# ♦ Corrigés des exercices du chapitre 14

**Exercice 1.** Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages successifs avec remise et on note $X$ (resp. $Y$) le numéro de la première (resp. de la seconde) boule tirée. On note également $M = \max(X, Y)$ le plus grand des deux numéros.

**1.** Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?

**2.** Déterminer la loi du couple $(X, M)$. On présentera le résultats dans un tableau.

**3.** En déduire la loi de $M$.

**Solution.**

**1.** Les variables $X$ et $Y$ suivent des lois uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$.

**2.** Commençons par remarquer que $X(\Omega) = M(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
Comme il y a remise, les tirages sont indépendants donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
Soit $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$.
Par définition, $M \geqslant X$ donc, si $i > j$, $\{X = i\} \cap \{M = j\} = 0$.
Si $i = j$ alors $\{X = i\} \cap \{M = j\} = \{X = i\} \cap \{Y \leqslant i\}$ donc $\mathbf{P}(X = i, M = j) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{i}{4}$ car $\{Y \leqslant i\}$ est l'union disjointe des $i$ évènements $\{Y \leqslant k\}$ pour $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$.
Enfin, si $i < j$ alors $\{X = i\} \cap \{M = j\} = \{X = i\} \cap \{Y = j\}$ donc $\mathbf{P}(X = i, M = j) = \dfrac{1}{16}$.
Ainsi, on obtient le tableau suivant :

| $M$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Loi de $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{16}$ |
| 3 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | 0 | $\frac{5}{16}$ |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{16}$ |
| Loi de $X$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

**3.** En complétant les marges du tableau, on en déduit la loi de $M$ :

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(M = k)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{7}{16}$ |

**Exercice 2.** Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne. On considère les deux variables aléatoires $X$ et $Y$ qui, à chaque tirage, font correspondre respectivement le plus petit et le plus grand des deux numéros obtenus.

**1.** Déterminer la loi du couple $(X, Y)$. On présentera les résultats dans un tableau.

**2.** En déduire les lois de probabilité de $X$ et de $Y$.

**Solution.**

**1.** Commençons par remarquer que $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 2, 4 \rrbracket$.
Par définition, le nombre de tirage possibles est $\dbinom{4}{2} = 6$ et tous les tirages sont équiprobables donc on obtient le tableau suivant :

| $Y$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 | Loi de $Y$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 4 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Loi de $X$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

**2.** En complétant les marges du tableau, on en déduit les lois de $X$ :

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

et de $Y$ :

| $j$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P(Y=j)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

**Exercice 3.** On considère $n$ boîtes numérotées de 1 à $n$. La boîte $k$ contient $k$ boules numérotées de 1 à $k$. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note $X$ le numéro de la boîte et $Y$ le numéro de la boule.

**1.** Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.

**2.** Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$. On exprimera le résultat à l'aide d'une somme.

**Solution.**

**1.** Commençons par remarquer que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
Si $X = i$ alors le tirage a lieu dans la boîte $i$ et l'ensemble des valeurs possibles pour $Y$ est alors $[\![1, i]\!]$.
Ainsi, si $j > i$, $\{X = i\} \cap \{Y = i\} = \varnothing$ donc $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = 0$. De plus, par équiprobabilité, si $j \leqslant i$ alors

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(X = i \mid Y = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{ni}.$$

Ainsi, la loi de $(X, Y)$ est donnée par :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{ni} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

**2.** On peut l'écrire l'évènement $\{X = Y\}$ comme l'union disjointe des évènements $\{X = k\} \cap \{Y = k\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ donc

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{X = k\} \cap \{Y = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(X = Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0\,;1[$ et $q \in ]0\,;1[$. On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi $\mathscr{B}(n,p)$ et une variable aléatoire $Y$ à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X=k\}$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(k,q)$.

Déterminer la loi de $Y$.

