♦ Corrigés des exercices du chapitre 10

Exercice 1. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer C pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On utilisera une intégration par parties.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 5)$, $\mathbf{P}(X \in]0\,;2[)$, $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$ et, pour tout réel a fixé, $\mathbf{P}(X = a)$.

Solution.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ par composition et quotient de fonctions continues et la fonction nulle est continue sur $]-\infty\,;0[$ donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$, $1+x \geqslant 1$ donc $\ln(1+x) \geqslant 0$ et $(x+1)^2 \geqslant 0$ don $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, f est à valeurs positives si et seulement si $C \geqslant 0$. Enfin, comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$, pour tout réel $A > 0$,

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Considérons les fonctions $u : x \longmapsto C\ln(1+x)$ et $v : x \longmapsto -\dfrac{1}{x+1}$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 0$, $u'(x) = \dfrac{C}{1+x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[C\ln(1+x) \times \left(-\frac{1}{x+1}\right)\right]_0^A - \int_0^A \frac{C}{x+1} \times \left(-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{C\ln(1+A)}{A+1} + \int_0^A \frac{C}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{C\ln(1+A)}{A+1} + \left[-\frac{C}{x+1}\right]_0^A \\ &= -\frac{C\ln(1+A)}{A+1} - \frac{C}{A+1} + C\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} A+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{C}{A+1} = 0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln(1+A)}{1+A} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = C$ donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{C\ln(1+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = C$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } C = 1}$.

2. Par définition, pour tout réel t, $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si $t < 0$, $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Si $t \geqslant 0$, en intégrant par parties comme précédemment,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(1+x)}{x+1}\right]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\ln(1+t)}{t+1} - 0 + \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^t = -\frac{\ln(1+t)}{t+1} - \frac{1}{1+t} - (-1)$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ F_X(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{\ln(1+t)}{1+t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

3. $\mathbf{P}(X \leqslant 5) = F_X(5) = 1 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{\ln(6)}{6}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 5) = \dfrac{5 - \ln(6)}{6}}$.

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$,

$$\mathbf{P}(X \in \,]0\,;2[) = \mathbf{P}(X < 2) = \mathbf{P}(X \leqslant 2) = F_X(2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{\ln(3)}{3}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X \in \,]0\,;2[) = \dfrac{2 - \ln(3)}{3}}$.

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 0) = 0}$.

Comme X est une variable aléatoire à densité, $\boxed{\text{pour tout réel } a,\ \mathbf{P}(X = a) = 0}$.

Exercice 2. Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f soit une densité de probabilité.

On suppose cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice et on considère une variable aléatoire X admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Indication. On utilisera le fait que, pour tout réel x, $2x = 2x + 2 - 2$ et on utilisera la linéarité de l'intégrale.

4. On cherche dans cette question à déterminer la variance de X.

a. Déterminer $\mathbf{E}((X+1)^2)$, $\mathbf{E}(2X)$ et $\mathbf{E}(1)$.

b. En déduire $\mathbf{E}(X^2)$.

c. Déterminer alors la valeur de $\mathbf{V}(X)$.

Solution.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{c}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0\,;1]$ car c'est une fonction rationnelle. De plus, la fonction nulle est continue sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(1+x)^2 \geqslant 0$ donc f est à valeurs positives si et seulement si $c \geqslant 0$. De plus, comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[0\,;1]$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{c}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{c}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{c}{2} - (-c) = \frac{c}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } c = 2}$.

2. Par définition, pour tout réel t, $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si $t < 0$ alors $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}x = 0$.
Si $t \in [0\,;1]$ alors, comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$,

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{1+x}\right]_0^t = -\frac{2}{1+t} - (-2) = \frac{2t}{1+t}.$$

Si $t > 1$, comme f est nulle sur en dehors de $[0\,;1]$, $F_X(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = 1$.

Ainsi, $\boxed{F_X : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2t}{1+t} & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}}$.

3. Comme f est nulle en dehors de $[0\,;1]$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ donc f admet une espérance égale à

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2x+2-2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2(x+1)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x}_{=1}$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x - 1 = [2\ln(1+x)]_0^1 - 1 = 2\ln(2) - 2\times 0 - 1$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(X) = 2\ln(2) - 1}$.

