⧫ Corrigés des exercices du chapitre 6

Exercice 1. Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & x+2y-z \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x-y) \end{array}$$

Solution.

• Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2)) &= f((\lambda x_1+x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)) \\ &= (\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2) \\ &= \lambda(x_1+2y_1-z_1)+(x_2+2y_2-z_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• Soit $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} g(\lambda\,(x_1\,;y_1)+(x_2\,;y_2)) &= g((\lambda x_1+x_2\,;\lambda y_1+y_2)) \\ &= ((\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)\,;2(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)) \\ &= (\lambda(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\,;\lambda(2x_1-y_1)+(2x_2-y_2)) \\ &= \lambda\,(x_1+y_1\,;2x_1-y_1)+(x_2+y_2\,;2x_2-y_2) \\ &= \lambda g((x_1\,;y_1))+g((x_2\,;y_2)) \end{aligned}$$

donc g est linéaire.

Exercice 2. On considère l'application $f : (x\,;y) \longmapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer$f((1\,;1))$ et $f((2\,;2))$.
2. L'application f est-elle linéaire ?

Solution.

1. $f((1\,;1)) = 1\times 1 = 1$ et $f((2\,;2)) = 2\times 2 = 4$.
2. On remarque que $f((2\,;2)) \neq 2f((1\,;1))$ c'est-à-dire $f(2\,(1\,;1)) \neq 2f((1\,;1))$ donc f n'est pas linéaire.

Exercice 3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P^2 \end{array}$$

Solution.

• $f(0) = 1 \neq 0$ donc f n'est pas linéaire.

• Soit P et Q deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$g(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q) = \lambda P'+Q'-\lambda P-Q = \lambda(P'-P)+(\lambda Q'-Q) = \lambda g(P)+g(Q)$$

donc g est linéaire.

• Soit φ et ψ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$h(\lambda\varphi+\psi) = (\lambda\varphi+\psi)(0) = \lambda\varphi(0)+\psi(0) = \lambda h(\varphi)+h(\psi)$$

donc h est linéaire.

• $k(1) = 0-1^2 = -1$ et $k(2\times 1) = k(2) = 0-2^2 = -4 \neq 2k(1)$ donc k n'est pas linéaire.

Exercice 4. Montrer que l'application $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x+2y\,;4x-y+z\,;2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Solution. Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned}
&f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2))\\
&\quad= f((\lambda x_1 + x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2))\\
&\quad= (\lambda x_1+x_2+2(\lambda y_1+y_2)\,;4(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)+(\lambda z_1+z_2)\,;\\
&\qquad\qquad 2(\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2))\\
&\quad= (\lambda(x_1+2y_1)+x_2+2y_2\,;\lambda(4x_1-y_1+z_1)+(4x_2-y_2+z_2)\,;\\
&\qquad\qquad \lambda(2x_1+2y_1+3z_1)+(2x_2+2y_2+3z_2))\\
&\quad= \lambda\,(x_1+2y_1\,;4x_1-y_1+z_1\,;2x_1+2y_1+3z_1)+\\
&\qquad\qquad (x_2+2y_2\,;4x_2-y_2+z_2\,;2x_2+2y_2+3z_2)\\
&\quad= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)
\end{aligned}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que f est bijective. Soit $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}
f((x\,;y\,;z))=(a\,;b\,;c) &\iff \begin{cases} x+2y=a\\ 4x-y+z=b\\ 2x+2y+3z=c\end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y+z=b-4a & L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ -2y+3z=c-2a & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y+z=b-4a\\ 25z=-10a-2b+9c \quad L_3\leftarrow 9L_3-2L_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y+(-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c)=b-4a\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y=-\frac{18}{5}a+\frac{27}{25}-\frac{9}{25}c\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2(\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}c)=a\\ y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}c\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=\frac{1}{5}a+\frac{6}{25}b-\frac{2}{25}c\\ y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}b+\frac{1}{25}c\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f((x\,;y\,;z))=(a\,;b\,;c)$ donc f est bijective et c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. De plus, le calcul précédent montre que

$$f^{-1} : (x\,;y\,;z)\longmapsto \left(\frac{1}{5}x+\frac{6}{25}y-\frac{2}{25}z\,;\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}y+\frac{1}{25}z\,;-\frac{2}{5}x-\frac{2}{25}y+\frac{9}{25}z\right).$$

Exercice 5. Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;x+2y-z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;x-z\,;2x+y) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P-XP'-P(0) \end{array}$$

Solution.