**Solution.** Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y=j \mid X=k) = \begin{cases} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j} & \text{si } j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Comme la famille $(\{X=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(Y=j) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=j \mid X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbf{P}(Y=j \mid X=k)$$

et, comme $\mathbf{P}(Y=j \mid X=k) = 0$ si $j > k$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y=j) &= \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbf{P}(Y=j \mid X=k) \\ &= \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}. \end{aligned}$$

Par le changement d'indice $i = k-j$ (i.e. $k = i+j$), on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n}{i+j} p^{i+j} (1-p)^{n-(i+j)} \binom{i+j}{j} q^j (1-q)^i \\ &= p^j (1-p)^{n-j} q^j \sum_{i=0}^{n-j} \frac{n!}{(i+j)!(n-(i+j))!} \times \frac{(i+j)!}{j!i!} p^i (1-p)^{-i} (1-q)^i \\ &= (pq)^j (1-p)^{n-j} \frac{n!}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{(n-j-i)!i!} \left(\frac{p(1-q)}{1-p}\right)^i \\ &= (pq)^j (1-p)^{n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{(n-j-i)!i!} \left(\frac{p(1-q)}{1-p}\right)^i \times 1^{n-j-i} \\ &= (pq)^j (1-p)^{n-j} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} \left(\frac{p(1-q)}{1-p}\right)^i \times 1^{n-j-i} \end{aligned}$$

donc, en reconnaissant le développement d'un binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y=j) &= (pq)^j (1-p)^{n-j} \binom{n}{j} \left(\frac{p(1-q)}{1-p} + 1\right)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j} (pq)^j \left[(1-p)\left(\frac{p(1-q)}{1-p} + 1\right)\right]^{n-j} \\ &= \binom{n}{j} (pq)^j \left(p(1-q) + 1 - p\right)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j} (pq)^j \left(1-pq\right)^{n-j} \end{aligned}$$

On conclut donc que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,pq)}$.

**Exercice 5.** Soit $m$ et $n$ deux entiers strictement positifs et $p \in ]0\,;1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Déterminer, pour tout $k \in [\![0, n+m]\!]$, la loi conditionnelle de $X$ sachant $\{X+Y=k\}$

**Solution.** Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$. Alors, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(X=i \mid X+Y=k) = \frac{\mathbf{P}(X=i, X+Y=k)}{\mathbf{P}(X+Y=k)} = \frac{\mathbf{P}(X=i, Y=k-i)}{\mathbf{P}(X+Y=k)} = \frac{\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=k-i)}{\mathbf{P}(X+Y=k)}$$

Si $i > k$ alors $\{Y = k-i\} = \varnothing$ donc $\mathbf{P}(X=i \mid X+Y=k) = 0$.

Supposons $i \leqslant k$. Alors, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, par propriété, $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m, p)$ donc

$$\mathbf{P}(X=i \mid X+Y=k) = \frac{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}}{\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}p^k(1-p)^{m-k}}{\binom{n+m}{k}p^k(1-k)^{n+m-k}}.$$

donc

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n+m]\!], \quad \mathbf{P}(X=i \mid X+Y=k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}} & \text{si } i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Remarque. Cette loi est une loi usuelle (qui n'est pas au programme) connue sous le nom de loi hypergéométrique.

**Exercice 6.** On répète un lancer de pièce donnant « face » avec la probabilité $p \in ]0\,;1[$ de manière indépendante. On note $X$ le rang d'apparition du premier « face » obtenu et $Y$ le rang du deuxième « face ».

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Quelle est la loi de $X$ ?
3. Calculer $\mathbf{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$ pour tout $i$ et pour tout $j$ vérifiant $i \geqslant j$.
4. Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.
5. Pour tout $j > i$ entiers naturels non nuls, déterminer $\mathbf{P}(X=i, Y=j)$.
6. En déduire la loi de $Y$.
7. Montrer l'existence et calculer l'espérance de $Y$.

**Solution.**

1. Le rang d'apparition du premier « face » peut être n'importe quel entier non nul donc $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ et le rang d'apparition du deuxième « face » peut être n'importe quel entier au moins égal à 2 donc $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.
2. Si on prend comme succès l'obtention de « face », la loi de $X$ est la loi d'apparition du premier succès donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)}$.
3. Par définition, le second « face » arrive après le premier « face » donc si $i \geqslant j$ alors $\{X=i\} \cap \{Y=j\} = \varnothing$ donc $\mathbf{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = 0$.
4. On en déduit en particulier que $\mathbf{P}(X=3, Y=2) = 0$. Or, $\mathbf{P}(X=3) = p(1-p)^2$ et $\{Y=2\}$ est réalisé si et seulement si les deux premiers lancers donnent « face » donc $\mathbf{P}(Y=2) = p^2$. On en déduit $\mathbf{P}(X=3)\mathbf{P}(Y=2) = p^3(1-p)^2 \neq 0$ donc $\mathbf{P}(X=3)\mathbf{P}(Y=2) \neq \mathbf{P}(X=3, Y=2)$.

