⧫ Corrigés des exercices du chapitre 6

Exercice 1. Soit $(A_i)_{\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer les évènements suivants à l'aide des évènements A_i :

1. B : « au moins un des évènements A_1, A_2, ..., A_n se réalise ».
2. C : « au moins un des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se réalise ».
3. D : « aucun des évènements A_1, A_2, ..., A_n ne se réalise ».
4. E : « aucun des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ ne se réalise ».
5. F : « A_1 est le seul des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ qui se réalise »
6. G : « un seul des évènements A_1, A_2, ..., A_n se réalise ».
7. G : « un seul des évènements de la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se réalise ».

Solution.

1. $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
2. $C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$.
3. $D = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.
4. $E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i}$.
5. $F = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}\right) = A_1 \cap \overline{\bigcup_{i=2}^{+\infty} A_i}$.
6. $G = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \overline{A_i}\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap \overline{\bigcup_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} A_i}\right)$.
7. $G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{+\infty} \overline{A_i}\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cap \overline{\bigcup_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{+\infty} A_i}\right)$.

Exercice 2. On tire successivement et avec remise des boules dans urne contenant 1 boule rouge et 9 boules blanches. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note R_i l'évènement « la i-ème boule tirée est rouge ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Traduire en langage courant les évènements suivants :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \qquad B = \bigcap_{i=1}^{n} R_i \qquad C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i \qquad D = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{R_i}$$

$$E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} R_i \qquad F = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{R_i} \qquad G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{+\infty} R_i \qquad H = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{i=k}^{+\infty} R_i$$

Solution.
A : « Parmi les n premières boules tirées, au moins une est rouge ».
B : « Les n premières boules tirées sont rouges ».
C : « Au moins une des boules tirées est rouge ».
D : « Au moins un des boules tirées est blanches ».

E : « On n'a tiré que des boules rouges ».
F : « On n'a tiré que des boules blanches ».
G : « À partir d'un certain tirage, on n'a plus tiré que des boules rouges » ou encore G : « on a tiré un nombre fini de boules blanches »
H : « on a tiré une infinité de boules rouges ».

Exercice 3. On dispose d'un jeu de 32 cartes.

1. On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir un as ? d'obtenir un pique ? d'obtenir l'as de pique ?
2. On tire simultanément 3 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as ? au moins un pique ? au moins un as et un pique ?

Solution.

1. Par équiprobabilité, la probabilité de tirer un as est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, la probabilité de tirer un pique est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et la probabilité de tirer l'as de pique est $\frac{1}{32}$.
2. L'univers est ici l'ensemble Ω des combinaisons de 3 cartes parmi les 32 donc $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30}{6} = 4\,960$. Il y a équiprobabilité des tirages donc on considère l'équiprobabilité $\mathbf{P}$ sur Ω.
   Notons A : « Obtenir au moins un as ». Alors, $\overline{A}$ est l'évènement « Ne pas obtenir d'as » c'est-à-dire les 3 cartes sont une combinaison des 28 cartes qui ne sont pas des as donc $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \binom{28}{3} = \frac{28\times27\times26}{6} = 3\,276$. Dès lors, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{3\,276}{4\,960} = \frac{819}{1\,240}$ donc $\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{819}{1\,240} = \frac{421}{1\,240}$.
   Notons B : « Obtenir au moins un pique ». De même, $\overline{B}$ est l'ensemble des combinaisons des 24 cartes qui ne sont pas des piques donc $\mathrm{Card}(\overline{B}) = \binom{24}{3} = \frac{24\times23\times22}{6} = 2\,024$. Dès lors, $\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{2\,024}{4\,960} = \frac{253}{620}$ donc $\mathbf{P}(B) = 1 - \frac{253}{620} = \frac{367}{620}$.
   Notons C : « Obtenir au moins un as et un pique ». Alors, $C = A \cap B$ donc $\overline{C} = \overline{A\cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et ainsi $\mathbf{P}(\overline{C}) = \mathbf{P}(\overline{A}) + \mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})$. Or, $\overline{A}\cap\overline{B}$ est l'évènement « N'obtenir ni un as ni un pique » ce qui revient à choisir 3 cartes parmi les 21 qui ne sont ni des as ni des piques. Ainsi, $\mathrm{Card}(\overline{A}\cap\overline{B}) = \binom{21}{3} = \frac{21\times20\times19}{6} = 1\,330$ donc $\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{1\,330}{4\,960} = \frac{133}{496}$.
   Finalement, $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{819}{1\,240} + \frac{253}{620} - \frac{133}{496} = \frac{397}{496}$ donc $P(C) = 1 - \frac{397}{496} = \frac{99}{396}$.

