♦ Corrigés des exercices du chapitre 11

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs sont des vecteurs propres de f.

1. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x+2y, 4x+3y)$.

a) $v_1 = (1,0)$ **b)** $v_2 = (1,-1)$ **c)** $v_3 = (1,2)$ **d)** $v_4 = (0,0)$

2. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = X(P(X+1) - P(X))$.

a) $P_1 = 1$ **b)** $P_2 = X$ **c)** $P_3 = X^2$ **d)** $P_4 = X^2 + X$

Solution.

1. **a.** $f(v_1) = (1,4)$ qui n'est pas colinéaire avec $(1,0)$ donc v_1 n'est pas un vecteur propre de f.

b. $f(v_2) = (-1,1) = -v_2$ et $v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc v_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.

c. $f(v_3) = (5,10) = 2v_3$ et $v_3 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc v_3 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

d. v_4 est nul donc v_4 n'est pas un vecteur propre de f.

2. **a.** $f(P_1) = X(1-1) = 0 = 0P_1$ et $P_1 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc P_1 est un vecteur propre de f propre associé à la valeur propre 0.

b. $f(P_2) = X(X+1-X) = X = P_2$ et $P_2 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc P_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

c. $f(P_3) = X((X+1)^2 - X^2) = X(X^2+2X+1-X^2) = 2X^2+X$ qui n'est pas colinéaire à X (car la famille (X, X^2) est libre) donc P_3 n'est pas une vecteur propre de f.

d. $f(P_4) = X((X+1)^2 + (X+1) - (X^2+X)) = X(X^2+2X+1+X+1-X^2-X) = X(2X+2) = 2(X^2+X) = 2P_4$ et $P_4 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc P_4 est une vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

Exercice 2. Déterminer les valeurs propres de chacun des endomorphismes définis suivants.

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (y\,;x) \end{array}$ **2)** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$

3) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (2y-z\,;3x-2y\,;-2x+2y+z) \end{array}$

Solution.

1. Un réel λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe $(x,y) \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ tel que $f(x,y) = \lambda(x,y)$ i.e. $(y,x) = \lambda(x,y)$ soit $(S) \begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$. Or, (S) équivaut à $\begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda^2 x \end{cases}$ et, si $x = 0$ alors la première équation donne $y = 0$ ce qui est exclu car $(x,y) \neq (0,0)$. Ainsi, $x \neq 0$ et donc (S) équivaut à $\begin{cases} y = \lambda x \\ \lambda^2 = 1 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y = x \\ \lambda = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x \\ \lambda = -1 \end{cases}$ On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1,1\},\ E_1(f) = \mathrm{Vect}((1,1)) \text{ et } E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1)).}$

2. Un réel λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un polynôme non nul $P = aX^2 + bX + c$ tel que $f(P) = \lambda P$. Or, pour un tel polynôme,

$$f(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c = a(X^2+2X+1) + bX + b + c = aX^2 + (2a+b)X + a + b + c$$

donc, comme $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$f(P) = \lambda P \iff aX^2 + (2a+b)X + a + b + c = \lambda(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = \lambda a \\ 2a + b = \lambda b \\ a + b + c = \lambda c \end{cases}.$$

Si $a \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2a + b = \lambda b \\ a + c = c \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$$

ce qui contradictoire donc $a = 0$. Ainsi, le système devient

$$\begin{cases} b = \lambda b \\ b + c = \lambda c \end{cases}$$

Si $b \neq 0$, la première égalité donne $\lambda = 1$ et donc la seconde égalité donne $b = 0$, ce qui est contradictoire.
Ainsi, $b = 0$ donc le système se réduit à $c = \lambda c$ et, comme $P \neq 0$ et $a = b = 0$, $c \neq 0$ donc $\lambda = 1$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{l'unique valeur de } f \text{ est } 1 \text{ et } E_1(f) = \{c \mid c \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(1)}$.

3. Un réel λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur non nul (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$ i.e.

$$(S)\begin{cases} 2y - z = \lambda x \\ 3x - 2y = \lambda y \\ -2x + 2y + z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x - 2y + z = 0 & L_1 \\ 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_2 \\ 2x - 2y + (\lambda - 1)z = 0 & L_3 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \lambda x - 2y + z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 2x - 2y + (\lambda-1)z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \\ \quad \left(\frac{\lambda}{3}(2+\lambda) - 2\right) y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\lambda}{3}L_1 \\ \left(\frac{2}{3}(2+\lambda) - 2\right) y + (\lambda-1)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \\ \quad (\lambda^2 + 2\lambda - 6)\, y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ (2\lambda - 2)\, y + 3(\lambda-1)z = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases}\end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$, le système devient

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ \quad -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

qui est de rang 2 donc 1 est valeur propre de f.
Si $\lambda \neq 1$ alors on peut diviser la dernière ligne par $\lambda - 1$, ce qui donne

$$(S) \iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \\ \qquad (\lambda^2 + 2\lambda - 6)\, y + 3z = 0 & L_2 \\ 2y + 3z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \\ \qquad 2y + 3z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ (\lambda^2 + 2\lambda - 6)\, y + 3z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \\ \qquad 2y + 3z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ (3 - \frac{3}{2}(\lambda^2 + 2\lambda - 6))z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\lambda - 6)L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - (2+\lambda)y = 0 & L_1 \\ \qquad 2y + z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ (\lambda^2 + 2\lambda - 8)z = 0 & L_3 \leftarrow -\frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

Ce système n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 + 2X - 8$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = 2.$$

On conclut que $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1\,;2\,;-4\}}$.