   On conclut donc que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

**5.** Soit $i$ et $j$ deux entiers non nuls tels que $j > i$. Alors,

$$\mathbf{P}_{(X=i)}(Y=j) = \frac{\mathbf{P}(X=i, Y=j)}{\mathbf{P}(X=i)} = \frac{\mathbf{P}(X=i, Y=j)}{p(1-p)^{i-1}}.$$

Or, si on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k$ : « obtenir « face » au $k$-lancer », alors

$$\{X=i, Y=j\} = \overline{A_1} \cap \cdots \overline{A_{i-1}} \cap A_i \cap \overline{A_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}} \cap A_j$$

donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(X=i, Y=j) = (1-p)^{i-1} \times p \times (1-p)^{j-i-1} \times p$$

i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(X=i, Y=j) = p^2(1-p)^{j-2}}.$$

**6.** Comme $(\{X=i\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, par le formule de probabilités totales, pour tout entier $j \geqslant 2$,

$$\mathbf{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}(X=i, Y=j-1) + \underbrace{\sum_{i=j}^{+\infty} \mathbf{P}(X=i, Y=j)}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2}$$

donc

$$\boxed{\forall j \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(Y=j) = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}}.$$

**7.** On considère la série $\sum\limits_{j\geqslant 2} j\mathbf{P}(Y=j) = p^2 \sum\limits_{j\geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2}$. On reconnaît un série géométrique dérivée seconde donc, comme $0 < 1-p < 1$, cette série converge est

$$p^2 \sum_{j\geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2} = p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = p^2 \times \frac{2}{p^3}$$

donc $Y$ admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{2}{p}}$.

**Exercice 7.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels positifs. On pose $S = X + Y$.

**1.** Calculer $\mathbf{E}(S)$.

**2. a.** Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)$ (on distinguera les cas $i \leqslant k$ et $i > k$).

**b.** En déduire la loi de $S$.

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $\{S=n\}$.

**Solution.**

**1.** Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(S) = \lambda + \mu}$.

**2. a.** Si $X = i$ et $i > k$ alors, comme $Y$ est à valeurs positives, $S = X + Y > k$. Ainsi, si $i > k$, $\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k) = 0$.
Supposons à présent que $i \leqslant k$. Alors,

$$\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k) = \frac{\mathbf{P}(X=i, S=k)}{\mathbf{P}(X=i)} = \frac{\mathbf{P}(X=i, X+Y=k)}{\mathbf{P}(X=i)} = \frac{\mathbf{P}(X=i, Y=k-i)}{\mathbf{P}(X=i)}$$

et, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)=\frac{\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=k-i)}{\mathbf{P}(X=i)}=\mathbf{P}(Y=k-i).$$

On conclut que

$$\boxed{\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)=\begin{cases}\dfrac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\mu} & \text{si } i\leqslant k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}.$$

**b.** Comme $(X=i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilité totales, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S=k)&=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)\\ &=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)+\underbrace{\sum_{i=k+1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{(X=i)}(S=k)}_{=0}\\ &=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\times\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\mu}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{-\mu}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{-\mu}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}\end{aligned}$$

donc, en reconnaissant le développement d'un binôme de Newton,

$$\mathbf{P}(S=k)=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}$$

donc $\boxed{S\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda+\mu)}$.

**3.** Soit $i\vec{n}\mathbb{N}$. Alors, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(S=n)}(X=i)&=\frac{\mathbf{P}(S=n,X=i)}{\mathbf{P}(X=i)}=\frac{\mathbf{P}(X+Y=n,X=i)}{\mathbf{P}(X=i)}\\ &=\frac{\mathbf{P}(Y=n-i,X=i)}{\mathbf{P}(X=i)}=\frac{\mathbf{P}(Y=n-i)\mathbf{P}(X=i)}{\mathbf{P}(X=i)}\\ &=\mathbf{P}(Y=n-i)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall i\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}_{(S=n)}(X=i)=\begin{cases}\dfrac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}\mathrm{e}^{-\mu} & \text{si } i\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}.$$

**Exercice 8.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple $(X,Y)$ est donnée par :

$$\forall\,(i\,;j)\in\mathbb{N}^2,\quad \mathbf{P}(X=i,Y=j)=\frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

**1.** Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.

**2.** **a.** Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

**b.** Déterminer l'espérance et la variance de $Y$.

**3.** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**4.** Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

**Solution.**

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme $(Y=j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X=n)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n,Y=j)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{e2^{n+1}j!}=\frac{1}{e2^{n+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X=n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}}$.

