⧫ Corrigés des exercices du chapitre 15

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer $u \cdot v$.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, u et v sont définis par $u = (\sqrt{3}, -3)$ et $v = (\sqrt{12}, 2)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, u et v sont définis par $u = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et $v = (9, -10, 12)$.

3. Dans $\mathbb{R}^4$, u et v sont définis par $u = (a+1, a, a-1, 1-2a^2)$ et $v = (a, a-1, a+1, 1)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. $u \cdot v = \sqrt{3} \times \sqrt{12} + (-3) \times 2 = \sqrt{36} - 6 = 6 - 6$ donc $\boxed{u \cdot v = 0}$.

2. $u \cdot v = \dfrac{1}{3} \times 9 + \dfrac{1}{2} \times (-10) + \dfrac{1}{4} \times 12 = 3 - 5 + 3$ donc $\boxed{u \cdot v = 1}$.

3. $u \cdot v = (a+1)a + a(a-1) + (a-1)(a+1) + (1-2a^2) \times 1 = a^2 + a + a^2 - a + a^2 - 1 + 1 - 2a^2$ donc $\boxed{u \cdot v = a^2}$.

Exercice 2. En reprenant les données de l'exercice 1, calculer dans chaque cas, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Solution.

1. $\|u\| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = \sqrt{12}$ donc $\boxed{\|u\| = 2\sqrt{3}}$

$\|v\| = \sqrt{\sqrt{12}^2 + 2^2} = \sqrt{16}$ donc $\boxed{\|v\| = 4}$.

2. $\|u\| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{61}{9 \times 16}}$ donc $\boxed{\|u\| = \frac{\sqrt{61}}{12}}$

$\|v\| = \sqrt{9^2 + (-10)^2 + 12^2} = \sqrt{325}$ donc $\boxed{\|v\| = 5\sqrt{13}}$.

3. $\|u\| = \sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2 + (1-2a^2)^2}$

$= \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 + a^2 - 2a + 1 + 1 - 4a^2 + 4a^4}$ donc $\boxed{\|u\| = \sqrt{4a^4 - a^2 + 3}}$

$\|v\| = \sqrt{a^2 + (a-1)^2 + (a+1)^2 + 1^2} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 + 1}$ et donc $\boxed{\|u\| = \sqrt{3a^2 + 3}}$.

Exercice 3. On considère deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que $\|u\| = 6$, $\|v\| = 4$ et $\|u + v\| = 8$. Déterminer $u \cdot v$.

2. On suppose que $\|u + v\| = 8$ et $\|u - v\| = 6$. Déterminer $u \cdot v$.

Solution.

1. D'après la première identité de polarisation,

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}(8^2 - 6^2 - 4^2) = \frac{1}{2}(64 - 36 - 16)$$

donc $\boxed{u \cdot v = 6}$.

2. D'après la seconde identité de polarisation,

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{2}(8^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(64 - 36)$$

donc $\boxed{u \cdot v = 7}$.

Exercice 4. Parmi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$, déterminer les couples de vecteurs orthogonaux.

$$u = (1, 0, 1, 0) \qquad v = (1, 1, -1, 1) \qquad w = (1, 1, 1, 1) \qquad z = (0, -1, 0, -1).$$

Solution.
$u \cdot v = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = 0$ donc $u \perp v$.
$u \cdot w = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 2 \neq 0$ donc u et w ne sont pas orthogonaux.
$u \cdot z = 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$ donc $u \perp z$.
$v \cdot w = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 2 \neq 0$ donc v et w ne sont pas orthogonaux.
$v \cdot z = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = -2 \neq 0$ donc v et z ne sont pas orthogonaux.
$w \cdot z = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = -2 \neq 0$ donc w et z ne sont pas orthogonaux.
Ainsi, $\boxed{\text{les couples de vecteurs orthogonaux sont } (u, v) \text{ et } (u, z)}$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (-1, 1, 0)$. On note $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale mais pas orthonormale.
2. Déterminer une famille $\mathcal{F}' = (u', v', w')$ orthonormale telle que u', v' et w' soient respectivement colinéaires à u, v et w.

Solution.