Exercice 4. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité p_n que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. En utilisant une série, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = +\infty$.
3. En déduire la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'évènement « la n-ième boule tirée est rouge ». Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$$p_n = \mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)\cdots\mathbf{P}(R_n \mid R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1}).$$
   Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}$ est réalisé, on a ajouté dans l'urne $2(k-1)$ boules rouges donc $\mathbf{P}(R_k \mid R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}) = \frac{2(k-1)+1}{2(k-1)+2} = \frac{2k-1}{2k}$. Ainsi, $p_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = -\ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{2n}{2n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right).$$

Or, $\ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \sim_{k\to+\infty} \frac{1}{2k}$ et la série de terme général $\frac{1}{k}$ diverge donc la série de terme général $\ln(1 + \frac{1}{2k-1})$ diverge. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{p_n}) = +\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\frac{1}{p_n}) = -\ln(p_n)$ donc $p_n = \exp(-\ln(\frac{1}{p_n}))$. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{p_n}) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(\frac{1}{p_n}) = -\infty$ et, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Exercice 5. Un joueur, disposant d'une pièce bien équilibrée, joue au jeu suivant :

1. à la première étape, il lance une fois la pièce ; s'il obtient *pile*, il gagne la partie et le jeu s'arrête et, sinon, il passe à la deuxième étape ;

2. à la deuxième étape, il lance deux fois la pièce ; s'il obtient deux fois *pile*, il gagne la partie et le jeu d'arrête et, sinon, il passe à la troisième étape ;

3. on continue ainsi, sachant qu'à la k-ème étape, la joueur lance k fois la pièce et gagne s'il obtient k fois *pile*.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : « le joueur n'a toujours pas gagné la partie à l'issue de la n-ième étape ».

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité p_n de l'évènement A_n.

2. En utilisant une série, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right)$ converge.

3. En déduire que (p_n) converge vers une limite $\ell > 0$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les inclusions suivantes : $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots A_2 \subset A_1$ donc $A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées ;

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Or, pour tout $k \geqslant 2$, si $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}$ est réalisé alors le joueur passe à la k-ième étape, lancer k fois la pièce et la probabilité qu'il gagne est $(\frac{1}{2})^k$ donc la probabilité qu'il ne gagne pas est $1 - \frac{1}{2^k}$. Dès lors,

$$p_n = \mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2-1}{2} \times \frac{2^2-1}{2^2} \times \cdots \times \frac{2^n-1}{2^n}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = \ln\left(\frac{2}{2-1} \times \frac{2^2}{2^2-1} \times \cdots \times \frac{2^n}{2^n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2^k}{2^k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k-1}\right)$$

Or, $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k-1}\right) \sim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k}$ et la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ converge (car $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$) donc la série de terme général $\ln(1 + \frac{1}{2^k-1})$ converge vers une limite a. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{p_n}) = a$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\frac{1}{p_n}) = -\ln(p_n)$ donc $p_n = \exp(-\ln(\frac{1}{p_n}))$. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{p_n}) = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(\frac{1}{p_n}) = -a$ et, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^{-a}$. Ainsi, (p_n) converge vers une limite $\ell = \mathrm{e}^{-a} > 0$.

Exercice 6. Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche la cible a gagné et le jeu s'arrête. Le joueur qui commence a la probabilité $p_1 \in]0\,;1[$ de toucher à chaque tour et le second la probabilité $p_2 \in]0\,;1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « la cible est atteinte au tour numéro n ». On suppose que tous les tirs sont indépendants.

1. Calculer $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$ et $\mathbf{P}(A_3)$.
2. On note J_1 l'évènement « le premier joueur gagne ». Exprimer J_1 en fonction des évènements A_n et en déduire la probabilité que le premier joueur gagne.
3. Calculer $\mathbf{P}(J_2)$, la probabilité que le second joueur gagne.
4. Montrer que le jeu se termine avec une probabilité égale à 1.
5. Si $p_1 = p_2$, le jeu est-il équilibré ?

Solution.

