⧫ Corrigés des exercices du chapitre 6

Exercice 1. Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & x+2y-z \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x-y) \end{array}$$

Solution.

• Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2)) &= f((\lambda x_1+x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)) \\ &= (\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2) \\ &= \lambda(x_1+2y_1-z_1)+(x_2+2y_2-z_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• Soit $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} g(\lambda\,(x_1\,;y_1)+(x_2\,;y_2)) &= g((\lambda x_1+x_2\,;\lambda y_1+y_2)) \\ &= ((\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)\,;2(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)) \\ &= (\lambda(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\,;\lambda(2x_1-y_1)+(2x_2-y_2)) \\ &= \lambda\,(x_1+y_1\,;2x_1-y_1)+(x_2+y_2\,;2x_2-y_2) \\ &= \lambda g((x_1\,;y_1))+g((x_2\,;y_2)) \end{aligned}$$

donc g est linéaire.

Exercice 2. On considère l'application $f:(x\,;y)\longmapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer$f((1\,;1))$ et $f((2\,;2))$.

2. L'application f est-elle linéaire ?

Solution.

1. $f((1\,;1))=1\times 1=1$ et $f((2\,;2))=2\times 2=4$.

2. On remarque que $f((2\,;2))\neq 2f((1\,;1))$ c'est-à-dire $f(2\,(1\,;1))\neq 2f((1\,;1))$ donc f n'est pas linéaire.

Exercice 3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P \end{array}$$

$$h: \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \qquad k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P^2 \end{array}$$

Solution.

• $f(0)=1\neq 0$ donc f n'est pas linéaire.

• Soit P et Q deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$g(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)=\lambda P'+Q'-\lambda P-Q=\lambda(P'-P)+(\lambda Q'-Q)=\lambda g(P)+g(Q)$$

donc g est linéaire.

• Soit φ et ψ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors,

$$h(\lambda\varphi+\psi)=(\lambda\varphi+\psi)(0)=\lambda\varphi(0)+\psi(0)=\lambda h(\varphi)+h(\psi)$$

donc h est linéaire.

• $k(1)=0-1^2=-1$ et $k(2\times 1)=k(2)=0-2^2=-4\neq 2k(1)$ donc k n'est pas linéaire.

Exercice 4. Montrer que l'application $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (x+2y\,;4x-y+z\,;2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Solution. Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned}
&f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2))\\
&\quad= f((\lambda x_1+x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2))\\
&\quad= (\lambda x_1+x_2+2(\lambda y_1+y_2)\,;4(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)+(\lambda z_1+z_2)\,;\\
&\qquad\qquad 2(\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2))\\
&\quad= (\lambda(x_1+2y_1)+x_2+2y_2\,;\lambda(4x_1-y_1+z_1)+(4x_2-y_2+z_2)\,;\\
&\qquad\qquad \lambda(2x_1+2y_1+3z_1)+(2x_2+2y_2+3z_2))\\
&\quad= \lambda\,(x_1+2y_1\,;4x_1-y_1+z_1\,;2x_1+2y_1+3z_1)+\\
&\qquad\qquad (x_2+2y_2\,;4x_2-y_2+z_2\,;2x_2+2y_2+3z_2)\\
&\quad= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)
\end{aligned}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que f est bijective. Soit $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}
f((x\,;y\,;z))=(a\,;b\,;c) &\iff \begin{cases} x+2y=a\\ 4x-y+z=b\\ 2x+2y+3z=c\end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y+z=b-4a & L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ -2y+3z=c-2a & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y+z=b-4a\\ 25z=-10a-2b+9c \quad L_3\leftarrow 9L_3-2L_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y+(-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c)=b-4a\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2y=a\\ -9y=-\frac{18}{5}a+\frac{27}{25}-\frac{9}{25}c\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+2(\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}c)=a\\ y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}c\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=\frac{1}{5}a+\frac{6}{25}b-\frac{2}{25}c\\ y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}b+\frac{1}{25}c\\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f((x\,;y\,;z))=(a\,;b\,;c)$ donc f est bijective et c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. De plus, le calcul précédent montre que

$$f^{-1} : (x\,;y\,;z)\longmapsto\left(\frac{1}{5}x+\frac{6}{25}y-\frac{2}{25}z\,;\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}y+\frac{1}{25}z\,;-\frac{2}{5}x-\frac{2}{25}y+\frac{9}{25}z\right).$$