1. $u \cdot v = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$, $u \cdot w = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 0$ et $v \cdot w = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$ donc u, v et w sont deux à deux orthogonaux. De plus, $\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \neq 0$ donc u n'est pas unitaire. Ainsi, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une famille orthogonale mais pas orthonormale}}$.
2. On a vu que $\|u\| = \sqrt{6}$. De plus, $\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ et $\|w\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ donc $\boxed{\mathcal{F}' = (\frac{1}{\sqrt{6}}u, \frac{1}{\sqrt{3}}v, \frac{1}{\sqrt{2}}w) \text{ est une famille orthonormée de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1).$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $x = (1, 1, 1)$ et $y = (0, 1, 2)$ dans $\mathcal{B}$.
3. Calculer $x \cdot y$, $\|x\|$ et $\|y\|$ en utilisant les coordonnées de x et y dans la base canonique puis en utilisant leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Solution.

1. $u \cdot v = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1) = 0$

   $u \cdot w = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-1)) = 0$

   $v \cdot w = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1 \times 1 + 0 \times (-2) + 1 \times (-1)) = 0$

   De plus, $\|u\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \|(1, 1, -1)\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = 1$

   $\|v\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \|(1, 0, 1)\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$

   $\|w\| = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \|(1, -2, -1)\| = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{6} = 1$

   Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$. En particulier, $\mathcal{B}$ est libre donc, comme c'est une famille libre de 3 vecteurs en dimension 3, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On conclut donc que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3}$.

2. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, les coordonnées de x dans cette base sont $(x \cdot u, x \cdot v, x \cdot w)$. Or,

$$x \cdot u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1)) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$x \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$
$$x \cdot w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times (-1)) = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de } x \text{ dans } \mathcal{B} \text{ sont } (\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3})}$.

De même, les coordonnées de y dans cette base sont $(y \cdot u, y \cdot v, y \cdot w)$. Or,

$$y \cdot u = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1)) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$y \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$
$$y \cdot w = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times 1 + 1 \times (-2) + 2 \times (-1)) = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{6} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de } y \text{ dans } \mathcal{B} \text{ sont } (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{6}}{3})}$.

3. En utilisant les coordonnées dans la base canonique, on obtient

$x \cdot y = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3,$
$\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

En utilisant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, on obtient

$$x \cdot y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{1}{3} + 2 + \frac{4}{3} = 3,$$
$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 2 + \frac{2}{3}} = \sqrt{3}$$
$$\|u\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3}} = \sqrt{5}.$$

Ainsi, on trouve, dans les deux cas, $\boxed{u \cdot v = 3,\ \|u\| = \sqrt{3} \text{ et } \|v\| = \sqrt{5}}$.

Exercice 7. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|u\| = \|v\|$ si et seulement si $u - v$ et $u + v$ sont orthogonaux.

Solution. Comme $(u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u - v \cdot v = \|u\|^2 - \|v\|^2$, on a

$$u + v \perp u - v \iff (u + v) \cdot (u - v) = 0 \iff \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \iff \|u\|^2 = \|v\|^2 \iff \|u\| = \|v\|$$

la dernière équivalence provenant du fait que $\|u\|$ et $\|v\|$ sont des réels positifs.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\|u\| = \|v\| \text{ si et seulement si } u - v \text{ et } u + v \text{ sont orthogonaux}}$.

Exercice 8. On note $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ et D la droite engendrée par le vecteur $n = (1, 2, 3)$.

On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ est orthogonal à P si x est orthogonal à tout vecteur de P.

1. Justifier que P est un plan vectoriel et en déterminer une base (e_1, e_2).

2. Montrer que n est orthogonal à P.

3. Montrer que tout vecteur $u \in D$ est orthogonal à P.

4. Réciproquement, soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur orthogonal à P. On souhaite montrer que $u \in D$.

a. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, n)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On écrit $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma n$. Calculer $u \cdot e_1$ et $u \cdot e_2$ en fonction de α et β.

c. En déduire les valeurs de α et β puis conclure.

Solution.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y - 3z\} \\ &= \{(-2y - 3z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

donc, en posant $e_1 = (-2, 1, 0)$ et $e_2 = (-3, 0, 1)$, $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ ce qui montre que $\boxed{P \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$. De plus, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } P}$.