Exercice 3. Déterminer les valeurs propres réelles de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution.
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 16 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 6\lambda - 7.$$

Le discriminant du trinôme de $X^2 - 6X - 7$ est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 64 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = 7$$

On conclut donc que $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1\,;7\}}$.

• La matrice B est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 1 et 1 donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - (-1) = \lambda^2 + 1 > 0.$$

Ainsi, pour tout réel λ, $C - \lambda I_2$ est inversible donc $\boxed{\mathrm{Sp}(C) = \varnothing}$.

• La matrice D est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3 donc $\boxed{\mathrm{Sp}(D) = \{1\,;2\,;3\}}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

1. La matrice A est-elle symétrique ?
2. Déterminer le spectre de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution.

1. Comme ${}^tA = A$, la matrice $\boxed{A \text{ est symétrique}}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - \vec{\imath}^2 = \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2$ qui s'annule si et seulement si $\lambda = 0$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0\}}$.
3. Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ donc $A = 0_2$. Or, $A \neq 0_2$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Exercice 5. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de N et de $N - I_3$. Que peut-on en déduire en terme de valeur propre et de sous-espace propre ?
2. Montrer que f possède trois valeurs propres distinctes.
3. La matrice N est-elle diagonalisable ?

Solution.

1. Les deux premiers vecteurs colonnes C_1 et C_2 de N ne sont pas colinéaires et le troisième vecteur colonne C_3 est égal à C_1 donc $\dim(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(N) = 2}$.
   $N - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est également de rang 2 car son premier et son dernier vecteurs colonnes sont libres et son deuxième vecteur colonne est nul. Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg}(N - I_3) = 2}$.
   Comme $N = N - 0I_3$ et $N - I_3 = N - 1I_3$ ne sont pas de rang 3, elles ne sont pas inversibles et donc $\boxed{0 \text{ et } 1 \text{ sont des valeurs propres de } N}$. De plus, comme N et $N - I_3$ sont de rang 2, on en déduit que les sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_1(f)$ sont de dimension $3 - 2 = 1$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $N - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$ a la même rang que les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & 1-(1-2\lambda+\lambda^2)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda(2-\lambda)\end{pmatrix}$$

Ainsi, $N-\lambda I_3$ n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda=1$ ou $\lambda=0$ ou $\lambda=2$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(N)=\{0\,;1\,;2\}}$.

3. La matrice N est une matrice carrée d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres distinctes donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable}}$.

Exercice 6. On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ une application u par $u(P)=P(1)X+P(2)X^2$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de cet endomorphisme.

Solution. $u(1)=X+X^2$, $u(X)=X+2X^2$ et $u(X^2)=X+4X^2$ donc la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe un vecteur non nul $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ solution de

$$(S)\begin{cases}0=\lambda x\\ x+y+z=\lambda y\\ x+2y+4z=\lambda z\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda x=0 & L_1\\ x+(1-\lambda)y+z=0 & L_2\\ x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_3\end{cases}$$

$$(S)\iff\begin{cases}x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_1\leftrightarrow L_3\\ x+(1-\lambda)y+z=0 & L_2\\ \lambda x=0 & L_3\leftrightarrow L_1\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_1\\ -(1+\lambda)y+(\lambda-3)z=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\ -2\lambda y-\lambda(4-\lambda)z=0 & L_3\leftarrow L_3-\lambda L_1\end{cases}$$

Si $\lambda=0$ alors le système devient

$$\begin{cases}x+2y+4z=0\\ -y-3z=0\\ 0=0\end{cases}$$

qui est de rang 2 donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A}$. De plus, dans ce cas,

$$(S)\iff\begin{cases}x+2(-3z)+4z\\ y=-3z\end{cases}\iff x=2zy=-3z$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est engendré par $(2,-3,1)$ et donc $\boxed{E_0(u)=\mathrm{Vect}(X^2-3X+2)}$.

Supposons à présent $\lambda\neq 0$. On peut alors diviser la dernière équation par $-\lambda$:

$$(S)\iff\begin{cases}x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_1\\ -(1+\lambda)y+(\lambda-3)z=0 & L_2\\ 2y+(4-\lambda)z=0 & L_3\leftarrow -\frac{1}{\lambda}L_3\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_1\\ 2y+(4-\lambda)z=0 & L_2\leftrightarrow L_3\\ -(1+\lambda)y+(\lambda-3)z=0 & L_3\leftrightarrow L_2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_1\\ 2y+(4-\lambda)z=0 & L_2\\ \left(\frac{1+\lambda}{2}(4-\lambda)+\lambda-3\right)z=0 & L_3\leftarrow L_3+\dfrac{1+\lambda}{2}L_2\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+(4-\lambda)z=0 & L_1\\ 2y+(4-\lambda)z=0 & L_2\\ (\lambda^2-5\lambda+2)\,z=0 & L_3\leftarrow -2L_3\end{cases}$$

Ainsi, (S) n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + 2$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 17 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{17}}{2 \times 1} = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{17}}{2 \times 1} = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

On conclut donc que $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \left\{0\,;\, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\,;\, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}}$.

