⧫ Corrigés des exercices du chapitre 12

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y = 2y'$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y' + 3y = \mathrm{e}^{-3t}$; on cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto At\mathrm{e}^{-3t}$ où $A \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_3) : y' - y = 1 + t^2$; on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.

Solution.

1. L'équation (E_1) est équivalente à $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ donc, par théorème, l'ensemble des solutions des (E_1) est $\boxed{\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.
2. Les solutions de l'équation homogène $y' + 3y = 0$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-3t}$ où $C \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto At\mathrm{e}^{-3t}$. Alors, pour tout réel t,
$$g'(t) + 3g(t) = A\mathrm{e}^{-3t} - 3At\mathrm{e}^{-3t} + 3At\mathrm{e}^{-3t} = A\mathrm{e}^{-3t}$$
donc $g : t \longmapsto t\mathrm{e}^{-3t}$ est une solution particulière de (E_2). On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{\{t \longmapsto (t + C)\mathrm{e}^{-3t} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.
3. Les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{t}$ où $C \in \mathbb{R}$. Soit a, b et c des réels et $g : t \longmapsto at^2 + bt + c$. Alors, pour tout réel t,
$$g'(t) - g(t) = 2at + b - (at^2 + bt + c) = -at^2 + (2a - b)t + b - c.$$
donc, pour que g soit solution de (E_3), il suffit que
$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 1 \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$
Ainsi, $g : t \longmapsto -t^2 - 2t - 3$ est une solution de (E_3) donc l'ensemble des solutions de (E_3) est $\boxed{\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{t} - (t^2 + 2t + 3) \mid C \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 2.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 3y' - 10y = \mathrm{e}^{t}$; on cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto A\mathrm{e}^{t}$ où $A \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' - 2y' + y = \cos(t)$; on chercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto K\sin(t)$ où $K \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_3) : y'' - 2y' + 5y = t^2$; on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.

Solution.

1. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène $(H_1) : y'' - 3y' - 10y$ est $r^2 - 3r - 10 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0$ donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles :
$$r_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = 5$$

Ainsi, les solutions de (H_1) sont les fonctions $t \longmapsto A\mathrm{e}^{-2t} + B\mathrm{e}^{5t}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Soit $A \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto A\mathrm{e}^t$. Alors, pour tout réel t,

$$g''(t) - 3g'(t) - 10g(t) = A\mathrm{e}^t - 3A\mathrm{e}^t - 10A\mathrm{e}^t = -12A\mathrm{e}^t$$

donc $g : t \longmapsto -\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^t$ est une solution de (E_1).

On conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\left\{ A\mathrm{e}^{-2t} + B\mathrm{e}^{5t} - \dfrac{1}{12}\mathrm{e}^t \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

2. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène $(H_2) : y'' - 2y' + y$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$ i.e. $r - 1)^2$. Ainsi, l'équation caractéristique admet une unique solution réelle qui est $r_0 = 1$ donc les solutions de (H_2) sont les fonctions $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^t$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Soit $K \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto K\sin(t)$. Alors, pour tout réel t,

$$g''(t) - 2g'(t) + g(t) = -K\sin(t) - 2(K\cos(t)) + K\sin(t) = -2K\cos(t)$$

donc $g : t \longmapsto -\dfrac{1}{2}\sin(t)$ est une solution de (E_2).