De même, comme $(X=i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(Y=n)=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=i,Y=n)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{e2^{i+1}n!}=\frac{1}{en!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+1}}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(Y=n)=\dfrac{1}{en!}}$.

**2.** **a.** On a $(1+X)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(1+X=n)=\mathbf{P}(X=n-1)=\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{1}{2}$$

donc $\boxed{1+X \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \tfrac{1}{2}}$.

On en déduit que $\mathbf{E}(1+X)=2$ et $\mathbf{V}(1+X)=2$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(1+X-1)=\mathbf{E}(1+X)-\mathbf{E}(1)=2-1$ donc $\boxed{E(X)=1}$.

De plus, $\mathbf{V}(1+X)=\mathbf{V}(X)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X)=2}$.

**b.** On remarque que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y=n)=\dfrac{1^n}{n!}\mathrm{e}^{-1}$ donc $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 1 donc $\boxed{\mathbf{E}(X)=\mathbf{V}(X)=1}$.

**3.** Pour tous entiers $i$ et $j$, $\mathbf{P}(X=i,Y=j)=\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=j)$ donc les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

**4.** Comme $(Y=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=Y)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=Y\mid Y=n)\mathbf{P}(Y=n)\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n\mid Y=n)\mathbf{P}(Y=n)\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n)\mathbf{P}(Y=n)\quad(\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes})\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{e2^{n+1}n!}\\
&=\frac{1}{2e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n!}=\frac{1}{2e}\times e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X = Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}}$.

**Exercice 9.** On lance un dé à six faces bien équilibré. On note $X$ le résultat obtenu. Ensuite, on choisit au hasard un nombre entre 1 et $X$ que l'on appelle $Y$.

**1.** Déterminer la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

**2.** Donner la loi de $Y$.

**3.** Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

**4.** Donner la loi de $X$ sachant $\{Y = 2\}$.

**5.** $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Solution.**

**1.** On a $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. De plus, pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$,

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j)$$

Or, $\mathbf{P}(X = i) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j) = 0$ si $j > i$ et $\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j) = \dfrac{1}{i}$ si $j \leqslant i$.

On conclut que la loi conjointe de $(X, Y)$ est donnée par

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{6i} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

**2.** Comme $(X = i)_{i \in [\![1,6]\!]}$ est un système complet d'évènements, on déduit de la formule de probabilités totales que, pour tout $j \in [\![1, 6]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^{6} \frac{1}{6i}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(Y = j) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{i=j}^{6} \dfrac{1}{i}}$.

**3.** L'évènement $(X = Y)$ peut s'écrire comme la réunion disjointe $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{6} (X = i, Y = i)$ donc

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6i} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X = Y) = \dfrac{49}{120}}$.

**4.** La loi de $X$ sachant $\{Y = 2\}$ est donnée par :

$$\forall i \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbf{P}_{(Y=2)}(X = i) = \frac{\mathbf{P}(X = i, Y = 2)}{\mathbf{P}(Y = 2)}$$

Or, $\mathbf{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{i=2}^{6} \dfrac{1}{i} = \dfrac{29}{120}$, $\mathbf{P}(X = 1, Y = 2) = 0$ et $\mathbf{P}(X = i, Y = 2) = \dfrac{1}{6i}$ si $i \geqslant 2$.