1. Par définition, $\mathbf{P}(A_1) = p_1$.
   Ensuite, pour qu'il y ait un deuxième tour, il faut que le joueur 1 ait raté la cible au premier tour donc $A_2 \subset \overline{A_1}$ et ainsi $A_2 = \overline{A_1} \cap A_2$. Par la formule des probabilités composées, on en déduit que $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(A_2 \mid \overline{A_1}) = (1-p_1)p_2$.
   De même, $A_3 \subset \overline{A_2}$ donc
   $$\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(\overline{A_2})\mathbf{P}(A_3 \mid \overline{A_2}) = (1-(1-p_1)p_2)p_1.$$
2. Le joueur 1 ne peut gagner qu'à un tour impair et à condition que la cible n'ait pas été atteinte avant. Ainsi, $J_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k}} \cap A_{2k+1}$. Il s'agit d'une union disjointe donc, par la formule des probabilités composées,
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(J_1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) \cdots \mathbf{P}(\overline{A_{2k}} \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k-1}})\mathbf{P}(A_{2k+1} \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k}}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_2)p_1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1 \\ &= p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^k \\ &= p_1 \times \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \\ &= \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}\end{aligned}$$
3. En raisonnant de même, $J_2 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k+1}} \cap A_{2k+2}$. Il s'agit d'une union disjointe donc, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(J_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) \cdots \mathbf{P}(\overline{A_{2k+1}} \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k}})\mathbf{P}(A_{2k+2} \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k+1}}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_2)(1-p_1)p_2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p_1)^{k+1}(1-p_2)^k p_2 \\
&= (1-p_1)p_2 \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^k \\
&= \frac{p_2 - p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2}
\end{aligned}$$

4. Le jeu s'arrête si J_1 ou J_2 est réalisé donc, comme ces deux évènements sont incompatibles, la probabilité que le jeu s'arrête est

$$\mathbf{P}(J_1 \cup J_2) = \mathbf{P}(J_1) + \mathbf{P}(J_2) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1p_2} + \frac{p_2 - p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2} = \frac{p_1 + p_2 - p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2} = 1.$$

5. Si $p_1 = p_2$ alors $\mathbf{P}(J_1) = \frac{p_1}{2p_1 - p_1^2} = \frac{1}{2-p_1}$ et $\mathbf{P}(J_2) = \frac{p_1 - p_1^2}{2p_1 - p_1^2} = \frac{1-p_1}{2-p_1}$ et $1 - p_1 < 1$ car $p_1 > 0$ donc le joueur a plus de chance gagner (ce qui est cohérent puisque c'est lui qui commence à tirer).

Exercice 7. Un tricheur dispose de 4 pièces : 3 pièces habituelles bien équilibrées et une pièce, truquée, possèdant deux côtés *pile*. Il prend une pièce au hasard et la lance. On note T l'évènement « la pièce est truquée » et A l'évènement « on obtient *pile* lors du lancer ».

1. **a.** Quelle est la probabilité de T ?
   b. Si la pièce est truquée, quelle la probabilité d'obtenir *pile* ?
   c. Quelle est la probabilité de choisir la pièce truquée et d'obtenir *pile* ?
   d. Quelle est la probabilité d'obtenir *pile* ?
2. Le tricheur a obtenu *pile*. Déterminer la probabilité que ce soit avec la pièce truquée.
3. Le tricheur parie qu'il va obtenir *pile*. S'il obtient pile, il gagne a euros, sinon il perd 1 euro. On note G la variable aléatoire égale à son gain algébrique.
   a. Quelle est la loi de G et quelle est son espérance ?
   b. Comment choisir a pour que le jeu reste équitable même avec la pièce truquée ?

Solution.

1. **a.** Par équiprobabilité, $\mathbf{P}(T) = \frac{1}{4}$.
   b. Comme la pièce truquée possède deux côtés *pile*, $\mathbf{P}(A \mid T) = 1$.
   c. La probabilité que le joueur choisisse la pièce truquée et d'obtenir pile est $\mathbf{P}(T \cap A) = \mathbf{P}(T)\mathbf{P}(A \mid T) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$.
   d. Les évènements T et $\overline{T}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(T)\mathbf{P}(A \mid T) + \mathbf{P}(\overline{T})\mathbf{P}(A \mid \overline{T}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

2. La probabilité qu'il ait lancé la pièce truquée sachant qu'il a obtenu *pile* est $\mathbf{P}(T \mid A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap T)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{2}{5}$.