2. Soit $x \in P$. Alors, il existe deux réels a et b tels que $x = ae_1 + be_2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} n \cdot x &= n \cdot (ae_1 + be_2) = a(n \cdot e_1) + b(n \cdot e_2) \\ &= a(1 \times (-2) + 2 \times 1 + 3 \times 0) + b(1 \times (-3) + 2 \times 0 + 3 \times 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, n est orthogonal à tout vecteur de P donc $\boxed{n \text{ est orthogonal à } P}$.

3. Comme $D = \mathrm{Vect}(u)$, si $v \in D$ alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $v = ku$ donc, pour tout vecteur x de P, $v \cdot x = (ku) \cdot x = k(u \cdot x) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{tout vecteur de } D \text{ est orthogonal à } P}$.

4. **a.** Soit a, b et c des réels tels que $ae_1 + be_2 + cn = 0$. Alors,

$$(S) \begin{cases} -2a - 3b + c = 0 & L_1 \\ a + 2b = 0 & L_2 \\ b + 3c = 0 & L_3 \end{cases}$$

Or,

$$(S) \iff \begin{cases} a + 2b = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -2a - 3b + c = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ b + 3c = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = 0 & L_1 \\ b + c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ b + 3c = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = 0 & L_1 \\ b + c = 0 & L_2 \\ 2c = 0 & L_3 \leftarrow \end{cases}$$

Comme il y a 3 pivots, on aboutit à un système de Cramer homogène donc l'unique solution est $(0, 0, 0)$. Ainsi, $a = b = c = 0$ donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Or, c'est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

b. $u \cdot e_1 = (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma n) \cdot e_1 = \alpha \|e_1\|^2 + \beta(e_2 \cdot e_1) + \gamma(n \cdot e_1)$. Or, $\|e_1\|^2 = (-2)^2 + 1^2 + 0^2 = 5$, $e_2 \cdot e_1 = (-2) \times (-3) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 6$ et $n \cdot e_1 = 0$ car n est orthogonal à P. Ainsi, $\boxed{u \cdot e_1 = 5\alpha + 6\beta}$.

De même, $u \cdot e_2 = (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma n) \cdot e_2 = \alpha(e_1 \cdot e_2) + \beta \|e_2\|^2 + \gamma(n \cdot e_2)$. Or, $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 6$ $\|e_2\|^2 = (-3)^2 + 0^2 + 1^2 = 10$ et $n \cdot e_2 = 0$ car n est orthogonal à P. Ainsi, $\boxed{u \cdot e_2 = 6\alpha + 10\beta}$.

c. Comme u est orthogonal à P, $u \cdot e_1 = u \cdot e_2 = 0$ donc

$$\begin{cases} 5\alpha + 6\beta = 0 \\ 6\alpha + 10\beta = 0 \end{cases}$$

Or, le déterminant de ce système est $5 \times 10 - 6 \times 6 = 14 \neq 0$ donc il s'agit d'un système de Cramer homogène et, comme dans la question précédente, on conclut que $\boxed{\alpha = \beta = 0}$.

Ainsi, $u = \gamma n \in \text{Vect}(n)$ donc $\boxed{u \in D}$.

Exercice 9. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. On considère les vecteurs $e_1 = (1, 1, -2)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. a. Sans calcul, justifier que M est diagonalisable.

b. Montrer que e_1, e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de f deux à deux orthogonaux.

c. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_1$ et D la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

d. Déterminer les matrices P et D et donner une relation entre M, P et D.

2. a. En utilisant la base $\mathcal{B}_1$, construire une base orthonormale $\mathcal{B}_2$ constituée de vecteurs propres de f.

On note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$.

b. Que vaut ${}^tQQ$?

c. Que vaut ${}^tQMQ$?

Solution.

1. a. Comme M est une matrice symétrique réelle, par le théorème spectral, M est diagonalisable.

b. $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $f(e_1) = (2, 2, -4) = 2e_1$.

$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(e_2) = (2, -2, 0) = 2e_2$.

$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $f(e_3) = (-1, -1, -1) = -e_3$.

Ainsi, comme ils sont non nuls, e_1 et e_2 sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 et e_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre -1.
De plus, $e_1 \cdot e_2 = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 0 = 0$, $e_1 \cdot e_3 = 1 + 1 + (-2) \times 1 = 0$ et $e_2 \cdot e_3 = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 1 = 0$.
Ainsi, e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs propres de f deux à deux orthogonaux.

c. La famille $\mathcal{B}_1$ est orthogonale et ne contient pas de vecteurs nuls donc elle est libre. Ainsi, c'est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B}_1 \text{ est une base } \mathbb{R}^3}$.

d. On a $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M = PDP^{-1}}$.