Si $\lambda = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$, on a

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + \left(4 - \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right) z = 0 \\ 2y + \left(4 - \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right) z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\left(-\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} z\right) + \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} z = 0 \\ y = -\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} z \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ est engendré par le vecteur $\left(0, -\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 1\right)$ donc $\boxed{E_{x_1}(u) = \mathrm{Vect}(X^2 - \frac{3+\sqrt{17}}{4} X)}$.

Si $\lambda = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, on a

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + \left(4 - \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right) z = 0 \\ 2y + \left(4 - \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right) z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\left(-\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} z\right) + \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} z = 0 \\ y = -\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} z \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ est engendré par le vecteur $\left(0, -\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 1\right)$ donc $\boxed{E_{x_2}(u) = \mathrm{Vect}(X^2 - \frac{3-\sqrt{17}}{4} X)}$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Calculer $f(1,1,1)$ et en déduire une valeur propre de f.

   b. Déterminer la dimension du sous-espace propre correspondant.

2. **a.** Déterminer le rang de f et en déduire la dimension de $\ker(f)$.

b. En déduire que 0 est valeur propre de f et donner la dimension du sous-espace propre $E_0(f)$.

3. Démontrer que f est diagonalisable.

Solution.

1. a. $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{f(1,1,1) = (3,3,3)}$. Ainsi, $f(1,1,1) = 3(1,1,1)$ et $(1,1,1) \neq (0,0,0)$ donc $\boxed{3 \text{ est valeur propre de } f}$.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, on résout le système :

$$(S)\begin{cases} x+y+z=3x \\ x+y+z=3y \\ x+y+z=3z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+y+z=0 & L_1 \\ x-2y+z=0 & L_2 \\ x+y-2z=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x-2y+z=0 & L_2 \\ -2x+y+z=0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-2z=0 & L_1 \\ -3y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y-3z=0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z-2z=0 \\ y=z \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

Ainsi, $E_3(f) = \text{Vect}(1,1,1)$ donc $\boxed{\dim(E_3(f)) = 1}$.

a. Les trois vecteurs colonnes sont identiques sont $\text{Im}(f) = \overrightarrow{(1,1,1)}$ et ainsi $\boxed{\text{rg}(f) = 1}$.

Par le théorème du rang, on en déduit que $\boxed{\dim(\ker f) = 3-1 = 2}$.

b. Comme $\dim(\ker(f - 0\text{Id}) = \dim(\ker f) > 0$, $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$ et $\boxed{\dim(E_0(f)) = 2}$.

2. Étant donné que $\dim(E_3(f)) + \dim(E_0(f)) = 1+2 = 3 = \dim(R^3)$, par théorème, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

Exercice 8. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le système

$$(S)\begin{cases} x+2y+4z=\lambda x \\ -2x+y=\lambda y \\ x-y-z=\lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x+2y+4z=0 & L_1 \\ -2x+(1-\lambda)y=0 & L_2 \\ x-y-(1+\lambda)z=0 & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x-y-(1+\lambda)z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x+(1-\lambda)y=0 & L_2 \\ (1-\lambda)x+2y+4z=0 & L_3 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y-(1+\lambda)z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -(1+\lambda)y-2(1+\lambda)z=0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ (3-\lambda)y+(5-\lambda^2)z=0 & L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{cases}$$

Si $\lambda = -1$ alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, -1 est valeur propre de M et $E_1(M) = \text{vect}((1, 1, -1))$.

Si $\lambda \neq -1$, on peut simplifier la deuxième ligne par $-(1 + \lambda)$:

$$(S) \iff \begin{cases} x - y - (1+\lambda)z = 0 & L_1 \\ y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{1+\lambda} L_2 \\ (3-\lambda)y + (5 - \lambda^2)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - (1+\lambda)z = 0 & L_1 \\ y + 2z = 0 & L_2 \\ (5 - \lambda^2 - 2(3-\lambda))z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - (1+\lambda)z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ (-\lambda^2 + 2\lambda - 1)z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_2 \end{cases}$$

Ainsi, le rang de S est 2 si et seulement si $-\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. Or,

$$-\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \iff -(\lambda^2 - 2\lambda + 1)^2 = 0 \iff -(\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1$$

Ainsi, 1 est valeur propre et, lorsque $\lambda = 1$, le système devient

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

qui est de rang 2 donc $\dim(E_1(M)) = 3 - 2 = 1$.