3. **a.** Par définition, $G(\Omega) = \{-1\,;a\}$ et la loi de G est donnée par $\mathbf{P}(G = a) = \mathbf{P}(A) = \frac{5}{8}$ et $\mathbf{P}(G = -1) = \mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{3}{8}$. Dès lors, l'espérance de G est $\mathbf{E}(G) = a \times \frac{5}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} = \frac{5a-3}{8}$.

b. Le jeux est équitable sur $\mathbf{E}(G) = 0$ c'est-à-dire si $a = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Exercice 8. Dans une maison, deux pièces (une chambre A et un salon B) sont reliées entre elles de la manière suivante : A s'ouvre sur B et B s'ouvre sur l'extérieur. Une guêpe, initialement dans la pièce A, voudrait sortir à l'air libre. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, son trajet obéit aux règles suivantes :

- si elle est dans la pièce A à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, elle reste en A avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$ et, sinon, elle passe dans la pièce B ;
- si elle est dans la pièce B à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, elle retourne en A avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$, elle reste en B avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou elle sort à l'air libre avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.
- Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus dans la maison.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « la guêpe est dans la pièce A à l'instant n », B_n : « la guêpe est dans la pièce B à l'instant n », D_n : « la guêpe est dehors à l'instant n » et S_n : « la guêpe sort entre l'instant n et l'instant $n+1$ », et on note a_n, b_n, d_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. Déterminer les probabilités de a_1, b_1, s_1, a_2, b_2, s_2.

2. Sachant qu'à l'instant 2, la guêpe est en A, quelle est la probabilité qu'elle aille en B à l'instant 3 ?

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre a_{n+1}, a_n et b_n d'une part et entre b_{n+1}, a_n et b_n d'autre part.

4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $b_n = 2a_n$.

5. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

6. Déterminer la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10.

7. Déterminer les limites de (a_n) et (b_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

8. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_n$ et en déduire s_n en fonction de n.

Solution.

1. Initialement, la guêpe est dans la pièce A donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. De plus, la pièce A ne s'ouvre pas sur l'extérieur donc $s_1 = 0$.

D'après l'énoncé, et sachant qu'à l'instant 1 la guêpe est dans la pièce A, $a_2 = \dfrac{1}{3}$ et $b_2 = \dfrac{2}{3}$. De plus, comme la guêpe ne peut sortir que si elle se trouve dans la pièce B, $S_2 = B_2 \cap S_2$ donc $s_2 = \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(S_2 \mid B_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.

2. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(B_3 \mid A_2) = \dfrac{2}{3}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements A_n, B_n et D_n forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid D_n) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{4} + d_n \times 0 \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid D_n) \\ &= a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{2} + d_n \times 0 \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

4. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors, $n - 1 \geqslant 1$ donc, d'après la question précédente,

$$b_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} = 2\left(\frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}\right) = 2a_n.$$

5. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}(2a_n) = \frac{5}{6}a_n$ donc $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $a_2 = \frac{1}{3}$ et ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$. Par suite, pour tout entier $n \geqslant 2$, $b_n = 2a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n, B_n et D_n forment un système complet d'évènements donc $a_n + b_n + d_n = 1$. Dès lors, la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10 est $d_{10} = 1 - a_{10} - b_{10} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^8 - \frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^8 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8$

7. Comme $-1 < \frac{5}{6} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = 1 - (a_n + b_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 1$ donc la guêpe finit presque sûrement par sortir.

8. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors, $S_n = B_n \cap S_n$ donc $\mathbf{P}(S_n) = \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(S_n \mid B_n) = b_n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}b_n$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$.

Exercice 9. On considère un joueur de fléchettes qui, à chaque fois qu'il lance une fléchette, a une chance sur 1 000 d'atteindre le centre de la cible. On suppose que les lancers sont indépendants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n : « le joueur atteint le centre de la cible n-ième lancer ».

a. Décrire en français l'évènement $T = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} T_n$.

b. Expliquer pourquoi calculer $\mathbf{P}(T)$ à l'aide de la question précédente n'est pas simple (et on ne demande pas de la faire).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n : « le joueur atteint le centre de la cible pour la première fois au n-ième lancer ».

a. Décrire en français l'évènement $S = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} S_n$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(S_n)$.

c. En déduire $\mathbf{P}(S)$. Interpréter ce résultat.

Solution.

1. **a.** T est l'évènement « le joueur atteint au moins une fois la cible en réalisant une infinité de lancers ».

   b. Les évènements T_n ne sont pas incompatibles donc il est difficile de calculer la probabilité de leur union.

2. **a.** L'évènement S est en fait le même que l'évènement T : « le joueur atteint au moins une fois la cible en réalisant une infinité de lancers ».