2. a. On a $\|e_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$, $\|e_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ et $\|e_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Ainsi, en posant $\boxed{\mathcal{B}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3)}$, on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

b. Comme $\mathcal{B}_2$ est orthonormée, par théorème, $\boxed{{}^tQQ = I_3}$.

c. De même, $\boxed{{}^tQMQ = D}$.

Exercice 10. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Justifier que f est diagonalisable.
2. Démontrer que 3 est une valeur propre de f et déterminer une base orthonormée du sous-espace propre $E_3(f)$.
3. On considère les vecteurs $u = (-1, 0, 1)$ et $v = (2, 1, 0)$.
   - **a.** Vérifier que u et v sont des vecteurs propres de f.
   - **b.** Déterminer la dimension du sous-espace propre auquel u et v appartiennent.
   - **c.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v' = v + \alpha u$. Déterminer la valeur de α pour laquelle v' et u sont orthogonaux.
   - **d.** En déduire une base orthonormée de $E_{-3}(f)$.
4. Vérifier qu'en concaténant les bases obtenues pour $E_3(f)$ et $E_{-3}(f)$, on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
5. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
6. Déduire des questions précédentes une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$^tPAP = D \qquad \text{et} \qquad {}^tPP = I_3.$$

Solution.

1. Comme A est une matrice symétrique réelle, par le théorème spectral, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

2. Considérons le système :

$$(S)\begin{cases}-2x-2y+z=3x\\-2x+y-2z=3y\\x-2y-2z=3z\end{cases}\iff\begin{cases}-5x-2y+z=0 & L_1\\-2x-2y-2z=0 & L_2\\x-2y-5z=0 & L_3\end{cases}$$

Alors,

$$(S)\iff\begin{cases}x-2y-5z=0 & L_1\leftrightarrow L_3\\x+y+z=0 & L_2\leftarrow -\frac{1}{2}L_2\\-5x-2y+z=0 & L_3\leftrightarrow L_1\end{cases}\iff\begin{cases}x-2y-5z=0 & L_1\leftrightarrow L_3\\3y+6z=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\-12y-24z=0 & L_3\leftarrow L_3+5L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-2y-5z=0\\y+2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-2(-2z)-5z=0\\y=-2z\end{cases}\iff\begin{cases}x=z\\y=-2z\end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S) est $\mathrm{Vect}((1,-2,1))$ donc $\boxed{3 \text{ est un valeur propre de } f}$ et E_3 est engendré par $w=(1,-2,1)$. Or, $\|w\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$ donc on en déduit que $\boxed{(\frac{1}{\sqrt{6}}w) \text{ est une base orthonormée de } E_3(f)}$.

3. a. $A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc $f(u)=(3,0,-3)=-3u$ et $A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u)=(-6,-3,0)=-3u$. Ainsi, comme ces vecteurs sont non nuls, on en déduit que $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des vecteurs propres de } f \text{ associés à la valeur propre } -3}$.

b. Comme f possède au moins 2 valeurs propres (3 et -3), $\dim(E_3(f))\leqslant 2$. De plus, u et v ne sont pas colinéaires donc (u,v) est libre donc $\dim(E_{-3}(f)\geqslant 2$. On conclut donc que $\boxed{\dim(E_{-3}(f))=2}$.

c. $v'\cdot u=(v+\alpha u)\cdot u=v\cdot u+\alpha\|u\|^2$. Or, $v\cdot u=(-1)\times 2+0\times 1+1\times 0=-2$ et $\|u\|^2=(-1)^2+0^2+1^2=2$ donc $v'\cdot u=-2+2\alpha$ et ainsi v' est orthogonal à u si et seulement si $\alpha=1$.

d. Ainsi, u et $v'=v+u=(1,1,1)$ sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux donc (u,v') est libre.. De plus, comme u et v appartiennent à l'espace vectoriel $E_{-3}(f)$, $v'\in E_{-3}(f)$. Comme $\dim(E_{-3}(f))=2$, on en déduit que (u,v') est une base orthogonale de $E_{-3}(f)$. De plus, $\|u\|=2$ et $\|v'\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ donc $\boxed{(\frac{1}{\sqrt{2}}u,\frac{1}{\sqrt{3}}v') \text{ est une base orthonormée de } E_{-3}(f)}$.