4. a. Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}((X+1)^2) = \int_{\mathbb{R}} (x+1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2(x+1)^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\,\mathrm{d}x = 2$$

donc $\boxed{\mathbf{E}((X+1)^2) = 2}$. Ensuite, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(2X) = 2\mathbf{E}(X)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(2X) = 4\ln(2) - 2}$ et comme 1 est constante, $\boxed{\mathbf{E}(1) = 1}$.

b. Étant donné que $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, $X^2 = (X+1)^2 - 2X - 1$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}((X+1)^2) - \mathbf{E}(2X) - \mathbf{E}(1) = 2 - (4\ln(2) - 2) - 1$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X^2) = 3 - 4\ln(2)}$.

c. Comme X^2 admet une espérance, d'après la formule de König-Huygens, X admet une variance et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 3 - 4\ln(2) - (2\ln(2)-1)^2 = 3 - 4\ln(2) - (4\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 1)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{V}(X) = 2 - 4\ln(2)^2}$.

Exercice 3. Soit un réel $a > 0$. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} x^{-\frac{a+1}{a}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité
On considère une variable aléatoire X admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles X a une espérance, puis calculer alors $\mathbf{E}(X)$.

Solution.

1. Pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) = \dfrac{1}{a}\exp\left(-\frac{a+1}{a}\ln(x)\right)$ donc f est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$ comme composée de fonctions continue. De plus, f est nulle sur $]-\infty\,;1[$ donc f est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout reél $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{A} \frac{1}{a}x^{-\frac{a+1}{a}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{a} \times \frac{1}{-\frac{a+1}{a}+1}x^{-\frac{a+1}{a}+1}\right]_1^A \\ &= \left[\frac{1}{a} \times \frac{1}{\frac{-(a+1)+a}{a}}x^{\frac{-(a+1)+a}{a}}\right]_1^A \\ &= \left[\frac{1}{a} \times \frac{1}{-\frac{1}{a}}x^{-\frac{1}{a}}\right]_1^A = -A^{-\frac{1}{a}} - (-1) = 1 - A^{-\frac{1}{a}}.\end{aligned}$$

Comme $a > 0$, $-\frac{1}{a} < 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{-\frac{1}{a}} = 0$ et ainsi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On conclut que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. Par définition, pour tout réel t, $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si $t < 1$ alors $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Si $t \geqslant 1$, d'après le calcul précédent, $F_X(t) = \displaystyle\int_{1}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - t^{-\frac{1}{a}}$.

Ainsi, $\boxed{F_X : t \longmapsto \begin{cases} 1 - t^{-\frac{1}{a}} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

3. La variable X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|\,f(x)\,\mathrm{d}x$ converge i.e. si et seulement si $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x \times \frac{1}{a}x^{-\frac{a+1}{a}}\,\mathrm{d}x$ converge. Or, pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^{-\frac{a+1}{a}} = \dfrac{1}{a}x^{-\frac{a+1}{a}+1} = \dfrac{1}{a}x^{-\frac{1}{a}}$ et, par le critère de Riemann, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^{-\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\dfrac{1}{a} > 1$ i.e. $a < 1$. Ainsi, X admet une espérance si et seulement si $a \in\,]0\,;1[$ et, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{1}{a}x^{-\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{a} \times \frac{1}{-\frac{1}{a}+1}x^{-\frac{1}{a}+1}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{a-1}\left(A^{1-\frac{1}{a}} - 1\right).$$

Comme $\dfrac{1}{a} > 1$, $1 - \dfrac{1}{a} < 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{1-\frac{1}{a}} = 0$ et ainsi $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{1-a}}$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On va montrer dans cette question que X admet une espérance. On admettra pour cela que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

a. Soit $x \geqslant 0$. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$.

4. Notons $Y = X^2$. On veut montrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

a. Déterminer la fonction de répartition de Y, en utilisant l'expression de la fonction de répartition de X trouvée à la question **2.**.

b. Dériver la fonction de répartition de Y, puis conclure.

Solution.

1. La fonction f est nulle sur $]-\infty\,;0[$ et continue sur $[0\,;+\infty[$ par composition et produit de fonctions continues. Ainsi, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \geqslant 0$ donc f est à valeur positives. Enfin, pour tout réel $A > 0$,

$$\int_{-\infty}^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A = -\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$$

donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. Par définition, pour tout réel t, $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si $t < 0$ alors $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Si $t \geqslant 0$, d'après le calcul précédent, $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$.