On conclut que $\text{Sp}(M) = \{-1\,;1\}$ et que $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-1}(M)) = 2 \neq 3$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Exercice 9. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a. Justifier que A est diagonalisable et puis diagonaliser A.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

2. Reprendre la question **1.** avec la matrice B.

Solution.

1. a. A est une matrice symétrique réelle donc, par le théorème spectral, A est diagonalisable.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = \lambda x \\ x + 2y + z = \lambda y \\ x + y + 2z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} (2-\lambda)x + y + z = 0 & L_1 \\ x + (2-\lambda)y + z = 0 & L_2 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x+(2-\lambda)y+z = 0 & L_2 \\ (2-\lambda)x+y+z=0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z = 0 & L_1 \\ (1-\lambda)y+(\lambda-1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (\lambda-1)y+(1-(2-\lambda)^2)z=0 & L_3 \leftarrow L_3-(2-\lambda)L_1 \end{cases}$$

et, en reconnaissant une identité remarquable : $1-(2-\lambda)^2 = (1-(2-\lambda))(1+(2-\lambda)) = (\lambda-1)(3-\lambda)$,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z = 0 & L_1 \\ (1-\lambda)y+(\lambda-1)z = 0 & L_2 \\ (\lambda-1)y+(\lambda-1)(3-\lambda)z=0 & L_3 \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$, il vient

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff z=-x-y$$

Ainsi, 1 est valeur propre de A et $E_1(A) = \{(x,y,-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$.
Si $\lambda \neq 0$, on peut simplifier la ligne 2 par $1-\lambda$ et la ligne 3 par $\lambda-1$, et il vient

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z = 0 & L_1 \\ y-z=0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda}L_2 \\ y+(3-\lambda)z=0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda-1}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z = 0 & L_1 \\ y-z=0 & L_2 \\ (4-\lambda)z=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

donc (S) n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda = 4$ et, dans ce cas,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y-2z=0 & L_1 \\ y-z=0 & L_2 \\ 0=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z-2z=0 \\ y=z \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

Ainsi, $E_4(A) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que $A^n = PD^nP^{-1}$ Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$. Déterminons P^{-1}. Pour cela, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x+z=a & L_1 \\ y+z=b & L_2 \\ -x-y+z=c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=a & L_1 \\ y+z=b & L_2 \\ -y+2z=a+c & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z=a & L_1 \\ y+z=b & L_2 \\ 3z=a+b+c & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+\frac{1}{3}(a+b+c)=a \\ y+\frac{1}{3}(a+b+c) \\ z=\frac{1}{3}(a+b+c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{1}{3}(2a-b-c) \\ y=\frac{1}{3}(-a+2b-c)=b \\ z=\frac{1}{3}(a+b+c) \end{cases}$$

Ainsi, $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}}$$

2. B est une matrice symétrique réelle donc, par le théorème spectral, B est diagonalisable. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On considère le système

$$(S)\begin{cases} y=\lambda x \\ x+z=\lambda y \\ y=\lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda x+y=0 & L_1 \\ x-\lambda y+z=0 & L_2 \\ y-\lambda z=0 & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(S)\iff \begin{cases} x-\lambda y+z=0 & L_1\leftrightarrow L_2 \\ -\lambda x+y=0 & L_2\leftrightarrow L_1 \\ y-\lambda z=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x-\lambda y+z=0 & L_1 \\ (1-\lambda^2)y+\lambda z=0 & L_2\leftarrow L_2+\lambda L_1 \\ y-\lambda z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-\lambda y+z=0 & L_1 \\ y-\lambda z=0 & L_2\leftrightarrow L_3 \\ (1-\lambda^2)y+\lambda z=0 & L_3\leftrightarrow L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-\lambda y+z=0 & L_1 \\ y-\lambda z=0 & L_2 \\ \lambda(2-\lambda^2)z=0 & L_3\leftarrow L_3-(1-\lambda^2)L_2 \end{cases}$$

Ce système n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda(2-\lambda^2)=0$ i.e. $\lambda=0$ ou $\lambda=\sqrt{2}$ ou $\lambda=-\sqrt{2}$.
Si $\lambda=0$, on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

Ainsi, $E_0(B)=\mathrm{Vect}((1,0,-1))$.
Si $\lambda=\sqrt{2}$, on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x-\sqrt{2}y+z=0 \\ y-\sqrt{2}z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-\sqrt{2}(\sqrt{2}z)+z=0 \\ y=\sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=\sqrt{2}z \end{cases}$$

Ainsi, $E_{\sqrt{2}}(B)=\mathrm{Vect}((1,\sqrt{2},1))$.
Si $\lambda=-\sqrt{2}$, on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x+\sqrt{2}y+z=0 \\ y+\sqrt{2}z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+\sqrt{2}(-\sqrt{2}z)+z=0 \\ y=-\sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-\sqrt{2}z \end{cases}$$