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{n-1}} \cap T_n$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(S_n) = \mathbf{P}(\overline{T_1})\mathbf{P}(\overline{T_2})\cdots\mathbf{P}(\overline{T_{n-1}})\mathbf{P}(T_n) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \times \frac{1}{1000}.$$

   c. Ici, les évènements S_n sont mutuellement incompatibles donc

$$\mathbf{P}(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{999}{1000}} = \frac{1}{1000} \times 1000 = 1$$

   Ainsi, S est un évènement presque sûr, c'est-à-dire, en lançant une infinité de fois, le joueur touche au moins une fois le centre de la cible presque sûrement.

Exercice 10. Deux joueurs s'affrontent dans un jeu de dés. La règle est la suivante : un des joueurs lance deux dés cubiques bien équilibrés ; si la somme des nombres obtenus est 5, le joueur a gagne, si la somme des nombres obtenus est 7, le joueur b gagne et, dans les autres cas, on relance les dés. On continue ainsi jusqu'à ce qu'un des joueurs gagne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « le joueur a gagne lors du n-ième lancer » et B_n : « le joueur b gagne lors du n-ième lancer ». On note, de plus, A : « le joueur a gagne le jeu » et B : « le joueur b gagne le jeu ».

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n.
2. Exprimer A à l'aide des évènements A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et en déduire la probabilité de A.
3. Déterminer, de la même façon, la probabilité de B.
4. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

Solution.

1. Pour un lancer de deux dés, l'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ qui est de cardinal $6^2 = 36$. On considère sur Ω l'équiprobabilité. La somme des deux nombres vaut 5 si on a obtenu l'un des couples $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$ et $(4;1)$ donc, pour un lancer, la probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. De même, la somme des deux nombres vaut 7 si on a obtenu l'un des couples $(1;6)$, $(2;5)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(5;2)$ ou $(6;1)$ donc, pour un lancer, la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k : « à la k-ième partie, la somme est égale à 5 » et D_k : « aucun joueur ne gagne au k-ième lancer ». D'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(C_k) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{n-1} \cap D_n$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(C_2)\cdots\mathbf{P}(C_{n-1})\mathbf{P}(D_n) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9}.$$

2. On a $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et cette union est disjointe donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{1}{9} \times \frac{18}{5} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

3. Par le même raisonnement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(B_n) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{1}{6} \times \frac{18}{5} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

4. Le jeu s'arrête si A ou B gagne donc, comme A et B sont incompatibles, la probabilité que le jeu s'arrête est $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$. Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement.

Exercice 11. Un athlète tente de franchir des haies successives numérotées 1, 2, 3, ..., n, etc. L'athlète est éliminé à son premier échec. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que la probabilité que l'athlète franchisse la haie numéro n sachant qu'il a franchi les haies précédentes est $\frac{1}{n}$. On note E_n : « l'athlète est éliminé à la n-ième haie ».

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'évènement E_n est égale à $\frac{n-1}{n!}$.

2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)$. Que peut-on en déduire ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser la probabilité h_n de franchir exactement n haies. En déduire la moyenne m du nombre de haies sautées avec succès, c'est-à-dire $m = \sum_{n=1}^{+\infty} n h_n$.

Solution.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n : « l'athlète franchit la haie numéro n ». Alors, $E_n = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1} \cap \overline{S_n}$ donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_n) &= \mathbf{P}(S_1)\mathbf{P}(S_2 \mid S_1) \cdots \mathbf{P}(S_{n-1} \mid S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-2})\mathbf{P}(\overline{S_n} \mid S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1}) \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{n-1}{n!}\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} e - e + 1 = 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n) = 1$.

Comme (E_n) est une famille d'évènements 2 à 2 incompatibles, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)$ donc $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 1$. On en déduit que l'athlète fini presque sûrement par être éliminé.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dire que l'athlète franchit exactement n haies signifie qu'il est éliminé à la haie numéro $n+1$ donc $h_n = \mathbf{P}(E_{n+1}) = \dfrac{n}{(n+1)!}$. Ainsi, en utilisant la linéarité de la somme de séries et le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} m &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-1+1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-1}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = 1 + e - 2 = e - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'athlète franchit en moyenne $e - 1 \approx 1{,}7$ haies avant d'être éliminé.