Exercice 5. Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;x+2y-z)\end{array} \qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y & y-z & z-x\\ y-z & z-x & x-y\\ z-x & x-y & y-z\end{pmatrix}\end{array}$$

$$h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;x-z\,;2x+y)\end{array} \qquad k:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \longmapsto & P-XP'-P(0)\end{array}$$

Solution.

- Détermination de $\ker(f)$:

$$\begin{aligned}(x\,;y\,;z)\in\ker(f) &\Longleftrightarrow \begin{cases}x+y+z=0\\ x+2y-z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x+y+(x+2y)=0\\ z=x+2y\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}2x+3y=0\\ z=x+2y\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{2}{3}x\\ z=x+2(-\frac{2}{3}x)\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{2}{3}x\\ z=-\frac{1}{3}x\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(f)=\left\{\left(x\,;-\frac{2}{3}x\,;-\frac{1}{3}x\right)\right\}\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right))$ donc, comme $\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $(\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right))$ est une base de $\ker(f)$.

- Détermination de $\ker(g)$:

$$(x\,;y\,;z)\in\ker(g)\Longleftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\\ z-x=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=x\\ z=x\end{cases}.$$

Ainsi, $\ker(f)=\{(x\,;x\,;x)\}\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1\,;1\,;1))$ donc, comme $(1\,;1\,;1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $((1\,;1\,;1))$ est une base de $\ker(g)$.

- Détermination de $\ker(h)$:

$$(x\,;y\,;z)\in\ker(h)\Longleftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\ x-z=0\\ 2x+y=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x+y+x=0\\ z=x\\ 2x+y=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}z=x\\ y=-2x\end{cases}$$

Ainsi, $\ker(h)=\{(x\,;-2x\,;x)\}\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1\,;-2\,;1))$ donc, comme $(1\,;-2\,;1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $((1\,;-2\,;1))$ est une base de $\ker(h)$

- Détermination de $\ker(k)$:

$$P\in\ker(k)\Longleftrightarrow P-XP'-P(0)=0$$

En notant n le degré du polynôme P et $P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$, on en déduit que

$$\begin{aligned}P\in\ker(k)&\Longleftrightarrow\sum_{i=0}^{n}a_iX^i-X\sum_{i=0}^{n}ia_iX^{i-1}-a_0=0\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_iX^i-\sum_{i=1}^{n}ia_iX^i=0\\ &\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(1-i)a_iX^i=0\Longleftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],(1-i)a_i=0\\ &\Longleftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],a_i=0\Leftrightarrow P=a_0\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(k)$ est $\mathbb{R}_0[X]$ dont une base est le polynôme constant égal à 1.

Exercice 6.

1. Montrer que $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto x-2y+3z$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de H.

Solution.

1. Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2)) &= f((\lambda x_1 + x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)) \\ &= (\lambda x_1+x_2)-2(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2) \\ &= \lambda(x_1-2y_1+3z_1)+(x_2-2y_2+3z_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)) \end{aligned}$$

   donc f est linéaire.
2. Par définition, $H=\ker(f)$ donc, par propriété, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Par définition,

$$\begin{aligned} H &= \{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=2y-3z\} \\ &= \{(2y-3z\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y\,;z)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{y\,(2\,;1\,;0)+z\,(-3\,;0\,;1) \mid (x\,;y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}(v_1,v_2) \end{aligned}$$

   en posant $v_1=(2\,;1\,;0)$ et $v_2=(-3\,;0\,;1)$. Soit a et b deux réels tels que $av_1+bv_2=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(2a-3b\,;a\,;b)=(0\,;0\,;0)$ donc $a=b=0$ et ainsi (v_1,v_2) est libre. On conclut que (v_1,v_2) est une base de H.