Ainsi, $\boxed{F_X : t \longmapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

3. **a.** Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[t \times \left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]_0^x - \int_0^x 1 \times \left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t = +\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$.

b. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |t|\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme f est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$, ceci équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ donc $\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Ainsi, X admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

4. a. Pour tout réel t, $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leqslant t) = \mathbf{P}(X^2 \leqslant t)$. Si $t < 0$ alors $(X^2 \leqslant t)$ est un évènement impossible donc $F_Y(t) = 0$. Si $t \geqslant 0$ alors $(X^2 \leqslant t) = (|X| \leqslant \sqrt{t}) = (-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t})$ donc, comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$,

$$F_Y(t) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{P}(X \leqslant \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{t}^2}{2}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}.$$

Ainsi, $\boxed{F_Y : t \longmapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$

b. La fonction F_Y est dérivable sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel $t < 0$, $F_Y'(t) = 0$, et, pour tout réel $t > 0$, $F_Y'(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.
Ainsi, pour tout $t \neq 0$, F_Y' coïncide avec la densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\frac{1}{2})}$.

Exercice 5. On choisit au hasard un nombre réel dans $[0\,;10]$ et on note X la variable aléatoire égale au nombre choisi.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit inférieur ou égal à 3 ?
3. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit un entier naturel ?
4. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement supérieur à sa racine carrée ?
5. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit solution de l'inéquation $x^2 - 10x + 21 \leqslant 0$?

Solution.

1. Par convention, X suit une loi uniforme sur $[0\,;10]$.
2. Pour tout réel t, $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } x \in [0\,;10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Ainsi, si $t < 0$ alors $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}x = 0$, si $t \in [0\,;10]$ alors $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{10}$ et si $t > 10$ alors $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = 1$. On conclut que $\boxed{F_X : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t}{10} & \text{si } t \in [0\,;10] \\ 1 & \text{si } t > 10 \end{cases}}$.
3. La probabilité que le nombre choisi soit inférieur ou égal à 3 est $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 3) = F_X(3) = \frac{3}{10}}$.
4. La probabilité que le nombre choisi soit un entier naturel est $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=0}^{10} \{X = i\}\right)$. Comme les évènements $\{X = i\}$ sont deux à deux incompatibles, cette probabilité est égale à $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} \mathbf{P}(X = i)$. Mais, pour tout réel x, $\mathbf{P}(X = x) = 0$ donc la probabilité cherchée est $\boxed{\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=0}^{10} \{X = i\}\right) = 11 \times 0 = 0}$.
5. Un réel positif x est strictement supérieur à sa racine carrée si et seulement s'il est strictement supérieur à 1 donc la probabilité que le nombre choisi soit strictement supérieur à sa racine carrée est $\boxed{\mathbf{P}(X > 1) = 1 - F_X(1) = \frac{9}{10}}$.

6. Pour tout réel x, $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$ donc les racines du trinôme $x^2-10x+21$ sont 3 et 7. Comme son coefficient dominant est $a=1>0$, on en déduit que $x^2-10x+21 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [3\,;7]$. Ainsi, la probabilité que le nombre choisi soit solution de l'inéquation $x^2-10x+21 \leqslant 0$ est $\boxed{\mathbf{P}(X \in [3\,;7]) = F_X(7)-F_X(3) = \frac{2}{5}}$.

Exercice 6. Dans cet exercice, on arrondira les probabilités au millième. Une usine fabrique des machines à laver. La durée de vie de chaque machine (comptée en années à partir de sa fabrication) est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On observe qu'au bout de 4 ans, environ 67% des machines fonctionnent encore. Déterminer la valeur de λ.
2. Quelle est la durée de vie moyenne d'une machine produite par cette usine ?
3. Calculer la probabilité qu'une machine fonctionne encore au bout de 10 ans.
4. Paul a acheté une machine il y a 3 ans, et elle fonctionne encore. Quelle est la probabilité que dans 10 ans elle fonctionne encore ? Que remarque-t-on ? Interpréter.

Solution.

1. On déduit de l'énoncé que $\mathbf{P}(D \geqslant 4) \approx 0{,}67$. Or,

$$\mathbf{P}(D \geqslant 4) = \int_4^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_4^x = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-4\lambda} = \mathrm{e}^{-4\lambda}$$

car $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$. Ainsi, $\mathrm{e}^{-4\lambda} \approx 0{,}67$ donc $-4\lambda \approx \ln(0{,}67)$ soit $\lambda \approx \dfrac{\ln(0{,}67)}{-4}$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\lambda \approx 0{,}1}$.

2. La durée de vie moyenne d'une machine est $\dfrac{1}{\lambda}$ soit environ $\boxed{10 \text{ ans}}$.
3. La probabilité qu'une machine fonctionne encore au bout de 10 ans est

$$\mathbf{P}(D \geqslant 10) = \int_{10}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{10}^x = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-10\lambda} = \mathrm{e}^{-10\lambda}$$

donc, comme $\lambda \approx 0{,}1$, la probabilité qu'une machine fonctionne encore au bout de 10 ans est environ $\boxed{\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368}$.

