⧫ Corrigés des exercices du chapitre 13

Exercice 1. On considère les fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \longmapsto xy^2 - y + \mathrm{e}^{xy} \qquad \text{et} \qquad g : (x,y) \longmapsto \arctan(x^2y).$$

Montrer que ces fonctions admettent des dérivées partielles et les déterminer.

Solution.

• Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f(\cdot, y) : x \longmapsto xy^2 - y + \mathrm{e}^{xy}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables donc f admet une dérivée partielle par rapport à x et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + y\mathrm{e}^{xy}}.$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, \cdot) : y \longmapsto xy^2 - y + \mathrm{e}^{xy}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables donc f admet une dérivée partielle par rapport à y et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy - 1 + x\mathrm{e}^{xy}}.$$

• Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f(\cdot, y) : x \longmapsto x\arctan(x^2y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables donc f admet une dérivée partielle par rapport à x et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{1+(x^2y)^2} = \frac{2xy}{1+x^4y^2}}.$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, \cdot) : y \longmapsto \arctan(x^2y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables donc f admet une dérivée partielle par rapport à y et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{1+(x^2y)^2} = \frac{x^2}{1+x^4y^2}}.$$

Exercice 2. Dans chacun de cas suivants, on admet que f admet des dérivées partielles. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

1. $f : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^3$;

2. $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{1+x}{1+y^2}$;

3. $f : (x,y) \longmapsto \sin(x^2+y^2)$;

4. $f : (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y}$;

Solution.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y}.$$

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2(1+x)y}{(1+y^2)^2}}.$$

3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)}.$$

4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y}}.$$

Exercice 3. Déterminer les points critiques de

$$f : (x,y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

On admettra l'existence des dérivées partielles de f.

Solution. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Dès lors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ (x^2)^2 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3-1) = 0 \end{cases}$$

Or, $x(x^3 - 1) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x^3 = 1$ i.e. $x = 0$ ou $x = 1$ (car $x \longmapsto x^3$ est bijecive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Ainsi,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La fonction f possède donc deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 4. Reprendre l'exercice précédent avec

$$f : (x,y) \longmapsto xy(1 - x - y).$$

Solution. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-x-y) - xy = y(1-2x-y) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x(1-2y-x).$$

Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=0 \text{ ou } 1-2x-y=0\\ y=0 \text{ ou } 1-x-2y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=0\\ 1-x-2y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}1-2x-y=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}1-2x-y=0\\ 1-x-2y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=1-2x\\ 1-x-2(1-2x)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=1-2x\\ 3x-1=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=\frac{1}{3}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

On conclut que f possède 4 points critiques : $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 5. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ en posant pour tous réels x et y,

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x.$$

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère la fonction P définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $P(x)=x^2+a^2-2x$. Justifier que, pour tout réel x, $P(x)\geqslant a^2-1$.
2. On admet que f admet des dérivées partielles. Calculer celles-ci.
3. En déduire tous les points $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ en lesquels f admet un minimum global.

Solution.

1. La fonction P est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est positif donc P atteint son minimum en $\frac{-2}{2\times 1}=-1$ et ce minimum vaut $P(-1)=(-1)^2+a^2-2(-1)=a^2-1$. Ainsi, pour tout réel x, $\boxed{P(x)\geqslant a^2-1}$.
2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y}.$$
3. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x-2=0\\ 2y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$$
Ainsi, l'unique point critique de f de $(1,0)$ donc le seul extremum possible est $f(1,0)=-1$. De plus, pour tout réel y et tout réel x, en appliquant le résultat de la question **1.** avec $a=y$,
$$f(x,y))=P(x)\geqslant y^2-1\geqslant -1.$$
On conclut que $\boxed{\text{le minimum global de } f \text{ est } -1 \text{ est qu'il atteint uniquement en } (1,0)}$.

Exercice 6. Étudier les éventuels extremums de la fonction $k : (x,y) \longmapsto \sin(xy)\mathrm{e}^{x^2}$ de l'exemple 14 du cours.

Solution. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \sin(xy)\mathrm{e}^{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composées et produit de fonction dérivables donc k admet une dérivée partielle par rapport à la première variable et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)\mathrm{e}^{x^2} + \sin(xy)(2x\mathrm{e}^{x^2} = (y\cos(xy) + 2x\sin(xy))\mathrm{e}^{x^2}.$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto \sin(xy)\mathrm{e}^{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonction dérivables donc k admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = x\cos(xy)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Supposons que (x,y) soit un point critique de k. Alors, $x\cos(xy)\mathrm{e}^{x^2} = 0$ donc $x = 0$ ou $\cos(xy) = 0$.

