1+\tan^2(x).\end{aligned}$$

b. Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de tan est $tan(x) = \tan(0)+\tan'(0)x+o(x) = 0+1x+o(x) = x+o(x)$.

c. On en déduit que $1+\tan^2(x) = 1+(x+o(x))^2 = 1+x^2+o(x^2)$.

d. Par primitivation des développements limités, on en déduit que

$$\tan(x) = \tan(0)+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3) = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

e. Il s'ensuit que $1+\tan^2(x) = 1+\left(x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2 = 1+x^2+\dfrac{2x^4}{3}+o(x^4)$ et donc, en primitivant, $\tan(x) = \tan(0)+x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{3\times 5}+o(x^5)$ c'est-à-dire

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

Exercice 20. Montrer que la fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis donner un développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

Solution. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{x^2}+x\times(2x\mathrm{e}^{x^2}) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ donc, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, sa réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc elle admet un développement limité à l'ordre 5. Comme f est impaire, f^{-1} aussi donc ce DL est de la forme $f^{-1}(x) = ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$.

On va trouver a, b et c en utilisant le fait que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout réel x.

On a

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2} = x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

donc

$$\begin{aligned}
x = f^{-1}(f(x)) &= a\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2}\right) + b\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^3 + c\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^5 + o(x^5)\\
&= ax + ax^3 + \frac{ax^5}{2} + bx^3 + 3bx^5 + cx^5 + o(x^5)\\
&= ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{a}{2} + 3b + c\right)x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $a = 1$, $a + b = 0$ et $\frac{a}{2} + 3b + c = 0$ i.e. $a = 1$, $b = -1$ et $c = \frac{5}{2}$. Ainsi, $f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre n de $x \longmapsto (\mathrm{e}^x - 1)^n$, calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{n-j} j^k}{k!}$.

Solution. D'une part, $\mathrm{e}^x - 1 = x + o(x)$ donc $(\mathrm{e}^x - 1)^n = (x + o(x))^n = x^n + o(x^n)$ et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x - 1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathrm{e}^{jx}(-1)^{n-j} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(jx)^k}{k!} x^k + o(x^n)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{n-j} j^k}{k!} x^k + o(x^n)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{n-j} j^k}{k!} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in [\![0, n-1]\!] \\ 1 \text{ si } j = n \end{cases}$$