4. Par théorème, $\mathcal{B}=(\frac{1}{\sqrt{2}}u,\frac{1}{\sqrt{3}}v',\frac{1}{\sqrt{6}}w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée, par construction, de vecteurs unitaires. De plus, $\frac{1}{\sqrt{2}}u$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}v'$ dont orthogonaux. Enfin,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}w\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}(u\cdot w)=\frac{1}{\sqrt{12}}(-1\times 1+0\times(-2)+1\times 1)=0$$

et

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}v'\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}w\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}(u'\cdot w)=\frac{1}{\sqrt{8}}(1\times 1+1\times(-2)+1)\times 1)=0$$

donc les 3 vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux et ainsi $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

5. Comme $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de f, $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$.

6. On en déduit que $\boxed{P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 0)$ et $w = (-5, 4, 1)$. De plus, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

1. Justifier que F est un plan vectoriel.

2. a. Montrer que $w \in F$.

b. Montrer que (u, w) est une base orthogonale de F.

c. En déduire une base orthonormale de F.

3. On note p la projection orthogonale sur F et on considère le vecteur $t = (2, 7, -4)$.

a. Calculer $p(t)$.

b. Déterminer la distance de t à F.

Solution.

1. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre. Ainsi, $\dim(F) = 2$ donc $\boxed{F \text{ est un plan vectoriel}}$.

2. a. On remarque que $w = u - 3v$ donc $w \in \text{Vect}(u, v)$ i.e. $\boxed{w \in F}$.

b. $u \cdot w = 1 \times (-5) + 1 \times 4 + 1 \times 1 = 0$ donc (u, w) est orthogonal. Comme elle est composée de vecteurs non nul, elle est libre. Ainsi, (u, w) est une famille libre de deux vecteurs de F donc, comme $\dim(F) = 2$, on conclut que (u, w) est une base de F. Ainsi, $\boxed{(u, w) \text{ est une base orthogonale de } F}$.

c. Comme $\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ et $\|w\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{42}$, on conclut que $\boxed{(\frac{1}{\sqrt{3}}u, \frac{1}{\sqrt{42}}w) \text{ est une base orthonormée de } F}$.

3. a. Comme $(\frac{1}{\sqrt{3}}u, \frac{1}{\sqrt{42}}w)$ est une base orthonormée de F, par théorème,

$$p(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}u \cdot t\right) \frac{1}{\sqrt{3}}u + \left(\frac{1}{\sqrt{42}}w \cdot t\right) \frac{1}{\sqrt{42}}w = \frac{1}{3}(u \cdot t)u + \frac{1}{42}(w \cdot t)w.$$

Or, $u \cdot t = 1 \times 2 + 1 \times 7 + 1 \times (-4) = 5$ et $w \cdot t = -5 \times 2 + 4 \times 7 + 1 \times (-4) = 14$ donc $p(t) = \frac{5}{3}u + \frac{14}{42}w == \frac{5}{3}u + \frac{1}{3}w$ i.e. $\boxed{p(t) = (0, 3, 2)}$.

b. La distance de t à F est

$$d(t, F) = \|t - p(t)\| = \|(2, 4, -6)\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{56}$$

soit $\boxed{d(t, F) = 2\sqrt{14}}$.

Exercice 12. On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$, $v = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $w = (3, 1)$.

1. a. Montrer que D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

b. Justifier que (v) est une base orthonormale de D.

2. Dans la suite, on note p la projection orthogonale sur D.

a. Déterminer $p(w)$.

b. Calculer la distance de w à D.

c. Représenter géométriquement D, v, w et $p(w)$.

3. **a.** Déterminer la matrice M de p dans la base canonique.

b. En utilisant M, retrouver la valeur de $p(w)$.

c. Calculer M^2 et interpréter le résultat obtenu.

Solution.

1. **a.** On remarque

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2y\} = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

donc $D = \text{Vect}((-2,1))$. Comme $(-2,1)$ est non nul, $\boxed{D \text{ est une droite vectorielle}}$.

b. Comme $v = \frac{1}{sqrt5}(-2,1)$, $v \in \text{Vect}((-2,1))$ donc $v \in D$. De plus, $\|v\| = \sqrt{(\frac{-2}{\sqrt{5}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = \sqrt{1} = 1$ donc $\boxed{(v) \text{ est une base orthonormale de } D}$.