On conclut que l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{\left\{ (At + B)\mathrm{e}^t - \dfrac{1}{2}\sin(t) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

3. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène $(H_3) : y'' - 2y' + 5y$ est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$ donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 - 2\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 + 2\mathrm{i}$$

Ainsi, les solutions de (H_3) sont les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^t\,(A\cos(2t) + B\sin(t))$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Soit a, b et c des réels et $g : t \longmapsto at^2 + bt + c$. Alors, pour tout réel t,

$$g''(t) - 2g'(t) + 5g(t) = 2a - 2(2at + b) + 5(at^2 + bt + c) = 5at^2 + (5b - 4a)t + 2a - 2b + 5c$$

donc, pour que g soit solution de (E_3), il suffit que

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ 5b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + 5c = 0 \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{5} \\ b = \dfrac{4}{25} \\ c = -\dfrac{2}{125} \end{cases}.$$

donc $g : t \longmapsto \dfrac{1}{5}t^2 + \dfrac{4}{25}t - \dfrac{2}{125}$ est une solution de (E_3).
On conclut que l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\left\{ \mathrm{e}^t\,(A\cos(2t) + B\sin(t)) + \frac{1}{5}t^2 + \frac{4}{25}t - \frac{2}{125} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

Exercice 3. Soit $\alpha > 1$ et $k > 0$. En s'inspirant de la démonstration de la propriété 16, déterminer les solutions strictement positives sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E) : y' + ky^\alpha = 0$.

Solution. Soit g une solution strictement positive de (E) sur $[0\,;+\infty[$. Alors, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) + kg(t)^\alpha = 0$ donc $g'(t) = -kg(t)^\alpha$ et ainsi, comme $g(t) > 0$, $-\dfrac{g'(t)}{g(t)^\alpha} = k$. Or, $t \longmapsto -\dfrac{g'(t)}{g(t)^\alpha}$ est la dérivée de $t \longmapsto \dfrac{1}{(\alpha-1)g(t)^{\alpha-1}}$ donc il existe une constante C telle que, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{(\alpha-1)g(t)^{\alpha-1}} = kt + C$. De plus, en évaluant en 0, on obtient que $C = \dfrac{1}{(\alpha-1)g(0)^{\alpha-1}} > 0$ car $\alpha > 1$ et $g(0) > 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{g(t)^{\alpha-1}} = (\alpha-1)(kt+C)$ donc $g(t)^{\alpha-1} = \dfrac{1}{(\alpha-1)(kt+C)}$ et finalement $g(t) = \dfrac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.

Réciproquement, soit un réel $C > 0$ et $g : t \longmapsto \dfrac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{1}{\alpha-1}}}$. Alors, pour tout réel $t \geqslant 0$, comme $k > 0$, $kt + C > 0$ donc g est bien définie sur $[0\,;+\infty[$ et, de plus, $g(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

Par composée et quotient de fonctions dérivables, g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{1}{(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \times \left(-\frac{1}{\alpha-1} \times k \times \frac{1}{(kt+C)^{\frac{1}{\alpha-1}+1}}\right) \\
&= -k \times \frac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{1}{\alpha-1}+1}} \\
&= -k \times \frac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}} \\
&= -k \times \frac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \\
&= -k \times \left[\frac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right]^\alpha \\
&= -kg(t)
\end{aligned}$$

donc $g'(t) + \alpha g(t) = 0$. Ainsi, g est bien solution de (E).

On conclut que l'ensemble des solutions strictement positives de (E) sur $[0\,;+\infty[$ est $\boxed{\left\{ t \longmapsto \dfrac{1}{[(\alpha-1)(kt+C)]^{\frac{1}{\alpha-1}}} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}_+^* \right\}}$.

Exercice 4. Déterminer les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{-y}$.

Solution. Soit g une solution de $y' = \mathrm{e}^{-y}$ sur $[0\,;+\infty[$. Alors, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = \mathrm{e}^{-g(t)}$ donc $g'(t)\mathrm{e}^{g(t)} = 1$ donc $(\exp \circ g)'(t) = 1$. Ainsi, il existe une constante réel C telle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{g(t)} = t + C$. De plus, en évaluant en 0, $C = \mathrm{e}^{g(0)} > 0$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $t + C > 0$ donc $g(t) = \ln(t + C)$.