4. On cherche $\mathbf{P}(D \geqslant 13 \mid D \geqslant 3)$. Or,

$$\mathbf{P}(D \geqslant 13 \mid D \geqslant 3) = \frac{\mathbf{P}(D \geqslant 13) \cap (D \geqslant 3)}{\mathbf{P}(D \geqslant 3)} = \frac{\mathbf{P}(D \geqslant 13)}{\mathbf{P}(D \geqslant 3)}$$

car $(D \geqslant 13) \subset (D \geqslant 3)$. Par des calculs similaires, aux précédents, on obtient que $\mathbf{P}(D \geqslant 13) = \mathrm{e}^{-13\lambda}$ et $\mathbf{P}(D \geqslant 3) = \mathrm{e}^{-3\lambda}$ donc

$$\mathbf{P}(D \geqslant 13 \mid D \geqslant 3) = \frac{\mathrm{e}^{-13\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}} = \mathrm{e}^{-10\lambda} \approx \mathrm{e}^{-1}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(D \geqslant 13 \mid D \geqslant 3) = \mathbf{P}(D \geqslant 10)}$. Ainsi, la probabilité d'avoir une durée de vie supplémentaire d'au moins 10 ans est la même que la probabilité initiale d'avoir une durée vie d'au moins 10 ans. Ceci traduit le fait que la loi exponentielle est sans mémoire (ou sans vieillissement) : à chaque instant t_0, la probabilité d'avoir une durée de vie supplémentaire de x années est la même et elle est égale à la probabilité initiale d'avoir une durée de vie d'au moins x années.

Exercice 7. Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que la probabilité que la durée de vie de ce composant soit inférieure à 3 ans est 0,26.Déterminer la valeur exacte du réel λ.
   Dans la suite de l'exercice, on prendre $\lambda = 0{,}1$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. Soit un réel $a > 0$. Déterminer $\mathbf{P}(X \geqslant a)$.
4. Le composant est encore en état de fonctionnement au bout de 4 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore au moins 3 années supplémentaires ?
5. Un grand nombre de composants identiques sont mis en fonctionnement en même temps. Après combien d'années complètes de fonctionnement peut-on estimer qu'au moins trois quarts de ces composants seront en panne ?

Solution.

1. D'après l'énoncé, $P(X \leqslant 3) = 0{,}26$. Or,
$$P(X \leqslant 3) = \int_0^3 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^3 = 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda}.$$
Ainsi, $1 - \mathrm{e}^{-3\lambda} \Leftrightarrow 0{,}26$ donc $-3\lambda = 0{,}74$ soit $-3\lambda = \ln(0{,}74)$ et ainsi $\lambda = \dfrac{\ln(0{,}74)}{-3}$. On conclut que la valeur exacte de λ est $\boxed{\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}74)}{3}}$.
2. Par théorème, l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{0{,}1}$ i.e. $\boxed{E(X) = 10}$. On en déduit que la durée de vie moyenne d'un moteur est 10 ans.
3. On a
$$\mathbf{P}(X \geqslant a) = \int_a^{+\infty} 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right]_a^x = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-0{,}1x} - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}1a}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}1a}$$
donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant a) = \mathrm{e}^{-0{,}1a}}$.
4. On cherche $\mathbf{P}(X \geqslant 7 \mid X \geqslant 4)$. Or,
$$\mathbf{P}(X \geqslant 7 \mid X \geqslant 4) = \frac{\mathbf{P}(X \geqslant 7) \cap (X \geqslant 4)}{\mathbf{P}(X \geqslant 4)} = \frac{\mathbf{P}(X \geqslant 7)}{\mathbf{P}(X \geqslant 4)} = \frac{\mathrm{e}^{-0{,}1\times 7}}{\mathrm{e}^{-0{,}1\times 4}} = \mathrm{e}^{-0{,}1\times 3}$$
Ainsi, $\mathbf{P}(X \geqslant 7 \mid X \geqslant 4) = \mathrm{e}^{-0{,}3} = \mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X < 3)$. Et d'après l'énoncé, $\mathbf{P}(X < 3) = 0{,}26$ donc <u>la probabilité que le moteur n'ait pas de panne dans les 3 prochaines années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 4 ans est 0,74</u>.
5. On cherche le temps a tel que la probabilité qu'un appareil soit en panne dépasse $\frac{3}{4}$. On résout donc
$$\mathbf{P}(X \leqslant a) \geqslant \frac{3}{4} \iff 1 - \mathbf{P}(X > a) \geqslant \frac{3}{4} \iff \mathbf{P}(X > a) \leqslant \frac{1}{4} \iff \mathrm{e}^{-0{,}1a} \leqslant \frac{1}{4}$$
$$\iff -0{,}1a \leqslant \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff a \geqslant \frac{\ln(\frac{1}{4})}{0{,}1} \iff a \geqslant 10\ln(4)$$
Or, $10\ln(4) \approx 13{,}86$ donc on peut estimer qu'après 14 années de fonctionnement, $\frac{3}{4}$ des moteurs seront en panne.