2. **a.** Par théorème,

$$p(w) = (v \cdot w)v = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \times 3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1\right) \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$$

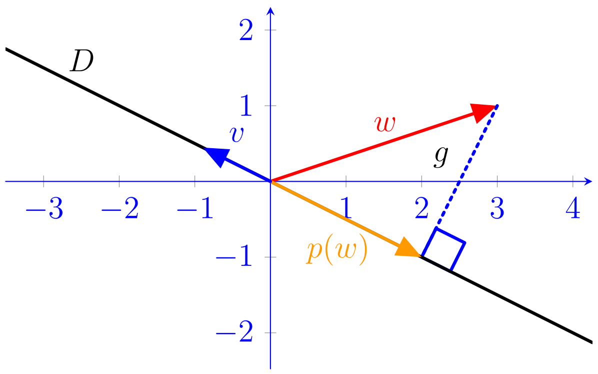
donc $\boxed{p(w) = (2,-1)}$.

b. La distance de w à D est

$$d(w,D) = \|w - p(w)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

donc $\boxed{d(w,D) = \sqrt{5}}$.

c.



3. **a.** Notons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Alors,

$$p(e_1) = (v \cdot e_1)v = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 0\right) \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

et

$$p(e_2) = (v \cdot e_2)v = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1\right) \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

donc $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $M\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{p(w) = (2,-1)}$.

5. $M^2 = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M^2 = M}$.
Comme $M^2 = M$, $p \circ p = p$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $p(x) \in D$ et un vecteur de D est son propre projeté orthogonal sur D donc $p(p(x)) = p(x)$. Ainsi, $p \circ p = p$.

Exercice 13. On considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. a. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base (u, v).

b. Déterminer une valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour laquelle $v - \alpha u$ est orthogonal à u.

c. En déduire une base orthonormée (e_1, e_2) de F.

Dans la suite, on note p la projection orthogonale sur F.

2. Déterminer la distance du vecteur $w = (1, 2, 3)$ au plan F.

3. a. Déterminer un vecteur unitaire e_3 orthogonal à F.

b. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

4. a. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Calculer P et P^{-1}.

b. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5. a. Vérifier que $p \circ p = p$.

b. Interpréter géométriquement l'égalité précédente.

Solution.

1. a. On remarque que

$$\begin{aligned} F &= \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - y\} = \{x, y, -x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

donc, en posant $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$, $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. De plus, u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre.

On conclut que $\boxed{F \text{ est le plan vectoriel de base } (u, v)}$.

b. $u \cdot (v - \alpha u) = u \cdot v - \alpha \|u\|^2 = 1 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) - \alpha(1^2 + 0^2 + (-1)^2) = 1 - 2\alpha$ donc $v - \alpha u$ est orthogonal à u si et seulement si $1 - 2\alpha = 0$ i.e. $\alpha = \frac{1}{2}$.

c. Comme u et v appartiennent à F, $v' = v - \frac{1}{2}u = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ appartient à F. Ainsi, (u, v') est une famille orthogonale de F. Comme elle est composée de vecteurs non nuls, c'est donc une base orthogonale de F.
De plus, $\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $\|v'\| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 1^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ donc $\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u \text{ et } e_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}v' \text{ forment une base orthonormée de } F}$.

2. Par théorème,

$$\begin{aligned} p(w) &= (e_1 \cdot w)e_1 + (e_2 \cdot w)e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u \cdot w)\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{2}{\sqrt{6}}(v' \cdot w)\frac{2}{\sqrt{6}}e_2 \\ &= \frac{1}{2}(1 \times 1 + 0 \times 2 + (-1) \times 3)u + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3\right)v' \\ &= -u = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

On en déduit que la distance de w à F est

$$d(w, F) = \|w - p(w)\| = \|(2, 2, 2)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$$

soit $\boxed{d(w, F) = 2\sqrt{3}}$.