• Détermination de $\ker(f)$:

$$\begin{aligned}(x\,;y\,;z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+(x+2y)=0 \\ z=x+2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x+3y=0 \\ z=x+2y \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x \\ z=x+2(-\frac{2}{3}x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x \\ z=-\frac{1}{3}x \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(f) = \left\{\left(x\,;-\frac{2}{3}x\,;-\frac{1}{3}x\right)\right\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right))$ donc, comme $\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $(\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right))$ est une base de $\ker(f)$.

• Détermination de $\ker(g)$:

$$(x\,;y\,;z) \in \ker(g) \iff \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ z=x \end{cases} .$$

Ainsi, $\ker(f) = \{(x\,;x\,;x)\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;1\,;1))$ donc, comme $(1\,;1\,;1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $((1\,;1\,;1))$ est une base de $\ker(g)$.

• Détermination de $\ker(h)$:

$$(x\,;y\,;z) \in \ker(h) \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+x=0 \\ z=x \\ 2x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=x \\ y=-2x \end{cases}$$

Ainsi, $\ker(h) = \{(x\,;-2x\,;x)\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;-2\,;1))$ donc, comme $(1\,;-2\,;1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $((1\,;-2\,;1))$ est une base de $\ker(h)$

• Détermination de $\ker(k)$:

$$P \in \ker(k) \iff P-XP'-P(0)=0$$

En notant n le degré du polynôme P et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on en déduit que

$$\begin{aligned}P \in \ker(k) &\iff \sum_{i=0}^{n} a_i X^i - X\sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1} - a_0 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i X^i - \sum_{i=1}^{n} i a_i X^i = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n}(1-i)a_i X^i = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], (1-i)a_i = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1,n]\!], a_i = 0 \Leftrightarrow P = a_0\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(k)$ est $\mathbb{R}_0[X]$ dont une base est le polynôme constant égal à 1.

Exercice 6.

1. Montrer que $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto x - 2y + 3z$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de H.

Solution.

1. Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1) + (x_2\,;y_2\,;z_2)) &= f((\lambda x_1 + x - 2\,;\lambda y_1 + y_2\,;\lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda(x_1 - 2y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1)) + f((x_2\,;y_2\,;z_2)) \end{aligned}$$

   donc f est linéaire.
2. Par définition, $H = \ker(f)$ donc, par propriété, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Par définition,

$$\begin{aligned} H &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - 3z\} \\ &= \{(2y - 3z\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y\,;z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y\,(2\,;1\,;0) + z\,(-3\,;0\,;1) \mid (x\,;y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

   en posant $v_1 = (2\,;1\,;0)$ et $v_2 = (-3\,;0\,;1)$. Soit a et b deux réels tels que $av_1 + bv_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(2a - 3b\,;a\,;b) = (0\,;0\,;0)$ donc $a = b = 0$ et ainsi (v_1, v_2) est libre. On conclut que (v_1, v_2) est une base de H.

Exercice 7. Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x + y\,;2x + 2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x + y\,;x + 2y\,;y) \end{array}$$

Solution.

• Par propriété, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f((1\,;0)), f((0\,;1))) = \mathrm{Vect}((1\,;2)\,,(1\,;2)) = \mathrm{Vect}((1\,;2))$ donc $((1\,;2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi $\mathrm{rg}(f) = 1$.