Exercice 8. Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a. comprise entre 50 et 100 km ;
   b. supérieure à 300 km.
2. Déterminer la distance moyenne parcourue sans incident.
3. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. Si d est un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Solution.

1. **a.** La probabilité que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 km et 100 km est :

$$\mathbf{P}(50 \leqslant D \leqslant 100) = \int_{50}^{100} \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{1}{82}t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{82}t}\right]_{50}^{100} = -\mathrm{e}^{-\frac{100}{82}} - \left(-\mathrm{e}^{-\frac{50}{82}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{25}{41}} - \mathrm{e}^{-\frac{50}{41}}$$

   donc $\boxed{\mathbf{P}(50 \leqslant D \leqslant 100) \approx 0{,}248}$.

   b. La probabilité que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 300 km est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D > 300) &= 1 - P(0 \leqslant D \leqslant 300) = 1 - \int_{0}^{300} \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{1}{82}t}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{82}t}\right]_{0}^{300} = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\frac{300}{82}} - (-1)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{150}{41}}\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\mathbf{P}(D > 300) \approx 0{,}026}$.

2. La distance moyenne parcourue sans incident est $\boxed{\mathbf{E}(D) = \frac{1}{\lambda} = 82 \text{ km}}$.

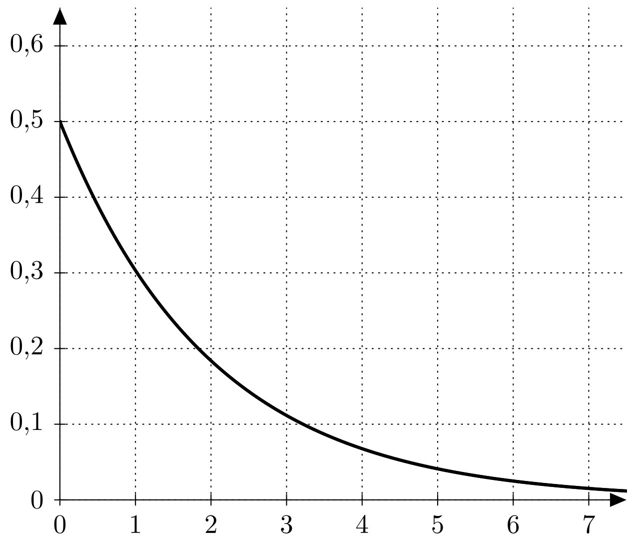
3. **a.** Effectuer un trajet pour un autocar constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(X > d)$ en prenant comme succès : « l'autocar ne subit aucun incident au cours des d premiers kilomètres ».
   Or,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > d) &= 1 - P(X \leqslant d) = \int_{d}^{+\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lim_{x \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{d}^{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(-\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda d}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\lambda d}.\end{aligned}$$

   Ainsi, l'épreuve de Bernoulli a pour paramètre $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   Effectuer des trajets pour les N_0 autocars de l'entreprise revient à répéter N_0 fois cette épreuve de façon identique et indépendante : cela constitue donc un schéma de Bernoulli.
   Ainsi, la variable aléatoire X_d qui compte le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres suit une loi $\boxed{\mathscr{B}(\mathrm{N}_0, \mathrm{e}^{-\lambda d})}$.

b. Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres est $\boxed{\mathbf{E}(X_d) = N_0 e^{-\lambda d}}$.

Exercice 9. La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. La courbe de f, la fonction densité associée, est représentée ci-contre.



1. En expliquant sa démarche, déterminer graphiquement, à 0,1 près,
   a. la valeur de λ ;
   b. la probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure à 1 an.
2. On suppose que $\mathbf{E}(X) = 2$.
   a. Interpréter, dans le cadre de l'exercice, la valeur de $\mathbf{E}(X)$.
   b. Calculer la valeur de λ.
   c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
3. Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On suppose que les durées de vie D_1 et D_2 des deux composants sont des variables aléatoires indépendantes. Deux montages possibles sont envisagés.
   a. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer, arrondie à 10^{-2} près, la probabilité que le circuit A soit défaillant avant deux ans.
   b. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer, arrondie à 10^{-2} près, la probabilité que le circuit B soit défaillant avant deux ans.