Exercice 7. Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x+2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x+2y\,;y) \end{array}$$

Solution.

• Par propriété, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f((1\,;0)),f((0\,;1)))=\mathrm{Vect}((1\,;2)\,,(1\,;2))=\mathrm{Vect}((1\,;2))$ donc $((1\,;2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi $\mathrm{rg}(f)=1$.

• Par propriété, $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Vect}(g((1\,;0)),g((0\,;1)))=\mathrm{Vect}((1\,;1\,;0)\,,(1\,;2\,;1))$. Soit a et b deux réels tels que $a\,(1\,;1\,;0)+b\,(1\,;2\,;1)=0_{\mathbb{R}_3}$. Alors, $(a+b\,;a+2b\,;b)=(0\,;0\,;0)$ donc $b=0$ puis $a=0$. Ainsi, la famille $((1\,;1\,;0)\,,(1\,;2\,;1))$ est libre et elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. Par suite, $\mathrm{rg}(f)=2$.

Exercice 8. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la droite vectorielle D d'équation $y=2x$.

1. Déterminer une base (e_1) de D.
2. On pose $e_2=(-2\,;1)$. Démontrer que la famille $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter géométriquement D, e_1 et e_2.
4. Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ la symétrie d'axe D. On admet que f est linéaire.
   a. Déterminer graphiquement $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
   b. On considère la vecteur $u=(3\,;4)$.
      Calculer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

c. En déduire le symétrique de u par rapport à D.

5. Soit g l'application linéaire définie par $g = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.

a. Soit un vecteur $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier par le calcul que $g(v)$ appartient à la droite D.

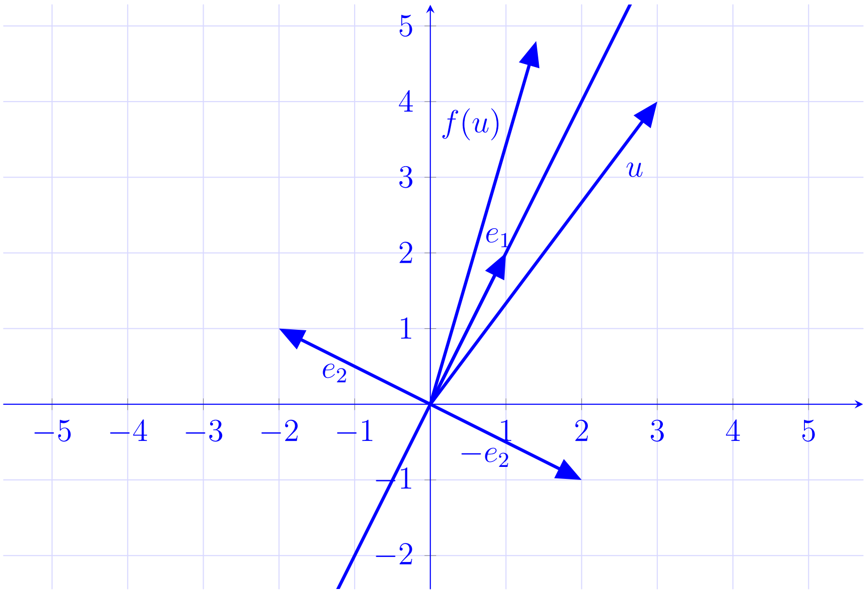
b. Déterminer le noyau de g et interpréter géométriquement.

Solution.

1. Par définition, $D = \{(x\,;2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;2))$. Comme $e_1 = (1\,;2) \neq (0\,;0)$, (e_1) est une base de D.

2. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, il suffit de montrer que la famille (e_1, e_2) est libre. Soit a et b deux réels tels que $ae_1 + be_2 = (0\,;0)$. Alors, $(a - 2b\,;2a + b) = (0\,;0)$ donc $a - 2b = 0$ et $2a + b = 0$. On en déduit que $2(a - 2b) - (2a + b) = 0$ c'est-à-dire $-5b = 0$ donc $b = 0$ et, par suite, $a = 0$. Ainsi, (e_1, e_2) est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

3.



4. a. Graphiquement, $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = -e_2$.

b. On cherche deux réels a et b tels que $u = ae_1 + be_2$ c'est-à-dire $(3\,;4) = (a - 2b\,;2a + b)$. Or

$$\begin{cases} a - 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2(4 - 2a) = 3 \\ b = 4 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} 5a - 8 = 3 \\ b = 4 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{11}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) sont $\left(\frac{11}{5}\,;-\frac{2}{5}\right)$.

c. Par linéarité, on en déduit que

$$f(u) = f\left(\frac{11}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2\right) = \frac{11}{5}f(e_1) - \frac{2}{5}f(e_2) = \frac{11}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 = \left(\frac{7}{5}\,;\frac{24}{5}\right).$$

5. a. Comme g est linéaire et comme D est un espace vectoriel, il suffit de montrer que $g(e_1)$ et $g(e_2)$ appartiennent à D. Or, $g(e_1) = \frac{1}{2}(f(e_1) + e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_1) = e_1 \in D$ et $g(e_2) = \frac{1}{2}f(e_2) + e_2) = \frac{1}{2}(-e_2) + e_2) = 0_{\mathbb{R}^2} \in D$. Ainsi, pour tous réels α et β, $g(\alpha e_1 + \beta e_2) \in D$.

b. Le calcul précédent montre que $e_2 \in \ker(g)$. Comme $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, $\dim(\ker(g)) \geqslant 1$. De plus, $\ker(g) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\dim(\ker(g)) \leqslant 2$ et $\ker(g) \neq \mathbb{R}^2$ car $g(e_1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Ainsi, $\dim(\ker(g)) < 2$ donc $\dim(\ker(g)) = 1$ et finalement $\ker(g) = \text{Vect}(e_2)$.

Si on décompose un vecteur v dans la base (e_1, e_2) sous la forme $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ alors $g(v) = \alpha e_1$ donc g est la projection sur la droite D parallèlement à la droite engendrée par e_2 (qui n'est autre que $\ker(g)$).

Exercice 9.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f((1\,;0\,;0))) = (0\,;1)$, $f((1\,;1\,;0)) = (1\,;0)$ et $f((1\,;1\,;1)) = (1\,;1)$.
2. Déterminer explicitement f.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution.

1. Posons $e_1 = (1\,;0\,;0)$, $e_2 = (1\,;1\,;0)$ et $e_3 = (1\,;1\,;1)$ et considérons trois réels a, b et c tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(a + b + c\,; b + c\,; c) = (0\,;0\,;0)$ donc $c = 0$ puis $b = 0$ et, enfin, $a = 0$. Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est libre et, comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 0$, on conclut que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Or, on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base donc il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = (0\,;1)$, $f(e_2) = (1\,;0)$ et $f(e_3) = (1\,;1)$.
2. Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $v = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $v = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$. Déterminons les coordonnées $(a\,;b\,;c)$ de v dans la base (e_1, e_2, e_3). Pour cela, on remarque que $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ donc $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = e_2 - e_1$ et $\varepsilon_3 = e_3 - e_1 - (e_2 - e_1) = e_3 - e_2$. Ainsi,
$$v = xe_1 + y(e_2 - e_1) + z(e_3 - e_2) = (x - y)e_1 + (y - z)e_2 + ze_3$$
donc, par linéarité de f,
$$f(u) = (x-y)f(e_1)+(y-z)f(e_2)+zf(e_3) = (0\,;x - y)+(y - z\,;0)+(z\,;z) = (y\,;x - y + z)$$
Ainsi, $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (y\,;x - y + z)$.
3. Par définition,
$$(x\,;y\,;z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$
donc $\ker(f) = \{(x\,;0\,;x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1\,;0\,;1))$. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 1$ et, par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$. Or, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (y - z\,;z - x\,;x - y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.
2. $g : (x, y, z, t) \longmapsto (2x + y + z\,;x + y + t\,;x + z - t)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Par définition,