3. a. Par définition, $w-p(w)$ est orthogonal à F donc $e_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(2,2,2)$ c'est-à-dire $\boxed{e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \text{ est une vecteur unitaire orthogonal à } F}$.

b. On sait que (e_1,e_2) est orthonormée. De plus, e_3 est un vecteur unitaire orthogonal à F donc à e_1 et e_2. Ainsi, (e_1,e_2,e_3) et une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, elle est donc libre et comme elle contient 3 vecteurs en dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On conclut donc que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3}$.

c. Comme e_1 et e_2 appartiennent à F, $p(e1) = e_1$ et $p(e_2) = e_2$. De plus, comme e_3 est orthogonal à e_1 et e_2,

$$p(e_3) = (e_3 \cdot e_1)e_2 + (e_3 \cdot e_2)e_2 = 0e_2 + 0e_3 = (0,0,0).$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

4. a. On a $\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, par propriété, $P^{-1} = {}^tP$

donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$.

b. Par le formule de changement de base, on en déduit que la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = P\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p)P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

soit $\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$.

5. **a.** On a clairement $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p)^2 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p)$ donc $p \circ p = p$.

b. Cela signifie découle du fait qu'un vecteur de F est son propre projeté orthogonal sur F. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, comme $p(x) \in F$, $p(p(x)) = p(x)$ donc $p \circ p = p$.

Exercice 14. On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que p est une projection orthogonale.

Pour cela, on note $E_0 = \ker(p)$ et $E_1 = \ker(p - \mathrm{Id})$.

1. Justifier que E_0 est une droite vectorielle dont on donnera une base (u).

2. Montrer que E_1 est un plan vectoriel dont on donnera une base (v, w).

3. **a.** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^3$, $p(t) \in E_1$ et que $t - p(t) \in E_0$.

b. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}^3$, $p(t) - t$ est orthogonal à tout vecteur de E_1.

c. Justifier que p est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

4. **a.** Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner la matrice D de p dans la base $\mathcal{B}$.

c. Sans calcul, déterminer M^2.

Solution.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 & L_1 \\ -2x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ x + 2y + 5z = 0 & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ 5x - 2y + z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 & L_1 \\ 6y + 12z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -12y - 24z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2(-2z) + 5z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(p) = \{(-z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 2, -1))$. Comme $u = (1, 2, -1)$ est non nul, on en déduit que $\boxed{\ker(p) \text{ est la droite vectorielle engendrée à par } u}$.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}(p-\mathrm{id})(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\iff p(x)=x\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff\begin{cases}5x-2y+z=6x & L_1\\-2x+2y+2z=6y & L_2\\x+2y+5z=6z & L_3\end{cases}\\
&\iff\begin{cases}-x-2y+z=0 & L_1\\-2x-4y+2z=0 & L_2\\x+2y-z=0 & L_3\end{cases}\\
&\iff\begin{cases}-x-2y+z=0 & L_1\\0=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\0=0 & L_3\leftrightarrow L_3+L_1\end{cases}\\
&\iff z=x+2y\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ker(p-\mathrm{Id})&=\{(x,y,x+2y)\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{x(1,0,1)+y(0,1,2)\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,2)).\end{aligned}$$

Comme les vecteurs $v=(1,0,1)$ et $w=(0,1,2)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\boxed{\ker(p-\mathrm{Id})\text{ est le plan vectoriel de base }(v,w)}$.

3. a. Soit $t=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors, $p(x)=\left(\frac{5a-2b+c}{6},\frac{-2a+2b+2c}{6},\frac{a+2b+5c}{6}\right)$ et on constate que $\frac{5a-2b+c}{6}+2\frac{-2a+2b+2c}{6}=\dfrac{a+2b+5c}{6}$ donc, comme une équation de E_1 est $z=x+2y$, on conclut que $\boxed{p(x)\in E_1}$.

De plus, $t-p(t)=\left(a-\frac{5a-2b+c}{6},b-\frac{-2a+2b+2c}{6},c-\frac{a+2b+5c}{6}\right)=\left(\frac{a+2b-c}{6},\frac{2a+4b-2c}{6},\frac{-a-2b+c}{6}\right)$ donc $t-p(t)=\frac{a+2b-c}{6}u$ donc $\boxed{t-p(t)\in E_0}$.

b. Soit $t\in\mathbb{R}^3$ et $s\in E_1$. Alors, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $s=av+bw$ et, comme $p(t)-t\in E_0$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $p(t)-t=\lambda u$. Dès lors,

$$(t-p(t))\cdot s=(\lambda u)\cdot(av+bw)=(\lambda a)(u\cdot v)+(\lambda b)(u\cdot w).$$

Or, $u\cdot v=1\times1+2\times0+(-1)\times1=0$ et $u\cdot w=1\times0+2\times1+(-1)\times2=0$ donc $(t-p(t))\cdot s=0$. Ainsi, $\boxed{t-p(t)\text{ est orthogonal à tout vecteur de }E_1}$.

c. On a montré que p est un endomorphisme tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}^3$, $p(t)\in E_1$ et $p(t)-t$ est orthogonal à tout vecteur de E_1.