Solution.

1. **a.** La valeur de λ est l'image de 0 par la densité donc $\boxed{\lambda \approx 0{,}5}$.
   b. La valeur de $\mathbf{P}(X \leqslant 1)$ est l'aire sous la courbe de f entre 0 et 1. On peut approcher cette aire par l'aire du trapèze OABC avec A$(1\,;0)$, B$(1\,;0{,}3)$ et C$(0\,;0{,}5)$ qui vaut $\dfrac{(0{,}3 + 0{,}5) \times 1}{2}$ soit 0,4. On a donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 1) \approx 0{,}4}$.
2. **a.** $\mathbf{E}(X) = 2$ signifie ici que la durée de vie moyenne d'un composant électronique est 2 ans.
   b. Par théorème $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \dfrac{1}{\mathbf{E}(X)}$ soit $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{2}}$.
3. **a.** On a

$$\mathbf{P}(X \leqslant 2) = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^2 = -e^{-2\lambda} - (-e^0) = 1 - e^{-2\lambda}$$

c'est-à-dire $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63}$.
La probabilité que le composant soit défaillant dans les deux premières années est environ 0,63.

4. **a.** Si les composants sont en parallèles, la probabilité que le circuit A soit défaillant avant deux ans est $\mathbf{P}(\{D_1 \leqslant 2\} \cap \{D_2 \leqslant 2\})$. Or, par hypothèse, D_1 et D_2 sont indépendantes donc $\mathbf{P}(\{D_1 \leqslant 2\} \cap \{D_2 \leqslant 2\}) = \mathbf{P}(D_1 \leqslant 2) \times \mathbf{P}(D_2 \leqslant 2) = 0{,}63^2$ donc la probabilité que le circuit A soit défaillant avant deux ans est environ 0,40.

b. Si les composants sont en série, la probabilité que le circuit A soit défaillant avant deux ans est $\mathbf{P}(\{D_1 \leqslant 2\} \cup \{D_2 \leqslant 2\})$. Or,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{D_1 \leqslant 2\} \cup \{D_2 \leqslant 2\}) &= \mathbf{P}(D_1 \leqslant 2) + \mathbf{P}(D_2 \leqslant 2) - \mathbf{P}(\{D_1 \leqslant 2\} \cap \{D_2 \leqslant 2\}) \\ &= 2 \times 0{,}63 - 0{,}63^2\end{aligned}$$

donc la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an est environ 0,86.

Exercice 10. Soit a un réel strictement positif.

1. Si U est une variable suivant la loi uniforme $\mathscr{U}(]0,1[)$, prouver que $X = -\frac{1}{a}\ln(1-U)$ est une variable à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

2. Compléter la fonction ci-dessous, écrite en Python, qui prend en entrée a et qui retourne une simulation d'une variable exponentielle de paramètre a.

```
from math import log
from random import random
def varexpo(a):
  U=random()
  X=  ......................
  return  ..................
```

Solution.

1. Déterminons la fonction de répartition de X. Soit un réel t. Alors, comme $a > 0$ et comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \mathbf{P}\left(-\frac{1}{a}\ln(1-U) \leqslant t\right) &= \mathbf{P}\left(\ln(1-U) \geqslant -at\right) \\ = \mathbf{P}\left(1-U \geqslant \mathrm{e}^{-at}\right) = \mathbf{P}\left(-U \geqslant \mathrm{e}^{-at} - 1\right) &= \mathbf{P}\left(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-at}\right).\end{aligned}$$

Si $t < 0$ alors $at < 0$ donc $-at > 0$ et ainsi $\mathrm{e}^{-at} > \mathrm{e}^0 = 1$. Par suite, $1 - \mathrm{e}^{-at} < 0$ donc $\mathbf{P}\left(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-at}\right) = 0$.
Si $t > 0$ alors $at > 0$ donc $-at < 0$ et ainsi $0 < \mathrm{e}^{-at} < \mathrm{e}^0 = 1$ donc

$$\mathbf{P}\left(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-at}\right) = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-at}} 1\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-at}.$$

On conclut donc que $F_X : t \longmapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-at} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$. Ainsi, F_X est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et, pour tout $t < 0$, $F_X'(t) = 0$ et F_X est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$, $F_X'(t) = a\mathrm{e}^{-at}$. La fonction F_X' coïncide avec la densité d'une loi exponentielle de paramètre a sur $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{E}(a)}$.