On conclut que la loi de $X$ sachant $\{Y = 2\}$ est donné par :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbf{P}_{(Y=2)}(X = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{20}{29i} & \text{sinon} \end{cases}}.$$

5. Comme $Y \leqslant Y$, $\mathbf{P}(X=1, Y=6)=0$. Or, $\mathbf{P}(X=1)=\dfrac{1}{6}$ et $\mathbf{P}(Y=6)=\dfrac{1}{36}$ donc

$$\mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{216}\neq\mathbf{P}(X=1,Y=6)$$

et on conclut que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

**Exercice 10.** On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-contre.

1. Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$.
2. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes.
3. Déterminer la loi conjointe de deux variables aléatoires indépendantes $(U,V)$ ayant les mêmes lois marginales que $(X,Y)$.

| $Y$ \ $X$ | $-1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $-2$ | 0,1 | 0,5 |
| $1$ | 0,3 | 0,1 |

**Solution.**

1. On peut compléter le tableau avec les marges pour avoir les lois de $X$ et de $Y$.

| $Y$ \ $X$ | $-1$ | $2$ | loi de $Y$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | 0,1 | 0,5 | 0,6 |
| $1$ | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| loi de $X$ | 0,4 | 0,6 | 1 |

D'après la forme de König-Huygens, $\mathbf{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Or,

- $\mathbf{E}(X)=(-1)\times 0{,}4+2\times 0{,}6=0{,}8$ ;
- $\mathbf{E}(Y)=(-2)\times 0{,}6+1\times 0{,}4=-0{,}8$ ;
- Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(XY)=(-1)\times(-2)\times 0,1+(-1)\times 1\times 0,3+2\times(-2)\times 0{,}5+2\times 1\times 0,1=-1{,}9$$

donc $\mathbf{Cov}(X,Y)=-1{,}9+0{,}8^2=-1{,}9+0{,}64$ soit $\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y)=-1{,}26}$.

2. Étant donné que $\mathbf{Cov}(X,Y)\neq 0$, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.
3. Si $U$ et $V$ ont les mêmes lois que $X$ et $Y$ et si elles sont indépendantes alors la loi du couple (U,V) s'obtient en faisant les produits des lois marginales, ce qu'on peut présenter dans le tableau suivant :

| $V$ \ $U$ | $-1$ | $2$ | loi de $V$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | 0,24 | 0,36 | 0,6 |
| $1$ | 0,16 | 0,24 | 0,4 |
| loi de $U$ | 0,4 | 0,6 | 1 |

**Exercice 11.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère 2 urnes contenant chacune $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une boule dans chaque urne. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ représentent les 2 numéros tirés.

1. Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?
2. Déterminer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
3. Déterminer $\mathbf{V}(X + Y)$.

**Solution.**

1. Les variables $X$ et $Y$ suivent des lois uniformes $\boxed{\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)}$.
2. Les deux tirages sont indépendants donc les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes. Par suite, $\boxed{\mathbf{Cov}(X, Y) = 0}$.
3. Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$. Or, comme $X$ et $Y$ suivent des lois $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$. Ainsi, $\boxed{\mathbf{V}(X + Y) = \dfrac{n^2 - 1}{6}}$.

**Exercice 12.** On considère deux pièces qui ont une probabilité $\dfrac{1}{3}$ de tomber sur « pile » à chaque lancer. On lance d'abord la première pièce jusqu'à obtenir « pile » et on note $X$ le nombre de lancers effectués. On fait ensuite de même avec la deuxième pièce et on note Y le nombre de lancers effectués lors de cette deuxième étape.

1. Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?
2. En moyenne, combien de lancer effectue-t-on en tout ?
3. On pose $W = \min(X, Y)$.
   a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $\{W > k\}$ à l'aide de $X$ et $Y$.
   b. En déduire $\mathbf{P}(W > k)$, puis montrer que $W$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
4. On pose $Z = \max(X, Y)$.
   a. À quoi est égal $W + Z$ ? En déduire $\mathbf{E}(Z)$.
   b. Exprimer $WZ$ en fonction de $X$ et $Y$, et en déduire $\mathbf{Cov}(W, Z)$.
   c. À l'aide des questions précédentes, déterminer la variance de $Z$.