Réciproquement, soit $C > 0$ et $g : t \longmapsto \ln(t + C)$. Alors, g est définie sur $[0\,;+\infty[$ car, comme $C > 0$, pour tout $t \geqslant 0$, $t + C > 0$ et g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = \frac{1}{t+C} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-g(t)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{g(t)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(t+C)}} = \frac{1}{t+C}$$

donc $g'(t) = \mathrm{e}^{-g(t)}$.

On conclut que l'ensemble des solutions de $y' = \mathrm{e}^{-y}$ sur $[0\,;+\infty[$ est $\boxed{\left\{t \longmapsto \ln(t+C) \mid C \in \mathbb{R}_+^*\right\}}$.

Exercice 5. Résoudre sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Solution. Soit g une solution de $y' = 1 + y^2$ sur I telle que $g(0) = 0$. Alors, pour tout $t \in I$, $g'(t) = 1 + g(t)^2$ donc $\dfrac{g(t)}{1+g(t)^2} = 1$ i.e. $(\arctan \circ g)'(t) = 1$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout $t \in I$, $\arctan(g(t)) = t + C$. De plus, comme $g(0) = 0$, $C = \arctan(g(0)) = \arctan(0) = 0$ donc, pour tout $t \in I$, $\arctan(g(t)) = t$. Or, pour tout $t \in I$, $t = \arctan(tan(t))$ donc $\arctan(g(t)) = \arctan(tan(t))$ et, comme arctan est injective, on conclut que, pour tout $t \in I$, $g(t) = \tan(t)$.

Réciproquement, si on note g la restriction de tan à I alors g est une fonction définie et dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $g'(t) = \tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = 1 + g(t)^2$ donc g est solution de (E) sur I.

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } y' = 1 + y^2 \text{ qui s'annule en 0 est la restriction de tan à } I}$.

Exercice 6. En posant $z = \ln(y)$, déterminer les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = y\ln(y)$.

Solution. Soit y une solution strictement positive de (E) sur $\mathbb{R}$ et $z = \ln(y)$. Alors, z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et $z' = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{y\ln(y)}{y} = \ln(y) = z$. Ainsi, z vérifie $z' - z = 0$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $z : t \longmapsto C\mathrm{e}^t$. Par suite, comme $y = \exp(z)$, y est de la forme $t \longmapsto \exp(C\mathrm{e}^t)$.

Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto \exp(C\mathrm{e}^t)$. Alors, g est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel t,

$$g'(t) = C\mathrm{e}^t \exp(C\mathrm{e}^t) \qquad \text{et} \qquad g(t)\ln(g(t)) = \exp(C\mathrm{e}^t)C\mathrm{e}^t$$

donc $g'(t) = g(t)\ln(g(t))$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\{t \longmapsto \exp(C\mathrm{e}^t) \mid C \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 7. Soit a et b deux réels strictement positifs. On considère, sur $I = [0\,;+\infty[$, l'équation différentielle de Verhulst :

$$(V) : y' = y(a - by).$$

1. Montrer que (V) est équivalente à $(V') : y' = ay\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ où $K = \dfrac{b}{a}$.
2. Résoudre sur I l'équation différentielle $(W) : z' + az = +aK$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une constante.
3. En posant $z = \dfrac{1}{y}$, déterminer les solutions de (V') qui ne s'annulent pas sur I.

Solution.

1. Pour tout fonction y dérivable sur I,

$$(V) \Longleftrightarrow y' = y \times a\left(1 - \frac{b}{a}y\right) \Longleftrightarrow y' = ay(1 - Ky)$$

donc $\boxed{(V) \text{ est équivalente à } (V')}$.

2. Les solutions de l'équation homogène (H) : $z' + az = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto m$. Alors, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) + ag(t) = 0 + am = am$ donc g est solution de (W) si et seulement si $am = aK$ i.e., comme $a \neq 0$, $m = K$.

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (W) \text{ est } \{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at} + K \mid C \in \mathbb{R}\}}$.