• Par propriété, $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g((1\,;0)), g((0\,;1))) = \mathrm{Vect}((1\,;1\,;0)\,,(1\,;2\,;1))$. Soit a et b deux réels tels que $a\,(1\,;1\,;0) + b\,(1\,;2\,;1) = 0_{\mathbb{R}_3}$. Alors, $(a + b\,;a + 2b\,;b) = (0\,;0\,;0)$ donc $b = 0$ puis $a = 0$. Ainsi, la famille $((1\,;1\,;0)\,,(1\,;2\,;1))$ est libre et elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. Par suite, $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Exercice 8. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la droite vectorielle D d'équation $y = 2x$.

1. Déterminer une base (e_1) de D.
2. On pose $e_2 = (-2\,;1)$. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter géométriquement D, e_1 et e_2.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie d'axe D. On admet que f est linéaire.
   - **a.** Déterminer graphiquement $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
   - **b.** On considère la vecteur $u = (3\,;4)$.
     Calculer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

c. En déduire le symétrique de u par rapport à D.

5. Soit g l'application linéaire définie par $g = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.

a. Soit un vecteur $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier par le calcul que $g(v)$ appartient à la droite D.

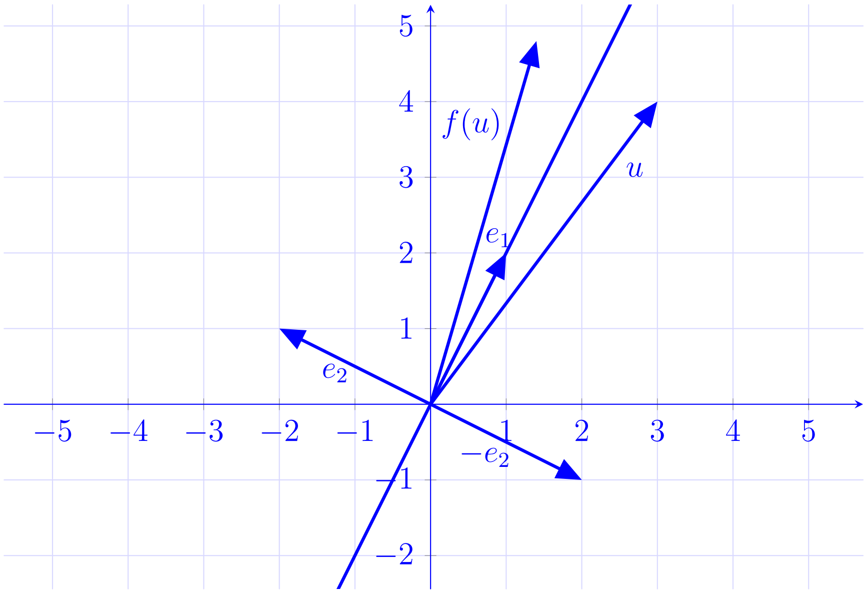
b. Déterminer le noyau de g et interpréter géométriquement.

Solution.

1. Par définition, $D = \{(x\,;2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;2))$. Comme $e_1 = (1\,;2) \neq (0\,;0)$, (e_1) est une base de D.

2. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, il suffit de montrer que la famille (e_1, e_2) est libre. Soit a et b deux réels tels que $ae_1 + be_2 = (0\,;0)$. Alors, $(a - 2b\,;2a + b) = (0\,;0)$ donc $a - 2b = 0$ et $2a + b = 0$. On en déduit que $2(a - 2b) - (2a + b) = 0$ c'est-à-dire $-5b = 0$ donc $b = 0$ et, par suite, $a = 0$. Ainsi, (e_1, e_2) est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

3.