Ainsi, $E_{\sqrt{2}}(B)=\mathrm{Vect}((1,-\sqrt{2},1))$.
On en déduit que $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente que $A^n=PD^nP^{-1}$ Comme D est diagonale, $D^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$. Déterminons P^{-1}. Pour cela, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ \sqrt{2}y-\sqrt{2}z=b & L_2 \\ -x+y+z=c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ 2y-2z=\sqrt{2}b & L_2\leftarrow\sqrt{2}L_2 \\ 2y+2z=a+c & L_3\leftarrow L_3+L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ 2y-2z=\sqrt{2}b & L_2\leftarrow\sqrt{2}L_2 \\ 4z=a-\sqrt{2}b+c & L_3\leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+\frac{1}{4}(a-\sqrt{2}b+c)=a \\ 2y-2(\frac{1}{4}(a-\sqrt{2}b+c))=b \\ z=\frac{1}{4}(a-\sqrt{2}b+c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b+c)=\frac{1}{4}(3a+\sqrt{2}b-c) \\ y=\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b+c) \\ z=\frac{1}{4}(a-\sqrt{2}b+c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{1}{4}(2a-2c) \\ y=\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b+c) \\ z=\frac{1}{4}(a-\sqrt{2}b+c) \end{cases}$$

Ainsi, $P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}B^n &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}^n & 0\\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \sqrt{2}^n & \sqrt{2}^{n+1} & \sqrt{2}^n\\ (-\sqrt{2})^n & (-\sqrt{2})^{n+1} & (-\sqrt{2})^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{B^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2}^n+(-\sqrt{2})^n & \sqrt{2}^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & \sqrt{2}^n+(-\sqrt{2})^n\\ \sqrt{2}^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & \sqrt{2}^{n+2}+(-\sqrt{2})^{n+2} & \sqrt{2}^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1}\\ \sqrt{2}^n+(-\sqrt{2})^n & \sqrt{2}^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & \sqrt{2}^n+(-\sqrt{2})^n\end{pmatrix}}$$

Remarque : cette expression n'est valable que pour $n \geqslant 1$ car nous avons utilisé le fait que $0^n = 0$, ce qui n'est vrai que pour $n \geqslant 1$ (car $0^0 = 1$).

Exercice 10. On dispose de deux urnes A et B : l'urne A contient 2 boules rouges et 3 boules vertes, tandis que l'urne B contient 4 boules rouges et 1 boule verte. On effectue des tirages avec remise selon le protocole suivant : le premier tirage est fait dans l'urne A ; à chaque tirage, si on tire une boule rouge le tirage suivant est fait dans l'urne A, et si on tire une boule verte le tirage suivant est fait dans l'urne B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n (resp. V_n) l'évènement réalisé lorsqu'on obtient une boule rouge (resp. verte) au n-ième tirage.

1. Déterminer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(V_1)$.

2. Déterminer $\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2 \mid V_1)$, et en déduire $\mathbf{P}(R_2)$.

3. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$\mathbf{P}(R_{n+1}) = \frac{2}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{4}{5}\mathbf{P}(V_n)$$

et

$$\mathbf{P}(V_{n+1}) = \frac{3}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{1}{5}\mathbf{P}(V_n).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix}\mathbf{P}(R_n)\\ \mathbf{P}(V_n)\end{pmatrix}$.

   a. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{5}MX_n$.

   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}X_1$.

5. **a.** Démontrer que M est diagonalisable.

   b. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

   c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des expressions de $\mathbf{P}(R_n)$ et $\mathbf{P}(V_n)$ en fonction de n.

Solution.

1. Le premier tirage est effectué dans l'urne A donc, par équiprobabilité, $\boxed{\mathbf{P}(R_1) = \frac{2}{5}}$ et $\boxed{\mathbf{P}(V_1) = \frac{3}{5}}$.

2. Si R_1 est réalisé, le second tirage est effectué dans l'urne A donc, comme il y a remise, on a, comme précédemment, $\boxed{\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{2}{5}}$.

Si V_1 est réalisé, le second tirage est effectué dans l'urne B donc, par équiprobabilité, $\boxed{\mathbf{P}(R_2 \mid V_1) = \frac{4}{5}}$.

Comme R_1 et V_1 forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) + \mathbf{P}(V_1)\mathbf{P}(R_2 \mid V_1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(R_2) = \frac{16}{25}}$.

3. Comme précédemment, on a $\mathbf{P}(R_{n+1} \mid R_n) = \frac{2}{5}$ et $\mathbf{P}(R_{n+1} \mid V_n) = \frac{4}{5}$ donc, comme R_n et V_n forment un système complets d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_{n+1}) = \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(R_{n+1} \mid R_n) + \mathbf{P}(V_n)\mathbf{P}(R_{n+1} \mid V_n)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(R_{n+1}) = \frac{2}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{4}{5}\mathbf{P}(V_n)}$.

Comme R_{n+1} et V_{n+1} sont complémentaires,

$$\mathbf{P}(V_{n+1}) = 1 - \mathbf{P}(R_{n+1}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{4}{5}\mathbf{P}(V_n)\right)$$

De plus, comme R_n et V_n sont complémentaires, $\mathbf{P}(R_n) + \mathbf{P}(V_n) = 1$ donc

$$\mathbf{P}(V_{n+1}) = 1 - \mathbf{P}(R_{n+1}) = \mathbf{P}(R_n) + \mathbf{P}(V_n) - \frac{2}{5}\mathbf{P}(R_n) - \frac{4}{5}\mathbf{P}(V_n)$$

soit finalement, $\boxed{\mathbf{P}(V_{n+1}) = \frac{3}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{1}{5}\mathbf{P}(V_n)}$.

4. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n+1}) \\ \mathbf{P}(V_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{4}{5}\mathbf{P}(V_n) \\ \frac{3}{5}\mathbf{P}(R_n) + \frac{1}{5}\mathbf{P}(V_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(V_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} M X_n$$

en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition H_n : « $X_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} X_1$ ».

- **Initialisation**. $\frac{1}{5^{1-1}} M^{1-1} X_1 = \frac{1}{1} M^0 X_1 = I_2 X_1 = X_1$ donc H_1 est vraie.

- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que H_n est vraie. Alors,

$$X_{n+1} = \frac{1}{5}MX_n = \frac{1}{5}M\left(\frac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}X_1\right) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^{n-1}}(MM^{n-1})X_1 = \frac{1}{5^n}M^nX_1$$

donc H_{n+1} est vraie.

- **Conclusion**. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \frac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}X_1}.$$

5. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Le discriminant de $X^2 - 3X - 10$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0$ donc ce trinôme possède 2 racines distinctes.
On en déduit que M possède deux valeurs propres distinctes donc, comme M est d'ordre 2, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

b. Les valeurs propres de M sont les racines de $X^2 - 3X - 10$ à savoir :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = 5$$

Déterminons $E_{-2}(M)$. Pour cela, on considère le système :

$$(S) \begin{cases} 2x + 4y = -2x \\ 3x + y = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

donc $E_{-2}(M) = \text{Vect}((1, -1))$.
Déterminons $E_5(M)$. Pour cela, on considère le système :

$$(S) \begin{cases} 2x + 4y = 5x \\ 3x + y = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \iff y = \frac{3}{4}y$$

donc $E_5(M) = \text{Vect}((4, 3))$.

On conclut que $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition Q_n : « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».

- **Initialisation**. $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = M^0$ donc Q_0 est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que Q_n est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^nM = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc Q_{n+1} est vraie.

- **Conclusion**. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = 1 \times 3 - (-1) \times 4 = 7$ donc $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3(-2)^n & -4(-2)^n \\ 5^n & 5^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3(-2)^n + 4 \times 5^n & -4(-2)^n + 4 \times 5^n \\ -3(-2)^n + 3 \times 5^n & 4(-2)^n + 3 \times 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $n - 1 \in \mathbb{N}$ donc

$$M^{n-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3(-2)^{n-1} + 4 \times 5^n & -4(-2)^{n-1} + 4 \times 5^{n-1} \\ -3(-2)^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} & 4(-2)^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

et ainsi, d'après le résultat de la question **4.b.**, en remarquant que $X_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3(-2)^{n-1} + 4 \times 5^{n-1} & -4(-2)^{n-1} + 4 \times 5^{n-1} \\ -3(-2)^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} & 4(-2)^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7 \times 5^n}\begin{pmatrix} 6(-2)^{n-1} + 8 \times 5^{n-1} - 12(-2)^{n-1} + 12 \times 5^{n-1} \\ -6(-2)^{n-1} + 6 \times 5^{n-1} + 12(-2)^{n-1} + 9 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7 \times 5^n}\begin{pmatrix} 20 \times 5^{n-1} - 6(-2)^{n-1} \\ 15 \times 5^{n-1} + 6(-2)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7 \times 5^n}\begin{pmatrix} 4 \times 5^n + 3(-2)^n \\ 3 \times 5^n - 3(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(R_n) = \frac{4 \times 5^n + 3(-2)^n}{7 \times 5^n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(V_n) = \frac{3 \times 5^n - 3(-2)^n}{7 \times 5^n}}.$$

Exercice 11. On pose

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

2. Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées **A**, **B** et **C**.
On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.
Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité **B**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'évènement « le client choisit l'activité **A** le jour n » (respectivement **B** et **C**) et on note a_n (respectivement b_n et c_n) sa probabilité.

On définit également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice U_n par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Ainsi, $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $U_{n+1} = MU_n$.

b. En utilisant la relation établie en **1.b.**, en déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \dfrac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. En déduire que, pour tout entier n non nul,

$$\begin{cases} a_n = c_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}.$$

Solution.