**Solution.**

1. Les variables $X$ et $Y$ représentent le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli infini en prenant comme succès « Obtenir « pile » ». On en déduit que les variables $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent une loi géométrique } \mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$.
2. Le nombre total de lancers effectués est $X + Y$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = 2 \times \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 6$. Ainsi, $\boxed{\text{le nombre moyen de lancers effectués est } 6}$.
3. a. l'évènement $W > k$ est réalisé si et seulement si $X$ et $Y$ prennent des valeurs strictement supérieures à $k$ donc $\boxed{\{W > k\} = \{X > k\} \cap \{Y > k\}}$.
   b. Comme les lancers sont indépendantes, les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes et ainsi, comme elles ont de plus même loi,
$$\mathbf{P}(W > k) = \mathbf{P}(X > k)\mathbf{P}(Y > k) = \mathbf{P}(X > k)^2.$$

Or,

$$\mathbf{P}(X>k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\underset{j=i-k-1}{=}\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+k}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}$$

et, comme $0<\dfrac{2}{3}<1$,

$$\mathbf{P}(X>k)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{\mathbf{P}(W>k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}}$.
Notons $F$ la fonction de répartition de $W$. On a donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$F(W)=\mathbf{P}(W\leqslant k)=1-\mathrm{P}(W>k)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}.$$

Par suite, pour tout $k\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(W=k)=F(k)-F(k-1)&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}-\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2(k-1)}\right]\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]\\&=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{k-1}\times\frac{5}{9}=\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\times\frac{5}{9}\\&=\frac{5}{9}\left(1-\frac{5}{9}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

donc $\boxed{W\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{5}{9}\right)}$.

**4. a.** L'une des deux variables $W$ ou $Z$ est égal à $X$ et l'autre à $Y$ donc $\boxed{W+Z=X+Y}$. On en déduit que $Z=X+Y-W$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Z)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)-\mathbf{E}(Z)=2\times\frac{1}{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\frac{5}{9}}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Z)=\frac{21}{5}}$.

**b.** Comme précédemment, $WZ=XY$ On en déduit que $\mathbf{E}(ZW)=\mathbf{E}(XY)$. Or, $X$ et $Y$ sont indépendantes donc $\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)=6^2=36$. Par la formule de König-Huygens, on en déduit que $\mathbf{Cov}(W,Z)=\mathbf{E}(WZ)-\mathbf{E}(W)\mathbf{E}(Z)=36-\frac{9}{5}\times\frac{21}{5}$ soit $\mathbf{Cov}(W,Z)=\frac{711}{25}$.

**c.** Par propriété $\mathbf{V}(W+Z)=\mathbf{V}(W)+\mathbf{V}(Z)-2\mathbf{Cov}(W,Z)$. Or, $\mathbf{V}(W+Z)=\mathbf{V}(X+Y)$ donc, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, $\mathbf{V}(W+Z)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)=2\times\frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=12$.

On en déduit que $\mathbf{V}(Z)=12-\mathbf{V}(W)+2\mathbf{Cov}(W,Z)=12-\frac{1-\frac{5}{9}}{\left(\frac{5}{9}\right)^2}+2\times\frac{711}{25}$ soit

$\boxed{\mathbf{V}(Z)=\frac{1686}{25}}$.

**Exercice 13.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., $n$ boules numérotées $n$.

**1.** On tire une boule de cette urne et on note $X$ le numéro obtenu.
Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance.

**2.** On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note $T_1$ le numéro de la première boule obtenue et $T_2$ le numéro de la deuxième boule obtenue.

**a.** Déterminer la loi du couple $(T_1, T_2)$.

**b.** En déduire la loi des variables $T_1$ et $T_2$.

**c.** Les variables $T_1$ et $T_2$ sont-elles indépendantes ?

**d.** Déterminer $\mathbf{E}(T_1 + T_2)$.

**Solution.**

**1.** L'urne contient au total $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ boules. Par définition, $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'urne contient $i$ boules portant le numéro $i$ donc, par équiprobabilité, $P(X = i) = \frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(X = i) = \frac{2i}{n(n+1)}}.$$

L'espérance de $X$ est

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}}$.

**2. a.** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$. Si $i \neq j$ alors $\mathbf{P}_{(T_1=i)}(T_2 = j) = \dfrac{j}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \dfrac{2j}{n(n+1) - 2}$ et, si $i = j$ alors $\mathbf{P}_{(T_1=i)}(T_2 = j) = \dfrac{j-1}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{2(j-1)}{n(n+1)-2}$. On en déduit que, si $i \neq j$,

$$\mathbf{P}(T_1 = i, T_2 = j) = \frac{2i}{n(n+1)} \times \frac{2j}{n(n+1) - 2} = \frac{4ij}{n(n+1)[n(n+1) - 2]}$$

et

$$\mathbf{P}(T_1 = i, T_2 = i) = \frac{2i}{n(n+1)} \times \frac{2(i-1)}{n(n+1) - 2} = \frac{4i(i-1)}{n(n+1)[n(n+1) - 2]}$$