Supposons que $x = 0$. Alors, comme $(y\cos(xy) + 2x\sin(xy))\mathrm{e}^{x^2} = 0$, $y = 0$.

Supposons que $\cos(xy) = 0$. Alors, comme $(y\cos(xy) + 2x\sin(xy))\mathrm{e}^{x^2} = 0$, $2x\sin(xy)\mathrm{e}^{x^2} = 0$ donc soit $x = 0$ soit $\sin(xy) = 0$. Or, si $\sin(xy) = 0$ alors $\cos^2(xy) + \sin^2(xy) = 0^2 + 0^2 = 0$ ce qui est absurde car $\cos^2(xy) + \sin^2(xy) = 1$. Ainsi, $x = 0$ et on est ramené au cas précédent.

On conclut que le seul point critique de k est $(0,0)$.

Or, $k(0,0) = 0$ et, pour tout $t > 0$, $k(t,t) = \sin(t^2)\mathrm{e}^{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ donc $k(t,t) \geqslant 0$ au voisinage de 0 et $k(t,-t) = \sin(-t^2)\mathrm{e}^{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} -t^2$ donc $k(t,-t) \leqslant 0$ au voisinage de 0. Ainsi, dans n'importe quel rectangle contenant $(0,0)$, k prend des images positives et des images négatives donc $f(0,0)$ n'est pas un extremum de k.

On conclut donc que $\boxed{k \text{ ne possède pas d'extremum}}$.

Exercice 7. On considère la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

On admet l'existence des dérivées partielles de f.

1. Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)\sin(2x+y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\sin(x+2y)$$

2. Déterminer les points critiques de f qui sont intérieurs au rectangle $R = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$.

3. On admet que f admet un maximum local dans le rectangle R et que ce maximum est atteint en un point intérieur au rectangle.
Déterminer la valeur de ce maximum.

Solution.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^*$, grâce aux formules d'addition,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)(\cos(x)\sin(x+y) + \sin(x)\cos(x+y)) = \sin(y)\sin(2x+y)$$

et par symétrie, en échangeant x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\sin(y)\sin(x+y) = \sin(x)\sin(x+2y).$$

2. Pour $(x,y) \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[^2$, $\sin(x) \neq 0$ et $\sin(y) \neq 0$ donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(y)\sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x)\sin(x+2y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y = \pi \\ x+2y = \pi \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = \frac{\pi}{3}.$$

L'unique point critique de f à l'intérieur de R est donc $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Un maximum de f à l'intérieur de R est un maximum local donc il est atteint en un point critique. On en déduit que le maximum de f sur R est $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 8. on considère la fonction réelle f de deux variables réelles définie par :

$$f : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy.$$

On admet l'existence des dérivées partielles de f

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Calculer, pour tout réel t, $f(t,0)$ et $f(t,t)$. Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) - (-2) = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2.$$

Que peut-on en déduire ?

Solution.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4y^3 - 4x$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x \in \{0,1,-1\} \end{cases}.$$

Ainsi, la fonction f admet 3 points critiques : $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

2. Pour tout réel t, $f(t,0) = t^4$ et $f(t,t) = 2t^4 - 4t^2 = 2t^2(t^2-2)$. Ainsi, pour tout $0 < t < \sqrt{2}$, $f(t,0) > 0$ et $f(t,t) < 0$ donc, sur tout rectangle contenant $(0,0)$ dans son intérieur, il existe des points ayant une image strictement positive et des points ayant une image strictement négative. Comme $f(0,0) = 0$, on conclut que f ne présente pas d'extremum en $(0,0)$.

3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'une part,

$$f(x,y) - (-2) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 &= x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 + 2(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^4 + y^4 - 4xy + 2\end{aligned}$$

donc, $f(x,y)-(-2)=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+2(x-y)^2$.
Comme le carré d'un réel est positif, on en déduit que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)-(-2)\geqslant 0$. Or, $-2=f(1,1)=f(-1,-1)$ donc on conclut que f atteint un minimum global en $(1,1)$ et en $(-1,1)$ et que ce minimum global vaut -2.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=x\mathrm{e}^{1-y}+y\mathrm{e}^{1-x}.$$

On admet l'existence des dérivées partielles de f.