3. Soit y une solution de (V') qui ne s'annule pas sur I et $z = \dfrac{1}{y}$. Alors, z est définie et dérivable sur I et

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{ay(1-Ky)}{y^2} = -\frac{ay}{y} \times \frac{1-Ky}{y} = -a\left(\frac{1}{y} - K\right) = -a(z-K).$$

Ainsi, z vérifie $z' + az = aK$ donc z est solution de (W). D'après la question précédente, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $z : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at} + K$. Comme $a > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} C\mathrm{e}^{-at} + K = K > 0$ donc z prend des valeurs positives. Si z prenait aussi des valeurs négatives alors, comme z est continue, z s'annulerait d'aprsès le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, pour tout t, $z(t) > 0$ i.e. $C\mathrm{e}^{-at} + k > 0$. En particulier, pour $t = 0$, on obtient $C + K > 0$ donc $C > -K$. On conclut donc qu'il existe $C > -K$ tel que $y : t \longmapsto \dfrac{1}{C\mathrm{e}^{-at} + K}$.

Réciproquement, soit un réel $C > -K$ et $g : t \longmapsto \dfrac{1}{C\mathrm{e}^{-at} + K}$. Alors, pour tout $t \geqslant 0$, $-at \leqslant 0$ car $a > 0$ donc $0 < \mathrm{e}^{-at} \leqslant 1$ et, comme $K > 0$, $0 < K\mathrm{e}^{-at} \leqslant K$. Alors, comme $C > -K$, $C\mathrm{e}^{-at} > -K\mathrm{e}^{-at} \geqslant -K$ donc $C\mathrm{e}^{-at} + K > 0$. Ainsi, g est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = -\frac{-aC\mathrm{e}^{-at}}{(C\mathrm{e}^{-at} + K)^2} = \frac{aC\mathrm{e}^{-at}}{(C\mathrm{e}^{-at} + K)^2}$$

et

$$\begin{aligned} ag(t)\,(1 - Kg(t)) &= \frac{a}{C\mathrm{e}^{-at}Kk}\left(1 - \frac{K}{C\mathrm{e}^{-at} + K}\right) \\ &= \frac{a}{C\mathrm{e}^{-at} + K} \times \frac{C\mathrm{e}^{-at} + K - K}{C\mathrm{e}^{-at} + K} \\ &= \frac{aC\mathrm{e}^{-at}}{(C\mathrm{e}^{-at} + K)^2} \end{aligned}$$

donc $g'(t) = ag(t)(1 - Kg(t))$.

Ainsi, g est solution de (V') . On conclut que l'ensemble des solutions de (V') (et donc de (V)) est $\boxed{\left\{t \longmapsto \dfrac{1}{C\mathrm{e}^{-at} + K} \;\middle|\; C \in \left]-K\,;+\infty\right[\right\}}$.

Exercice 8.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (F) : $z' + z = \dfrac{t+1}{2}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

2. En posant $z = \sqrt{y}$, déterminer les fonctions strictement positives qui sont solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = (t+1)\sqrt{y} - 2y$.

Solution.

1. Les solutions de l'équation homogène (H) : $z" + z = 0$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Soit a et b deux réels et $g : t \longmapsto at + b$. Alors, pour tout réel t, $g'(t) + g(t) = a + at + b = at + (a + b)$ donc, pour que g soit une solution de (F), il suffit que

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ a + b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases} .$$

Ainsi, $g : t \longmapsto \dfrac{t}{2}$ est une solution de (F) et donc l'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{\left\{ t \longmapsto C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t}{2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$.

2. Soit y une solution strictement positive de (E) sur $[0\,;+\infty[$. Alors, $z = \sqrt{y}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{2\sqrt{y(t)}} = \frac{(t+1)\sqrt{y(t)} - 2y(t)}{2\sqrt{y(t)}} = \frac{t+1}{2} - \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)}} = \frac{t+1}{2} - \sqrt{y(t)} = \frac{t+1}{2} - z(t).$$

Ainsi, z est solution de (F) sont il existe un réel C tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $z(t) = C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t}{2}$. De plus, $z(0) = \sqrt{y(0)} > 0$ donc $C > 0$. Ainsi, y est de la forme $t \longmapsto \left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)^2$ avec $C > 0$.