2.

```
from math import log
from random import random
def varexpo(a):
  U=random()
  X=-1/a*log(1-U)
  return  X
```

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note F sa fonction de répartition. On donne $F(0{,}5) \approx 0{,}691$, $F(1) \approx 0{,}841$, $F(1{,}5) \approx 0,933$, $F(2) \approx 0{,}977$.

Déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des probabilités suivantes :

$\mathbf{P}(X < 0)$	$\mathbf{P}(X < 1)$	$\mathbf{P}(X \leqslant -1{,}5)$	$\mathbf{P}(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$
$\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1)$	$\mathbf{P}(X \geqslant -1)$	$\mathbf{P}(-0{,}5 < X < 1{,}5)$	$\mathbf{P}(-2 \leqslant X \leqslant -1)$

Solution.

- Par symétrie de la densité par rapport à l'axe des ordonnées, $\mathbf{P}(X < 0) = 0{,}5$.
- $\mathbf{P}(X < 1) = \mathbf{P}(X \leqslant 1) = F(1) \approx 0{,}841$.
- Par symétrie, $\mathbf{P}(X \leqslant -1,5) = \mathbf{P}(X \geqslant 1,5) = 1 - F(1{,}5) \approx 0{,}067$.
- $\mathbf{P}(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(0{,}5) \approx 0{,}150$.
- $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) = F(1) - F(-2)$ et, par symétrie, $F(-2) = \mathbf{P}(X \geqslant 2) = 1 - F(2)$ donc $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) = F(1) - 1 + F(2) \approx 0{,}818$.
- Par symétrie, $\mathbf{P}(X \geqslant -1) = \mathbf{P}(X \leqslant 1) = F(1) \approx 0{,}841$.
- $\mathbf{P}(-0{,}5 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(-0{,}5)$ et, par symétrie, $F(-0{,}5) = \mathbf{P}(X \leqslant -0{,}5) = \mathbf{P}(X \geqslant 0{,}5) = 1 - F(0{,}5)$ donc $\mathbf{P}(-0{,}5 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - 1 + F(0{,}5) \approx 0{,}624$.
- Par symétrie, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X \leqslant -1) = \mathbf{P}(1 \leqslant X \leqslant 2) = F(2) - F(1) \approx 0{,}136$.

Exercice 12. Soit une variable $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et F_Z sa fonction de répartition.

1. Justifier par un argument graphique que $F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une valeur approchée de $\mathbf{P}(Z \leqslant -2)$.
   On se servira des données contenues dans l'énoncé de l'exercice précédent.
3. Soit X une variable suivant la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 4$. Déterminer une valeur approchée de $\mathbf{P}(X \leqslant 2)$.

Solution.

1. Soit un réel x. Par symétrie de la courbe de la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ par rapport à l'axe des ordonnées,
$$F_Z(-x) = \mathbf{P}(X \leqslant -x) = \mathbf{P}(X \geqslant x) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x)$$
donc $\boxed{F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)}$.
2. On en déduit que $\mathbf{P}(Z \leqslant -2) = 1 - F_Z(2) \approx 1 - 0{,}977$ soit $\boxed{\mathbf{P}(Z \leqslant -2) \approx 0{,}023}$.
3. Par théorème, $Y = \dfrac{X-10}{4}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or,
$$X \leqslant 2 \iff X - 10 \leqslant -8 \iff \frac{X-10}{4} \leqslant -2 \iff Y \leqslant -2$$
donc $\mathbf{P}(X \leqslant 2) = \mathbf{P}(Y \leqslant -2) = \mathbf{P}(Z \leqslant -2)$ car Y et Z ont la même loi. Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 2) \approx 0{,}023}$.

Exercice 13. On considère deux variables aléatoires indépendantes $X \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{3})$ et $V \hookrightarrow \mathscr{E}(3)$.

1. On pose $U = 2X - 1$. Déterminer la loi de U ainsi que son espérance et sa variance.
2. On pose $W = UV$.
   a. Soit $x \geqslant 0$. Calculer $\mathbf{P}_{(U=1)}(W \leqslant x)$ et $P_{(U=-1)}(W \leqslant x)$ puis en déduire $P(W \leqslant x)$.
   b. Calculer $F_W(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c. En déduire une densité de W.
3. Calculer $\mathbf{E}(W)$.

Solution.

1. Comme $X(\Omega) = \{0\,;1\}$, $U(\Omega) = \{-1\,;1\}$. De plus, $\mathbf{P}(U = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(U = 1) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$. On en déduit que $\mathbf{E}(U) = -1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(U) = -\frac{1}{3}}$ et, comme $U^2 = 1$, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(U) = \mathbf{E}(U^2)-\mathbf{E}(U)^2 = 1-(-\frac{1}{3})^2$ donc $\boxed{\mathbf{V}(U) = \frac{8}{9}}$.