1. Calculer les dérivées partielles de f.

2. Soit (a,b) un point critique de f .

a. Montrer que $\mathrm{e}^{1-b}=b\mathrm{e}^{1-a}$ et $\mathrm{e}^{1-a}=a\mathrm{e}^{1-b}$. En déduire que $ab=1$, puis que $\mathrm{e}^{1-a}=a\mathrm{e}^{1-\frac{1}{a}}$.

b. Justifier que $\mathrm{e}^{1-x}-t\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}>0$ pour tout $x<0$.

c. Déterminer le sens de variations de la fonction $\varphi : x\longmapsto \mathrm{e}^{1-x}-x\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

d. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire l'unique point critique de f.

3. Déterminer les $\mathrm{DL}_2(0)$ de $g : t\longmapsto f(1+t,1+t)-2$ et de $h : t\longmapsto f(1+t,1-t)-2$. Que peut-on en déduire concernant les extremums de f ?

Solution.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{1-y}-y\mathrm{e}^{1-x}\qquad \text{et}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x\mathrm{e}^{1-y}+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

2. a. Par définition, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ donc $\mathrm{e}^{1-b}-b\mathrm{e}^{1-a}$ et $-a\mathrm{e}^{1-b}+\mathrm{e}^{1-a}=0$ i.e. $\boxed{\mathrm{e}^{1-b}=b\mathrm{e}^{1-a} \text{ et } \mathrm{e}^{1-a}=a\mathrm{e}^{1-b}}$.

On en déduit que $\mathrm{e}^{1-b}=b(a\mathrm{e}^{1-b)}=ab\mathrm{e}^{1-b}$ donc, comme $\mathrm{e}^{1-b}\neq 0$, $\boxed{ab=1}$. Par suite, $b=\dfrac{1}{a}$ donc $\boxed{\mathrm{e}^{1-a}=a\mathrm{e}^{1-\frac{1}{a}}}$.

b. Soit un réel $a<0$. Alors, $\mathrm{e}^{1-\frac{1}{a}}>0$ donc, comme $-a>0$, $-a\mathrm{e}^{1-\frac{1}{a}}$ et ainsi, comme $\mathrm{e}^{1-a}>0$, $\boxed{\mathrm{e}^{1-a}-a\mathrm{e}^{1-\frac{1}{a}}>0}$.

c. La fonction φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composées, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x>0$,

$$\varphi'(x)=-\mathrm{e}^{1-x}-\left(1\times\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}+x\times\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}\right)=-\left(\mathrm{e}^{1-x}+\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}\right)<0$$

car $\mathrm{e}^{1-x}>0$, $\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}>0$ et $\dfrac{1}{x}>0$.

Ainsi, la fonction $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;+\infty[}$.

d. $\varphi(1)=\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0=0$ et, comme φ est strictement croissante, 1 est l'unique réel $x>0$ tel que $\varphi(x)=0$. Or, d'après la question précédente, $a>0$ donc $a=1$.

On conclut que $\boxed{\text{l'unique point critique de } f \text{ est } (1,1)}$.

3. Pour tout réel t,

$$g(t)=(1+t)\mathrm{e}^{-t}+(1+t)\mathrm{e}^{-t}-2=2(1+t)\mathrm{e}^{-t}-2.$$

Or, $\lim\limits_{t\to 0} -t=0$ donc, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} g(t)&=2\left[(1+t)\left(1+(-t)+\frac{(-t)^2}{2}+o(t^2)\right)-1\right]\\ &=2\left(1-t+\frac{t^2}{2}+t-t^2+o(t^2)-1\right). \end{aligned}$$

donc $\boxed{g(t)=-t^2+o(t^2)}$; De même, pour tout réel t,

$$h(t)=(1+t)\mathrm{e}^{t}+(1-t)\mathrm{e}^{-t}-2$$

donc, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} h(t)&=(1+t)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)+(1-t)\left(1+(-t)+\frac{(-t)^2}{2}+o(t^2)\right)-2\\ &=1+t+\frac{t^2}{2}+t+t^2+1-t+\frac{t^2}{2}-t+t^2-2+o(t^2). \end{aligned}$$

donc $\boxed{h(t)=3t^2+o(t^2).}$

Ainsi, pour tout t suffisamment proche de 0, $g(t)$ est du signe de $-t^2<0$ i.e. $g(t)<0$ et $h(t)$ est du signe de $3t^2>0$. Ainsi, dans tout rectangle contenant $(0,0)$ dans son intérieur, il y a des points ayant une image supérieure 2 et des points ayant une image inférieur à 2 donc $2=f(1,1)$ n'est pas un extremum.