Ainsi, en posant $D = n(n+1)[n(n+1) - 2]$, la loi de $(T_1, T_2)$ est donnée par :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \mathbf{P}(T_1 = i, T_2 = j) = \begin{cases} \dfrac{4ij}{D} & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{4i(i-1)}{D} & \text{si } i = j \end{cases}}.$$

**b.** La loi de $T_1$ est la même que la loi de $X$ dans la question **1.** donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(T_1 = i) = \frac{2i}{n(n+1)}}.$$

Comme $(\{T_1 = i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totale, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_2 = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(T_1 = i, T_2 = j) \\
&= \frac{4j(j-1)}{D} + \sum_{i=1}^{n} \frac{4ij}{D} - \frac{4j^2}{D} \\
&= \frac{4}{D}\left(j(j-1) + j\sum_{i=1}^{n} i - j^2\right) \\
&= \frac{4}{D}\left(j^2 - j + j \times \frac{n(n+1)}{2} - j^2\right) \\
&= \frac{4j}{D}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&= \frac{4j}{D} \times \frac{D}{2} \\
&= \frac{2j}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{T_2 \text{ suit la même loi que } T_1}$.

**c.** On a $\mathbf{P}(T_1 = 1, T_2 = 1) = 0$ alors que $\mathbf{P}(T_1 = 1)\mathbf{P}(T_2 = 1) = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2} \neq 0$ donc $\boxed{T_1 \text{ et } T_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

**d.** Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(T_1 + T_2) = \mathbf{E}(T_1) + \mathbf{E}(T_2)$ et, comme $T_1$ et $T_2$ suivent la même loi que $X$, on conclut que $\boxed{\mathbf{E}(T_1 + T_2) = \dfrac{4n+2}{3}}$.

**Exercice 14.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli.

Montrer que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ si et seulement si $X$ et $Y$ sont indépendantes.

**Solution.** Pour tout couple $(X, Y)$, on sait que si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

• Alors, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$. Rappelons que, comme $X$ et $Y$ suivent des lois de Bernoulli, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(X = 1)$ et $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{P}(Y = 1)$. Ainsi $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)$.

Comme $X$ et $Y$ ne prennent que les valeurs 0 ou 1, il en est de même de $XY$ i.e. $XY$ suit une loi de Bernoulli. De plus, $XY = 1$ si et seulement si $X = 1$ et $Y = 1$ donc le paramètre de $XY$ est $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$. On en déduit que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$. Dès lors, comme $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)$, $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)$.

• Comme $(Y = 0)$ et $(Y = 1)$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) &= \mathbf{P}(X = 1) - \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbf{P}(X = 1) - \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1) \\
&= \mathbf{P}(X = 1)\left[1 - \mathbf{P}(Y = 1)\right] \\
&= \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 0)
\end{aligned}$$

• De même, comme $(X = 0)$ et $(X = 1)$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(Y=1)=\mathbf{P}(X=0,Y=1)+\mathbf{P}(X=1,Y=1)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=0,Y=1)&=\mathbf{P}(Y=1)-\mathbf{P}(X=1,Y=1)=\mathbf{P}(Y=1)-\mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=1)\\&=\mathbf{P}(Y=1)\left[1-\mathbf{P}(X=1)\right]\\&=\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)\end{aligned}$$

- Enfin, pour la même raison, $\mathbf{P}(Y=0)=\mathbf{P}(X=0,Y=0)+\mathbf{P}(X=1,Y=0)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=0,Y=0)&=\mathbf{P}(Y=0)-\mathbf{P}(X=1,Y=0)=\mathbf{P}(Y=0)-\mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=0)\\&=\mathbf{P}(Y=0)\left[1-\mathbf{P}(X=1)\right]\\&=\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0)\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que, pour tout $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X=i,Y=j)=\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=j)$ donc $X$ et $Y$ sont indépendantes.

On conclut que, <u>si $X$ et $Y$ sont des variables suivant des lois de Bernoulli alors $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si $\mathbf{Cov}(X,Y)=0$</u>.