4. **a.** Graphiquement, $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = -e_2$.

b. On cherche deux réels a et b tels que $u = ae_1 + be_2$ c'est-à-dire $(3\,;4) = (a - 2b\,;2a + b)$. Or

$$\begin{cases} a - 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2(4 - 2a) = 3 \\ b = 4 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} 5a - 8 = 3 \\ b = 4 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{11}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) sont $\left(\frac{11}{5}\,;-\frac{2}{5}\right)$.

c. Par linéarité, on en déduit que

$$f(u) = f\left(\frac{11}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2\right) = \frac{11}{5}f(e_1) - \frac{2}{5}f(e_2) = \frac{11}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 = \left(\frac{7}{5}\,;\frac{24}{5}\right).$$

5. **a.** Comme g est linéaire et comme D est un espace vectoriel, il suffit de montrer que $g(e_1)$ et $g(e_2)$ appartiennent à D. Or, $g(e_1) = \frac{1}{2}(f(e_1) + e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_1) = e_1 \in D$ et $g(e_2) = \frac{1}{2}f(e_2) + e_2) = \frac{1}{2}(-e_2) + e_2) = 0_{\mathbb{R}^2} \in D$. Ainsi, pour tous réels α et β, $g(\alpha e_1 + \beta e_2) \in D$.

b. Le calcul précédent montre que $e_2 \in \ker(g)$. Comme $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, $\dim(\ker(g)) \geqslant 1$. De plus, $\ker(g) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\dim(\ker(g)) \leqslant 2$ et $\ker(g) \neq \mathbb{R}^2$ car $g(e_1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Ainsi, $\dim(\ker(g)) < 2$ donc $\dim(\ker(g)) = 1$ et finalement $\ker(g) = \mathrm{Vect}(e_2)$.

Si on décompose un vecteur v dans la base (e_1, e_2) sous la forme $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ alors $g(v) = \alpha e_1$ donc g est la projection sur la droite D parallèlement à la droite engendrée par e_2 (qui n'est autre que $\ker(g)$).

Exercice 9.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f((1\,;0\,;0))) = (0\,;1)$, $f((1\,;1\,;0)) = (1\,;0)$ et $f((1\,;1\,;1)) = (1\,;1)$.
2. Déterminer explicitement f.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution.

1. Posons $e_1 = (1\,;0\,;0)$, $e_2 = (1\,;1\,;0)$ et $e_3 = (1\,;1\,;1)$ et considérons trois réels a, b et c tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(a+b+c\,;b+c\,;c) = (0\,;0\,;0)$ donc $c = 0$ puis $b = 0$ et, enfin, $a = 0$. Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est libre et, comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 0$, on conclut que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Or, on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base donc il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = (0\,;1)$, $f(e_2) = (1\,;0)$ et $f(e_3) = (1\,;1)$.
2. Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $v = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $v = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$. Déterminons les coordonnées $(a\,;b\,;c)$ de v dans la base (e_1, e_2, e_3). Pour cela, on remarque que $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ donc $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = e_2 - e_1$ et $\varepsilon_3 = e_3 - e_1 - (e_2 - e_1) = e_3 - e_2$. Ainsi,
$$v = xe_1 + y(e_2 - e_1) + z(e_3 - e_2) = (x-y)e_1 + (y-z)e_2 + ze_3$$
donc, par linéarité de f,
$$f(u) = (x-y)f(e_1) + (y-z)f(e_2) + zf(e_3) = (0\,;x-y) + (y-z\,;0) + (z\,;z) = (y\,;x-y+z)$$
Ainsi, $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (y\,;x-y+z)$.
3. Par définition,
$$(x\,;y\,;z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$
donc $\ker(f) = \{(x\,;0\,;x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;0\,;1))$. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 1$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$. Or, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (y-z\,;z-x\,;x-y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.
2. $g : (x, y, z, t) \longmapsto (2x+y+z\,;x+y+t\,;x+z-t)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Par définition,

$$(x\,;y\,;z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} y-z=0 \\ z-x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=z \\ z=x \\ x=y \end{cases}$$