On conclut donc que $\boxed{p\text{ est la projection orthogonale sur }E_1}$.

4. a. Soit a, b et c des réels tels que $au+bv+cw=0_{\mathbb{R}_3}$. Alors, $0=(au+bv+cw)\cdot u=a\|u\|^2+b(v\cdot u)+c(w\cdot u)=a\|u\|^2$ car u est orthogonal à v et à w. De plus, u n'est pas nul donc $\|u\|\neq0$. Ainsi, $a=0$. Par suite, $bv+cw=0_{\mathbb{R}_3}$ mais on a vu que (v,w) est une base de E_1 donc (v,w) est libre et ainsi $b=c=0$. On conclut donc que (u,v,w) est libre donc $\mathcal{B}$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B}\text{ est une base de }\mathbb{R}^3}$.

b. $p(u) = \frac{1}{6}(5-4-1, -2+4-2, 1+4-5) = (0,0,0)$ et, comme v et w appartiennent à E_1, $p(v) = v$ et $p(w) = w$. Ainsi, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

c. Il est clair que $D^2 = D$ donc $p \circ p = p$ et donc $\boxed{M^2 = M}$.

Exercice 15. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(u \cdot v)^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2 .$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = \|xu + v\|^2$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 \|u\|^2 + 2x(u \cdot v) + \|v\|^2$.

b. On suppose que $u \neq 0$. À quelle famille de fonctions appartient la fonction est P ?

c. Justifier que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d. Calculer le discriminant de P et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

e. L'inégalité reste-t-elle vraie si $u = 0$?

2. Première application. On considère des réels x_1, x_2, ..., x_n. Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $v = (1, 1, ..., 1)$?

3. Deuxième application. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

4. Troisième application. On considère des réels strictement positifs x_1, x_2, ..., x_n. Démontrer que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$.

Solution.

1. a. Pour tout réel x,

$$P(x) = \|xu + v\|^2 = \|xu\|^2 + 2(xu \cdot v) + \|v\|^2$$

donc, par homogénéité de la norme et bilinéarité du produit scalaire,

$$P(x) = \|xu + v\|^2 = (|x| \|u\|)^2 + 2x(u \cdot v) + \|v\|^2 = |x|^2 \|u\|^2 + 2x(u \cdot v) + \|v\|^2$$

et, comme $|x|^2 = x^2$, on conclut que $\boxed{P(x) = x^2 \|u\|^2 + 2x(u \cdot v) + \|v\|^2}$.

b. Si $u \neq 0$ alors $\|u\| \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est une fonction polynôme du second degré}}$.

c. Comme le carré d'un réel est positif, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ P(x) = \|xu + v\|^2 \geqslant 0}$.

d. Le discriminant de P est $\Delta = (2(u \cdot v))^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 = 4((u \cdot v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2)$. Or, comme P est de signe constant, $\Delta \leqslant 0$ donc $4((u \cdot v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2) \leqslant 0$ et, comme $4 > 0$, on en déduit que $(u \cdot v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leqslant 0$ i.e. $\boxed{(u \cdot v)^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2}$.

e. Si $u = 0$ alors $u \cdot v = 0$ et $\|u\| = 0$ donc $\boxed{\text{l'inégalité est encore vraie}}$.

2. Pour $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $v = (1, 1, ..., 1)$, on a $u \cdot v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \times 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\|u\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1^2 = n$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

3. Pour $u = (1, 2, ..., n)$ et $v = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{n})$, on a $u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$, $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}$$

donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, sachant que $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \geqslant 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}} = \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{\sqrt{12}}$$

soit finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}}.$$

4. Pour $u = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}})$, on a $u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \dfrac{1}{\sqrt{x_k}} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\boxed{n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)}.$$