1. a. On considère le système

$$(S)\begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ x-y=b & L_2 \\ x-z=c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ -2y-z=b-a & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -y-2z=c-a & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ -2y-z=b-a & L_2 \\ y+2z=a-c & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ y+2z=a-c & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -2y-z=b-a & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ y+2z=a-c & L_2 \\ 3z=a+b-2c & L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+\frac{1}{3}(a+b-2c)=a \\ y+2\times\frac{1}{3}(a+b-2c)=a-c \\ z=\frac{1}{3}(a+b-2c) \end{cases} \iff \begin{cases} x+\frac{1}{3}(a-2b+c)=\frac{1}{3}(2a-b+2c) \\ y=\frac{1}{3}(a-2b+c) \\ z=\frac{1}{3}(a+b-c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{1}{3}(a+b+c) \\ y=\frac{1}{3}(a-2b+c) \\ z=\frac{1}{3}(a+b-2c) \end{cases}$$

Comme le système admet une unique solution, $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$.

b. Ainsi,

$$PDP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements donc, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid C_n)\\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(b_n + c_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n)\\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \mathbf{P}(C_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid C_n)\\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 0\\ &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}b_n + c_n\\ a_n + c_n\\ a_n + b_n\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{U_{n+1} = MU_n}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition H_n : « $U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation.**

$$\frac{1}{3}PD^0\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = U_1$$

donc H_1 est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}U_{n+1} = MU_n = (PDP^{-1})U_n &= (PDP^{-1})\left(\frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{3}PD(P^{-1}P)D^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}PDD^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}PD^n\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc H_{n+1} est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la matrice D est diagonale, $D^{n-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$

donc

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et on conclut que

$$\boxed{\begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{cases}}.$$

Exercice 12. On étudie une partie de la surface du fond de l'océan sur laquelle poussent uniquement deux algues : l'algue A et l'algue B. La quantité totale d'algues est supposée constante au cours du temps, égale à 1000 algues. On sait que, chaque année,

- 5% des algues A et 10% des algues B meurent ;
- la moitié des algues qui meurent sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre d'algues A en vie à la fin de l'année n et b_n le nombre d'algues B en vie à la fin de l'année n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

où $M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M, de n et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que 1 est une valeur propre de M.

4. Montrer que M admet une autre valeur propre $\lambda \in [0\,;1[$.

5. En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, u_0, v_0, n et D.

7. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. On note a_∞ et b_∞ leurs limites.

8. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

9. Donner deux méthodes différentes pour calculer $a_\infty + b_\infty$.

10. En déduire que $u_0 = \dfrac{2000}{3}$.

11. Montrer que $a_\infty = \dfrac{2000}{3}$ et $b_\infty = \dfrac{1000}{3}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Au cours de l'année n, $0{,}05a_n$ algues A et $0{,}1b_n$ algues B meurent. Ainsi, le nombre total d'algues qui meurent est $0{,}05a_n + 0{,}1b_n$. Le moitié de celles-ci sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B donc

$$a_{n+1} = a_n - 0{,}05a_n + 0{,}5(0{,}05a_n + 0{,}1b_n) = 0{,}975a_n + 0{,}05b_n$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0{,}1b_n + 0{,}5(0{,}05a_n + 0{,}1b_n) = 0{,}025a_n + 0{,}95b_n.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}975a_n + 0{,}05b_n \\ 0{,}025a_n + 0{,}95b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation.** $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ donc H_0 est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

donc H_{n+1} est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}}.$$

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{cases} 0{,}975x + 0{,}05y = x \\ 0{,}025x + 0{,}95y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}025x + 0{,}05y = 0 \\ 0{,}025x - 0{,}05y = 0 \end{cases} \iff 0{,}05y = 0{,}025x \iff y = 0{,}5x$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne non nulle telle que $MX = X$ donc on conclut que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 0{,}975 - \lambda & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 - \lambda \end{vmatrix} = (0{,}975 - \lambda)(0{,}95 - \lambda) - 0{,}025 \times 0{,}05 \\ &= \lambda^2 - 1{,}925\lambda + 0{,}925 \end{aligned}$$

Comme 1 est valeur propre, 1 est racine du trinôme $X^2 - 1{,}925X + 0{,}925$ et ainsi ce trinôme se factorise par $X - 1$. On obtient $X^2 - 1{,}925X + 0{,}925 = (X - 1)(X - 0{,}925)$. Ainsi, l'autre valeur propre de M est $\boxed{\lambda = 0{,}925}$.

5. Comme M est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet 2 valeurs propres distinctes, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$. On a vu dans la question **3.** que $E_1(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right)$. Déterminons $E_{0{,}925}(M)$. Pour cela, on considère le système :

$$\begin{cases} 0{,}975x + 0{,}05y = 0{,}925x \\ 0{,}025x + 0{,}95y = 0{,}925y \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}05x + 0{,}05y = 0 \\ 0{,}025x + 0{,}025y = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

donc $E_{0{,}925}(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}925 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1}M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Or, comme $M = PDP^{-1}$, par propriété, $M^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1}(PD^nP^{-1}) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = (P^{-1}P)D^n \left(P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}\right) = I_2 D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}$.

7. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}925^n \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}925^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0{,}925 v_0 \end{pmatrix}$$

donc $u_n = u_0$ et $v_n = 0{,}925^n v_0$. Ainsi, (u_n) est constante égale à u_0 et (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}925 \in [0\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Or, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ 0{,}5u_n + v_n \end{pmatrix}$ donc $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = 0{,}5u_n + v_n$. Ainsi, par somme de limites, on en déduit que (a_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = u_0}$ et que (b_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0{,}5u_0}$.