donc $\ker(f) = \{(x\,;x\,;x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;1\,;1))$. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 1$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3-1 = 2$. Or, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 2. Ce sous-espace est engendré par les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire par les vecteurs $e_1 = (0\,;-1\,;1)$, $e_2 = (1\,;0\,;-1)$ et $e_3\,(-1\,;1\,;0)$. Montrons que (e_1, e_2) forment une famille libre. Soit a et b deux réels tels que $ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(b\,;-a\,;a-b) = (0\,;0\,;0)$ donc $a = b = 0$. Ainsi, la famille est libre et, en raison des dimension, (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Par définition,

$$(x,y,z,t) \in \ker(g) \iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+y+t=0 \\ x+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+y+(x+z)=0 \\ t=x+z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ t=x+z \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2x-z \\ t=x+z \end{cases}$$

donc

$$\ker(g) = \{(x,-2x-z,z,x+z) \mid (x\,;z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,-2,0,1)+z(0,-1,1,1) \mid (x\,;z) \in \mathbb{R}^2\}$$

donc $\ker(g) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ en posant $e_1 = (1,-2,0,1)$ et $e_2 = 0,-1,1,1)$. Montons que (e_1, e_2) est libre. Soit a et b deux réels tels que $ae_1+be_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(a,-2a-b,b,a+b) = (0,0,0,0)$ donc $a = b = 0$ et ainsi la famille (e_1, e_2) est libre. On en déduit que c'est une base de $\ker(g)$. Ainsi, $\dim(\ker(g)) = 2$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 3-2 = 1$. Or, $\mathrm{Im}(g)$ contient la vecteur $g(1,0,0,0) = (2\,;1\,;1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $((2\,;1\,;1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f : P \longmapsto P + P'$ est un automorphisme $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. Soit P_1 et P_2 deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$f(\lambda P_1+P_2) = (\lambda P_1+P_2)+(\lambda P_1+P_2)' = \lambda P_1+P_2+\lambda P_1'+P_2' = \lambda(P_1+P_1')+P_2+P_2' = \lambda f(P_1)+f(P_2)$$

donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \ker(f)$. Alors, $P + P' = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $P = -P'$. Or, si $P \neq 0$, $\deg(P) > \deg(P')$ et donc $P \neq P'$. Ainsi, $P = 0$ donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Dès lors, f est injective et, en raison des dimensions, f est bijective. Ainsi, f est bien un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12. Soit t_1, t_2 et t_3 trois réels distincts.

1. Montrer que $f : P \longmapsto (P(t_1)\,;P(t_2)\,;P(t_3))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Soit s_1, s_2 et s_3 des réels. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(t_1) = s_1$, $P(t_2) = s_2$ et $P(t_3) = s_3$.

Solution.

1. Soit P_1 et P_2 deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned}f(\lambda P_1+P_2)&=((\lambda P_1+P_2)(0)\,;(\lambda P_1+P_2)'(0)\,;(\lambda P_1+P_2)''(0))\\&=(\lambda P_1(0)+P_2(0)\,;\lambda P_1'(0)+P_2'(0)\,;\lambda P_1''(0)+P_2''(0))\\&=\lambda\,(P_1(0)\,;P_1'(0)\,;P_1''(0))+(P_2(0)\,;P_2'(0)\,;P_2''(0))\\&=\lambda f(P_1)+f(P_2)\end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
Déterminons son noyau. Soit $P\in\ker(f)$. Alors, $P(t_1)=0$, $P(t_2)=0$ et $P(t_3)=0$ donc t_1, t_2 et t_3 sont trois racines distinctes de P. Comme $\deg(P)\leqslant 2$, on en déduit que $P=0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Ainsi, f est injective et, comme $\dim(\mathbb{R}_2[X])=\dim(\mathbb{R}^3)=3$, f est un isomorphisme.

2. Comme f est bijective, pour tout $(s_1\,;s_2\,;s_3)\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $P\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P)=(s_1\,;s_2\,;s_3)$ c'est-à-dire tel que $P(t_1)=s_1$, $P(t_2)=s_2$ et $P(t_3)=s_3$.

Exercice 13.