On conclut que $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum sur } \mathbb{R}^2}$.

Exercice 10. On définit deux fonctions f et g en posant, pour tout réel x :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\qquad\text{et}\qquad g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On considère la fonction $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, par :

$$h(x,y)=(f(x))^2-(g(y))^2.$$

On cherche un éventuel extremum local pour cette fonction. On admet l'existence des dérivées partielles de h.

1. Montrer que g est une fonction impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $h(x,x)$ pour tout réel x.

3. **a.** Montrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=g(2x)$.

b. Exprimer selon la même méthode $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$..

c. Question de cours : énoncer une condition nécessaire pour qu'en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, la fonction h admette un extremum local.

d. Donner le seul point qui satisfait cette condition, pour la fonction h, dans cet exercice.

4. **a.** Donner le signe de $h(x,0)-h(0,0)$ lorsque x est un réel.

b. Étudier aussi le signe de $h(0,x) - h(0,0)$ lorsque x est un réel.

5. Conclure

Solution.

1. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et, pour tout réel x,

$$g(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -g(x)$$

donc $\boxed{g \text{ est une fonction impaire}}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$$

car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. Ainsi, la fonction $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} h(x,x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}}{4} \end{aligned}$$

donc $\boxed{h(x) = 1}$.

3. a. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 2f'(x)f(x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})}{2} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{x})^2 - (\mathrm{e}^{-x})^2}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = g(2x)}$.

b. De même, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= -2g'(y)g(y) = -2 \times \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} = -\frac{(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y})(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y})}{2} \\ &= -\frac{(\mathrm{e}^{y})^2 - (\mathrm{e}^{-y})^2}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^{-2y}}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -g(2y)}$.

c. Si h admet un extremum local en (x,y) alors (x,y) est un point critique de h i.e. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0$.

d. D'après les questions précédentes, (x,y) est un point critique de h si et seulement si $g(2x) = 0$ et $g(2y) = 0$. Or, g est impaire donc $g(0) = 0$ et, comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, g ne s'annule qu'en 0. On en déduit que (x,y) est un point critique de h si et seulement si $2x = 0$ et $2y = 0$ i.e. $x = 0$ et $y = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique point critique de } h \text{ est } (0,0)}$.

4. **a.** Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} h(x,0)-h(0,0) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - 0^2 - 1 = \frac{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}-4}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}-4}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}{4} \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

donc, pour tout réel x, $h(x,0)-h(0,0) \geqslant 0$.

b. Pour tout réel x,

$$h(0,x)-h(0,0) = 1^1 - g(x)^2 - 1 = -g(x)^2$$

donc, pour tout réel x, $h(0,x)-h(0,0) \leqslant 0$.

5. On en déduit que, dans tout rectangle contenant $(0,0)$ dans son intérieur, il y a des points dont les images sont supérieures à $h(0,0)$ et des points donc les images sont inférieures à $h(0,0)$ donc $h(0,0)$ n'est pas un extremum. Comme $(0,0)$ est le seul point critique de h, on conclut que $\boxed{h \text{ n'admet pas d'extremum}}$.

Exercice 11.

A. Une fonction trinôme du second degré

Soir a un nombre réel, fixé. On considère la fonction polynôme P, de degré 2, définie pour tout réel x par :

$$P(x) = x^2 - 2x + a^2 + 2.$$

1. Calculer, en fonction de a, le discriminant de P. Donner le signe de ce discriminant.
2. En déduire le signe de P.
3. Donner le sens de variation de la fonction P, montrer que P admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de ce minimum. Dresser le tableau de variations de la fonction P. on fera également apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

B. Étude d'une fonction d'une variable réelle

Dans cette partie, a désigne toujours un nombre réel. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x+a^2+2}.$$

1. Montrer que f est bien définie pour tout réel x.
2. Donner le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
3. Donner le sens de variation de f, et les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{a^2+1}$.
5. Dresser un tableau résumant les informations précédentes : variations de f, valeur du maximum, et limites.