Exercice 12. Deux joueurs disposent chacun d'une pièce de monnaie bien équilibrée Ils lancent simultanément leurs pièces et répètent les lancers jusqu'à ce que l'un d'eux obtienne *pile*. On suppose que les lancers sont indépendants. Si les deux obtiennent *pile* pour la première fois au même lancer, le partie est dite nulle. Sinon, le premier joueur à obtenir *pile* gagne la partie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « le premier joueur obtient *pile* pour la première fois au n-ième lancer » et B_n : « le second joueur obtient *pile* pour la première fois au n-ième lancer ».

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n, celle de B_n et celle de $A_n \cap B_n$.

2. En déduire la probabilité que la partie soit nulle.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Solution.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n : « le premier joueur obtient « pile » au n-ième lancer ». Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\overline{S_1})\mathbf{P}(\overline{S_2}) \cdots \mathbf{P}(\overline{S_{n-1}})\mathbf{P}(S_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De même, $\mathbf{P}(B_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et, par indépendance, $\mathbf{P}(A_n \cap B_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

2. Notons N : « la partie est nulle ». Alors, $N = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cap B_n$ et cette union est disjointe donc

$$\mathbf{P}(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

3. On en déduit que la probabilité qu'il y ait un gagnant est $\mathbf{P}(\overline{N}) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 13. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, dans l'urne numéro k, se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges.

1. On choisit au hasard une urne puis on tire simultanément deux boules au hasard dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

2. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

3. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Solution.

1. Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, U_k : « Choisir l'urne numéro k » et B : « Tirer deux boules blanches ». Alors, $(U_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales, la probabilité de tirer 2 boules blanches est

$$\begin{aligned}
p_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(U_k)\mathbf{P}(B \mid U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{n \times \frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} \\
&= \frac{1}{n^2(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right] \\
&= \frac{1}{n^2(n+1)} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{2n+1}{6n} - \frac{1}{2n} = \frac{2n+1-3}{6n} \\
&= \frac{2n-2}{6n}
\end{aligned}$$

soit finalement $p_n = \dfrac{n-1}{3n}$.

2. Avec les même notations, la probabilité de tirer 2 boules blanches est

$$\begin{aligned}
q_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(U_k)\mathbf{P}(B \mid U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

soit finalement $q_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

3. Lorsque n tend vers $+\infty$, $p_n \sim \dfrac{n}{3n} = \dfrac{1}{3}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{3}$ et $q_n \sim \dfrac{n \times 2n}{6n^2} = \dfrac{1}{3}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{1}{3}$

Exercice 14. On dispose d'une urne contenant une proportion $p > 0$ de boules rouges et une proportion $1-p > 0$ de boules blanches dans laquelle on fait des tirages d'une boule avec remise. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère l'évènement A_n : « au cours des n premiers tirages, on n'a jamais eu une boule rouge suivie d'une boule blanche » et on note p_n la probabilité de A_n.

1. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $p_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

2. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $p_n = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$ et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Solution.

1. Soit un entier $n \geqslant 2$. Notons, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, B_k : « les k premières boules sont blanches et les $n-k$ suivantes sont rouges ». Alors, A_n est l'union disjointe des

B_k donc $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(B_k)$. Or, par indépendance, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(B_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}$ donc $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$. Comme $2 > 1$, par croissance comparées, $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

2. Avec les mêmes notations, par indépendance, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(B_k) = (1-p)^k \times p^{n-k}$ donc

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} (1-p)^k \times p^{n-k} = p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$$

et, comme $p \neq \frac{1}{2}$, $\frac{1-p}{p} \neq 1$ donc

$$p_n = p^n \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1-p}{p}} = p^n \frac{1 - \frac{(1-p)^{n+1}}{p^{n+1}}}{\frac{p-(1-p)}{p}} = p^n \times \frac{p}{2p-1} \times \left[1 - \frac{(1-p)^{n+1}}{p^{n+1}}\right]$$

donc finalement, $p_n = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$.

Comme $0 < p < 1$ et $0 < 1-p < 1$, $\lim_{n\to+\infty} p^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Exercice 15. On lance un dé cubique équilibré jusqu'à obtenir 6 pour la première fois. Déterminer la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « obtenir 6 au n-ième lancer », B_n : « obtenir un nombre pair autre que 6 au n-ième lancer » et S_n : « le jeu s'arrête au n-ième lancer et on n'a obtenu que des nombres pairs ». Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap A_n$ donc, par indépendance, $\mathbf{P}(S_n) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2)\cdots\mathbf{P}(B_{n-1})\mathbf{P}(A_n) = \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

L'évènement dont on cherche la probabilité p est la réunion disjointe des S_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}.$$