8. On a vu que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0{,}5u_0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \in E_1(M)$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

9. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1000$ donc, par passage à la limite, $a_\infty + b_\infty = 1000$. D'autre part, $a_\infty + b_\infty = u_0 + 0{,}5u_0 = 1{,}5u_0$. Ainsi, $a_\infty + b_\infty = 1000$. D'autre part, $\boxed{a_\infty + b_\infty = 1000 = 1{,}5u_0}$.

10. On en déduit que $u_0 = \dfrac{1000}{1{,}5}$ i.e. $\boxed{u_0 = \dfrac{2000}{3}}$.

11. D'après ce qui précède, $\boxed{a_\infty = u_0 = \dfrac{2000}{3} \text{ et } b_\infty = 0{,}5u_0 = \dfrac{1000}{3}}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = A$.

1. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

a. Exprimer A^2X en fonction de λ et X.

b. En déduire que $\lambda^2 = \lambda$.

c. Quelles sont les valeurs propres possibles pour λ ?

2. **a.** Démontrer que $\ker(A - I) = \operatorname{Im}(A)$. On pourra procéder par double inclusion.

b. À l'aide du théorème du rang, en déduire que A est diagonalisable.

Solution.

1. **a.** Par définition, $AX = \lambda X$ donc $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X)$ donc $\boxed{A^2X = \lambda^2 X}$.

b. Par hypothèse, $A^2 = A$ donc $A^2X = AX = \lambda X$ et ainsi $\lambda^2 X = \lambda X$. Dès lors, $(\lambda^2 - \lambda)X = 0$ donc, comme X n'est pas nul, on en déduit que $\lambda^2 - \lambda = 0$ i.e. $\boxed{\lambda^2 = \lambda}$.

c. Il s'ensuit que $\lambda^2 - \lambda = 0$ donc $\lambda(\lambda - 1) = 0$ et ainsi $\boxed{\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1}$.

2. **a.** Soit $X \in \ker(A - I_n)$. Alors, $(A - I_n)X = 0$ donc $AX - X = O$ et ainsi $X = AX$ ce qui prouve que $X \in \operatorname{Im}(A)$. On a donc montré que $\ker(A - I_n) \subset \operatorname{Im}(A)$.

Inversement, soit $X \in \operatorname{Im}(A)$. Alors, il existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AY$. Dès lors, $(A - I_n)X = AX - X = A(AY) - X = A^2Y - X = AY - X = X - X = 0$ donc $X \in \ker(A - I_n)$. On a donc montré que $\operatorname{Im}(A) \subset \ker(A - I_n)$.

Par le principe de double inclusion, on conclut que $\boxed{\ker(A - I_n) = \operatorname{Im}(A)}$.

b. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{Im}(A)) = n$ donc $\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(A - I_n)) = n$. Ainsi, $\dim(E_0(A)) + \dim(E_1(A)) = n$ donc, par propriété, A est diagonalisable. (Remarque. Il se peut que $E_0(A)$ soit réduit à $\{0\}$ auquel car $\ker(A - I_n) = \mathbb{R}^n$ donc $A = I_n$ ou que $E_1(A) = \{0\}$ auquel cas $\ker(A) = \mathbb{R}^n$ donc $A = 0_n$.)

Exercice 14. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(K)$ diagonalisables telles que $\operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(M)) = 1$.

Solution. Soit M une matrice diagonalisable admet une unique valeur propre λ. Alors, il existe une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$.
Dès lors, $M = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda(PI_nP^{-1}) = \lambda(PP^{-1}) = \lambda I_n$.

Ainsi, les seules matrices possibles sont les matrices de la forme λI_n et, inversement, de telles matrices sont diagonales dont diagonalisables. Ainsi, on conclut que l'ensemble cherché est $\boxed{\{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(I_n)}$.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \operatorname{Sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \operatorname{Sp}(f)$.

Solution. Supposons que $0 \notin \operatorname{Sp}(f)$. Alors, f est injective donc, comme f est endomorphisme d'un espace de dimension finie, f est un isomorphisme. Par suite, f^n est également un isomorphisme par composition d'isomorphisme donc f^n est injective donc $\ker(f^n) = \{0\}$ et ainsi 0 n'est pas valeur propre de f^n. Par contraposée, si 0 est valeur propre de f^n alors 0 est aussi valeur propre de f.

Autre solution. Supposons que $0 \in \operatorname{Sp}(f^n)$ et que f est injective. Comme $0 \in \operatorname{Sp}(f^n)$, il existe un vecteur non nul x tel que $f^n(x) = 0$. Alors, $f(f^{n-1}(x)) = 0$ donc, comme f est injective, $f^{n-1}(x) = 0$. En réitérant le procédé, on en déduit successivement que $f^{n-2}(x) = 0$, $f^{n-3}(x) = 0$, ..., $f(x) = 0$ et donc, comme f est injective, $x = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, f n'est pas injective, ce qui revient à dire que 0 est valeur propre de f. (Cette autre solution a l'avantage de ne pas utiliser la dimension finie.)