Réciproquement, soit $C > 0$ et $g : t \longmapsto \left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)^2$. Alors, g est dérivable et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = 2\left(-C\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\right)\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right) = \left(-2C\mathrm{e}^{-t} + 1\right)\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)$$

et, comme $C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t}{2} > 0$,

$$\begin{aligned}(t+1)\sqrt{g(t)} - 2g(t) &= (t+1)\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right) - 2\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)^2 \\ &= \left[t + 1 - 2\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)\right]\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right) \\ &= \left(-2C\mathrm{e}^{-t} + 1\right)\left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

donc $g'(t) = (t+1)\sqrt{g(t)} - 2g(t)$ i.e. g est solution de (E).

On conclut que l'ensemble des solutions strictement positives de (E) sur $[0\,;+\infty[$ est $\boxed{\left\{ t \longmapsto \left(C\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\right)^2 \;\middle|\; C \in \mathbb{R}_+^* \right\}}$.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle $(E) : ty'' - y' - t^3y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Supposons que g soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction $h : t \longmapsto g(\sqrt{t})$.

a. Exprimer, pour tout $t > 0$, $g(t)$ en fonction de h et de t.

b. Calculer, pour tout $t > 0$, $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction des dérivées de h et de t.

c. Montrer que h est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(F) : y'' - \dfrac{1}{4}y = 0.$.

d. Déterminer la forme de h puis celle de g.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution.

1. a. Pour tout $t > 0$, $h(t) = g(\sqrt{t})$ donc $g(t) = g(\sqrt{t^2}) = h(t^2)$.

b. On en déduit que, pour tout $t > 0$, $g'(t) = 2th'(t^2)$ et $g''(t) = 2h'(t^2) + 4t^2h''(t^2)$.

c. Ainsi, pour tout $t > 0$,

$$t(2h'(t^2) + 4t^2h''(t^2)) - 2th'(t^2) - t^3h(t^2) = 0$$

donc $t^3(4h''(t^2) - h(t^2)) = 0$ et, comme $t^3 \neq 0$, $4h''(t^2) - h(t^2) = 0$.
Ceci est valable pour tout réel $t > 0$ donc, pour tout $t > 0$, $4h''(\sqrt{t}^2) - h(\sqrt{t}^2) = 0$ i.e. $4h''(t) - h(t) = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est solution de l'équation } (F)}$.

d. L'équation caractéristique de (F) est $r^2 - \dfrac{1}{4} = 0$ donc les solutions sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ donc il existe deux constantes réelles A et B telles que, pour tout $t > 0$, $z(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$ et donc, pour tout $t > 0$, $\boxed{g(t) = z(t^2) = A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$.

2. Soit A et B deux réels et $g : t \longmapsto A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composées de fonctions dérivables et, pour tout $t > 0$,

$$g'(t) = -At\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + Bt\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = t\left(-A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right)$$

et g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit, somme et composées de fonctions dérivables et, pour tout $t > 0$,

$$g''(t) = -A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} + t\left(At\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + Bt\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right) = A(t-1)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B(t+1)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}.$$

On en déduit que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} tg''(t) - g'(t) - t^2g(t) &= t\left(A(t-1)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B(t+1)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right) - t\left(-A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right) - t^2\left(A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right) \\ &= A\left[t(t-1) + t - t^2\right]\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\left[t(t+1) - t - t^2\right]\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc g est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\boxed{\left\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + B\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Exercice 10. Soit un réel $k > 0$. On considère sur $I = [0\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + ky^2 = 0.$$

On admet qu'une solution non nulle de (E) sur I ne s'annule pas sur I.