C. Une fonction de deux variables

On envisage la fonction de deux variables réelles :

$$u(x,y) = \frac{1}{x^2-2x+y^2+2}.$$

On pourra librement utiliser les résultats de la partie précédente, en particulier en posant $a = y$.

1. Montrer que, pour tous réels x et y, on a $0 < u(x,y) \leqslant 1$.
2. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2(1-x) \times (u(x,y))^2.$$

   On admettra sans justification que u est effectivement dérivable par rapport à x.
3. Calculer de même $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ en fonction de x et de y. On admettra sans justification que u est effectivement dérivable par rapport à y.
4. **a.** Question de cours : supposons que u admette un extremum local en (x_0, y_0). Que dire de $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$?

   b. Application : donner tous les couples $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,y) \leqslant u(x_0,y_0).$$

5. Existe-t-il un couple $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,y) \geqslant u(x_1,y_1).$$

Solution.

A. Une fonction trinôme du second degré

1. Le discriminant de P est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (a^2+2) = 4 - 4(a^2+2) = 4(1-a^2-2) = -4(a^2+1).$$

   Pour tout réel a, $a^2+1 > 0$ donc $\boxed{\Delta < 0}$.
2. Comme $\Delta < 0$ et comme le coefficient dominant de P est $1 > 0$, $\boxed{P(x) > 0 \text{ pour tout réel } x}$.
3. Comme P est une fonction polynôme de degré donc le coefficient dominant est positif, P est décroissante puis croissante et le changement de variation a lieu en $x = \dfrac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$. Ainsi, P est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.
   Ainsi, le minimum de P est $P(1) = 1^2 - 2 \times 1 + a^2 + 2 = a^2+1$.
   Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $P(x) \sim x^2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$.
   On aboutit donc au tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de P	$+\infty$	$\searrow$	a^2+1	$\nearrow$	$+\infty$

B. Étude d'une fonction d'une variable réelle

1. La fonction P est définie est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f = \dfrac{1}{P} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$ donc $\dfrac{1}{P(x)} > 0$ i.e. $\boxed{f(x) > 0}$.

3. Comme la fonction inverse$i$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et comme l'image de P est incluse dans $]0\,;+\infty[$, $f = i \circ P$ est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

4. Pour réel x, $P(x) \geqslant a^2+1 > 0$ donc, comme la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{P(x)} \leqslant \dfrac{1}{a^2+1}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant \dfrac{1}{a^2+1}}$.

5. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variation de f	0 $\nearrow$	$\dfrac{1}{a^2+1}$	$\searrow$ 0

C. Une fonction de deux variables

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. En appliquant les résultats de la partie **A.** avec $a = y$, on obtient que, pour tous réels x, $0 < \dfrac{1}{x^2-2x+y^2+2} \leqslant \dfrac{1}{y^2+1} \leqslant 1$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ 0 < u(x,y) \leqslant 1}$.

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+y^2+2)^2} = (-2x+2) \times \frac{1}{(x^2-2x+y^2+2)^2}$$

   donc $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2(1-x) \times (u(x,y))^2}$.

3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{(x^2-2x+y^2+2)^2} = 2y \times \frac{1}{(x^2-2x+y^2+2)^2}$$

   donc $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y \times (u(x,y))^2}$.

4. **a.** Si u admet un extremum local en (x_0,y_0) alors (x_0,y_0) est un point critique de u donc $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0=0)}$.

   b. On cherche les points en lesquels u admet un maximum global. Ces point sont nécessairement des points critiques. Or, comme u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1-x_0)u(x_0,y_0)^2 = 0 \\ 2y_0u(x_0,y_0)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

   Ainsi, l'unique point critique de u est $(1,0)$. De plus, $u(1,0) = \dfrac{1}{1^2-2\times1+0^2+2} = 1$ et on a vu que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) \leqslant 1$ donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$, $u(x,y) \leqslant u(1,0)$.

   On conclut que $\boxed{\text{l'unique point où } u \text{ atteint son maximum est } (1,0)}$.

5. S'il existe un couple $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,y) \geqslant u(x_1, y_1)$$

alors u aurait un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Ce minimum serait un point critique donc on aurait $(x_1, y_1) = (1, 0)$. Ainsi, on aurait pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) \geqslant 1$. Or, $u(0,0) = \dfrac{1}{2} \leqslant 1$ donc on aboutirait à une contradiction.

Ainsi, $\boxed{u \text{ ne présente pas de minimum global sur } \mathbb{R}^2}$.