2. **a.** D'une part, comme U et V sont indépendantes

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(U=1)}(W \leqslant x) &= \frac{\mathbf{P}(\{U=1\}\cap\{UV \leqslant x\})}{\mathbf{P}(U=1)} = \frac{\mathbf{P}(\{U=1\}\cap\{V \leqslant x\})}{\mathbf{P}(U=1)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(U=1)\mathbf{P}(V \leqslant x)}{\mathbf{P}(U=1)} = \mathbf{P}(V \leqslant x)\\ &= \int_0^x 3\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-3t}\right]_0^x = 1-\mathrm{e}^{-3x}\end{aligned}$$

et, d'autre part, de la même façon, comme $-x \leqslant 0$ et comme X est à valeurs positives,

$$\mathbf{P}_{(U=-1)}(W \leqslant x) = \mathbf{P}(-V \leqslant x) = \mathbf{P}(V \geqslant -x) = \mathbf{P}(V \geqslant 0) = 1.$$

Comme $(U = 1)$ et $(U = -1)$ forment un système complet d'évènement, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(W \leqslant x) &= \mathbf{P}(U=1)\mathbf{P}_{(U=1)}(W \leqslant x) + \mathbf{P}(U=-1)\mathbf{P}_{(U=-1)}(W \leqslant x)\\ &= \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3x}) + \frac{2}{3}\times 1\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(W \leqslant x) = 1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}}$.

b. Soit un réel x. Si $x \geqslant 0$ alors $F_W(x) = \mathbf{P}(W \leqslant x) = 1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$ d'après la question précédente.
Si $x < 0$ alors, comme précédemment,

$$\begin{aligned}F_W(x) = \mathbf{P}(W \leqslant x) &= \mathbf{P}(U=1)\mathbf{P}_{(U=1)}(W \leqslant x) + \mathbf{P}(U=-1)\mathbf{P}_{(U=-1)}(W \leqslant x)\\ &= \frac{1}{3}\mathbf{P}(V \leqslant x) + \frac{2}{3}\mathbf{P}(-V \leqslant x)\\ &= 0 + \frac{2}{3}\mathbf{P}(V \geqslant -x)\\ &= \frac{2}{3}(1-\mathbf{P}(V \leqslant -x))\\ &= \frac{2}{3}\left[1-\left(1-\mathrm{e}^{-3(-x)}\right)\right] \qquad \text{d'après le calcul de la question \textbf{2.a.}}\\ &= \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{F_W : x \longmapsto \begin{cases} 1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x \geqslant 0\\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} & \text{si } x < 0\end{cases}}$.

3. Pour tout $x > 0$, $F_W'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et, pour tout $x < 0$, $F_W'(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$. On en déduit qu'un densité de W est $\boxed{f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2\mathrm{e}^{3x} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$.

4. Comme U et V sont indépendantes, $\mathbf{E}(UV) = \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(UV) = -\frac{1}{9}}$.

Exercice 14. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On définit la variable $M = \max(U,V)$.

1. Rappeler les fonctions de répartition F_U et F_V.

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_M(x) = F_U(x)F_V(x)$.

3. En déduire une densité de M.

Solution.

1. Comme U et V ont la même loi, elles sont la même fonction de répartition et, pour tout réel x, $\boxed{F_U(x) = F_V(x) = \mathbf{P}(U \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alos $\max(U,V) \leqslant x$ si et seulement si $U \leqslant x$ et $V \leqslant x$. Ainsi, $\{M \leqslant x\} = \{U \leqslant x\} \cap \{V \leqslant x\}$. Comme U et V sont indépendantes, on en déduit que

$$F_M(x) = \mathbf{P}(M \leqslant x) = \mathbf{P}(\{U \leqslant x\} \cap \{V \leqslant x\}) = \mathbf{P}(U \leqslant x)\mathbf{P}(V \leqslant x) = F_U(x)F_V(x).$$

Ainsi, on a bien, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_M(x) = F_U(x)F_V(x)}$.

3. On en déduit que, pour tout réel x, $F_M(x) = \mathbf{P}(U \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Dès lors, pour tout $x < 0$, $F_M'(x) = 0$, pour tout $x \in \,]0\,;1[$, $F_M'(x) = 2x$ et, pour tout $x \in \,]1\,;+\infty[$, $F_M'(x) = 0$. Dès lors, une densité de M est $\boxed{x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.