1. Soit y une solution de (E) qui ne s'annule pas sur I.

   a. Montrer que la fonction $u : x \longmapsto \dfrac{1}{y(x)}$ est bien définie sur I, qu'elle est dérivable sur I et calculer sa dérivée en fonction de y et de y'.

   b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $u'(x) = k$.

   c. En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \dfrac{1}{kx + a}$.

2. On dispose de trois fonctions y_1, y_2 et y_3, que l'on suppose définies et dérivables sur I. On dispose de certaines valeurs numériques, prises par les fonctions y_1, y_2 et y_3, résumées dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$y_1(x)$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
$y_2(x)$	9	5	3	2
$y_3(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	-1

   a. Justifier que y_1, y_2 et y_3 sont continues sur I.

   b. Montrer que y_3 s'annule sur I. Expliquer pourquoi y_3 ne peut pas être solution de l'équation (E).

   c. Donner, à partir du tableau ci-dessus, un tableau de valeurs pour les deux fonctions $\dfrac{1}{y_1}$ et $\dfrac{1}{y_2}$. Expliquer alors pourquoi seule une des deux fonctions y_1 ou y_2 peut être solution de l'équation (E) et préciser laquelle.

   d. En admettant que cette fonction soit bien solution de (E), quelles seraient les valeurs de a et de k. Donner alors l'expression de cette solution en fonction de x.

Solution.

1. **a.** Comme y est définie et ne s'annule pas sur I, u est bien définie sur I. De plus, y est solution d'une équation différentielle donc y est dérivable sur I et ainsi, par inverse, u est dérivable sur I et $u' = -\dfrac{y'}{y^2}$.

   b. Soit $x \in$ i. Alors, comme $y'(x) + ky(x)^2 = 0$, $y'(x) = -ky(x)^2$ donc

$$u'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{-ky(x)^2}{y(x)^2} = k.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ u'(x) = k}$.

   c. Comme I est un intervalle, on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $u(x) = kx + a$. De plus, comme $k > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ donc u prend des valeurs positives. Si u prenait aussi des valeurs négatives alors, comme u est continue (puisque dérivable), par le théorème des valeurs intermédiaires, u s'annulerait sur I, ce qui est exclu. Ainsi, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$. En particulier, $a = u(0) > 0$. On conclut donc qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $u(x) = kx + a$. Or, pour tout $x \in I$, $y(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ donc $\boxed{\text{il existe un réel } a > 0 \text{ tel que, pour tout } x \in I,\ y(x) = \dfrac{1}{kx + a}}$.

2. **a.** Comme ces trois fonctions sont dérivable sur I, $\boxed{\text{elles sont continues sur } I}$.

b. On a $y_(0) > 0$ et $y_3(2) < 0$ donc, comme y_3 est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, y_3 s'annule sur $[0\,;2]$. Or, y_3 n'est pas nulle donc, comme elle s'annule, elle ne peut pas être solution de (E) d'après le résultat admis dans l'énoncé.

c. On obtient le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$\frac{1}{y_1(x)}$	1	3	5	7
$\frac{1}{y_2(x)}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

On a vu précédemment que si y est une solution non nulle de (E) alors $u = \dfrac{1}{y}$ est une fonction affine. Or, une fonction affine est à variation constante autrement dit, $x \longmapsto u(x+1) - u(x)$ est constante sur $\in \mathbb{R}_+$. Or, ici, c'est bien le cas pour $\dfrac{1}{y_1}$ mais pas pour $\dfrac{1}{y_2}$ car $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{45} \neq \dfrac{2}{15} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}$. Ainsi, $\boxed{\text{la seule solution possible est } y_1}$.

d. Si y_1 est effectivement solution alors $\dfrac{1}{a} = y(0) = 1$ donc $a = 1$ et $\dfrac{1}{k+1} = y(1) = \dfrac{1}{3}$ donc $k = 2$. Sous cette hypothèse, on a donc $\boxed{y_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{2x+1}}$.