1. Montrer que $f : A\longmapsto A+{}^tA$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution.

1. Soit A_1 et A_2 deux éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la transposition,

$$\begin{aligned}f(\lambda A_1+A_2)&=(\lambda A_1+A_2)+{}^t(\lambda A_1+A_2)=\lambda A_1+A_2+{}^t(\lambda A_1)+{}^tA_2\\&=\lambda(A_1+{}^tA_1)+A_2+{}^tA_2=\lambda f(A_1)+f(A_2)\end{aligned}$$

donc f est est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix}\in\ker(f)$. Alors $A+{}^tA=0_3$ donc

$$=\begin{pmatrix}2a_{1,1}&a_{1,2}+a_{2,1}&a_{1,3}+a_{3,1}\\a_{2,1}+a_{1,2}&2a_{2,2}&a_{2,3}+a_{3,2}\\a_{3,1}+a_{1,3}&a_{3,2}+a_{2,3}&2a_{3,3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donc $a_{1,1}=0$, $a_{1,2}=-a_{2,1}$, $a_{1,3}=-a_{3,1}$, $a_{2,2}=0$, $a_{2,3}=-a_{3,2}$ et $a_{3,3}=0$. Ainsi,

$$\ker(f)\subset\left\{\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}\middle|\,(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3)$$

en posant $A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et $A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$. Inversement, on vérifie facilement que $f(A_1)=0_3$, $f(A_2)=0_3$ et $f(A_3)=0_3$ donc, comme $\ker(f)$ est un espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3)\subset\ker(f)$. On conclut donc que $\ker(f)=\mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3)$.
Considérons des réels a, b et c tels que $aA_1+bA_2+cA_3=0_3$. Alors, $\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}=0_3$ donc $a=b=c=0$ et ainsi (A_1,A_2,A_3) est libre. On conclut que (A_1,A_2,A_3) est une base de $\ker(f)$. Dès lors, $\dim(\ker(f))=3$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))-\dim(\ker(f))=3^2-3=6$.

Exercice 14.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que $f_n : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Déterminer $\ker(f_n)$ et en déduire que $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que l'application $g : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.

Solution.

1. Soit P_1 et P_2 deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f_n(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X) \\ &= \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - (\lambda P_1(X) + P_2(X)) \\ &= \lambda(P_1(X+1) + P_1(X)) + P_2(X+1) - P_2(X) \\ &= \lambda f_n(P_1) + f_n(P_2) \end{aligned}$$

   donc f_n est un endomorphisme de $R_n[X]$.

2. Soit $P \in \ker(f_n)$. Alors, pour tout réel x, $P(x+1) = P(x)$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots = P(n)$ Dès lors, le polynôme $Q = P - P(0)$ possède $n+1$ racines distincts donc, comme $\deg(Q) \leqslant n$, $Q = 0$ donc P est constant égal à $P(0)$. Inversement, si P est un polynôme constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc $f_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi, $\ker(f_n) = \mathbb{R}_0[X]$. Dès lors, $\dim(\ker(f_n)) = 1$ donc, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n$. Or, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ alors

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(X+1)^k - X^k\right]$$

   et, par la formule du binôme de Newton, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(X+1)^k - X^k = X^k + \binom{k}{1} X^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} X + 1 - X^k = \binom{k}{1} X^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} X + 1$$

   est un polynôme de degré $k-1$ donc $f_n(P)$ est une polynôme de degré au plus $n-1$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathrm{Im}(f_n))$, on conclut que $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Comme dans la question **1.**, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors $Q = f(0_{\mathbb{R}[X]})$. Sinon, notons d le degré de Q. Alors, $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ donc, comme f_{d+1} est une application linéaire surjective de $\mathbb{R}_{d+1}[X]$ sur $\mathbb{R}_d[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que $Q = f_{d+1}(P) = P(X+1) - P(X)$. Ainsi, $Q = g(P)$ donc g est surjectif.