$$(x\,;y\,;z)\in\ker(f)\iff\begin{cases}y-z=0\\z-x=0\\x-y=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=z\\z=x\\x=y\end{cases}$$

donc $\ker(f)=\{(x\,;x\,;x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1\,;1\,;1))$. Ainsi, $\dim(\ker(f))=1$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f))=3-1=2$. Or, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 2. Ce sous-espace est engendré par les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire par les vecteurs $e_1=(0\,;-1\,;1)$, $e_2=(1\,;0\,;-1)$ et $e_3\,(-1\,;1\,;0)$. Montrons que (e_1,e_2) forment une famille libre. Soit a et b deux réels tels que $ae_1+be_2=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(b\,;-a\,;a-b)=(0\,;0\,;0)$ donc $a=b=0$. Ainsi, la famille est libre et, en raison des dimension, (e_1,e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Par définition,

$$(x,y,z,t)\in\ker(g)\iff\begin{cases}2x+y+z=0\\x+y+t=0\\x+z-t=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+y+z=0\\x+y+(x+z)=0\\t=x+z\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}2x+y+z=0\\t=x+z\end{cases}\iff\begin{cases}y=-2x-z\\t=x+z\end{cases}$$

donc

$$\ker(g)=\{(x,-2x-z,z,x+z)\mid(x\,;z)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,-2,0,1)+z(0,-1,1,1)\mid(x\,;z)\in\mathbb{R}^2\}$$

donc $\ker(g)=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ en posant $e_1=(1,-2,0,1)$ et $e_2=0,-1,1,1)$. Montons que (e_1,e_2) est libre. Soit a et b deux réels tels que $ae_1+be_2=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(a,-2a-b,b,a+b)=(0,0,0,0)$ donc $a=b=0$ et ainsi la famille (e_1,e_2) est libre. On en déduit que c'est une base de $\ker(g)$. Ainsi, $\dim(\ker(g))=2$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(g))=3-2=1$. Or, $\mathrm{Im}(g)$ contient la vecteur $g(1,0,0,0)=(2\,;1\,;1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $((2\,;1\,;1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $f:P\longmapsto P+P'$ est un automorphisme $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. Soit P_1 et P_2 deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$f(\lambda P_1+P_2)=(\lambda P_1+P_2)+(\lambda P_1+P_2)'=\lambda P_1+P_2+\lambda P_1'+P_2'=\lambda(P_1+P_1')+P_2+P_2'=\lambda f(P_1)+f(P_2)$$

donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P\in\ker(f)$. Alors, $P+P'=0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $P=-P'$. Or, si $P\neq 0$, $\deg(P)>\deg(P')$ et donc $P\neq P'$. Ainsi, $P=0$ donc $\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Dès lors, f est injective et, en raison des dimensions, f est bijective. Ainsi, f est bien un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12. Soit t_1, t_2 et t_3 trois réels distincts.

1. Montrer que $f:P\longmapsto(P(t_1)\,;P(t_2)\,;P(t_3))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Soit s_1, s_2 et s_3 des réels. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(t_1)=s_1$, $P(t_2)=s_2$ et $P(t_3)=s_3$.

Solution.

1. Soit P_1 et P_2 deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned}f(\lambda P_1 + P_2) &= ((\lambda P_1 + P_2)(0) \,;(\lambda P_1 + P_2)'(0) \,;(\lambda P_1 + P_2)''(0))\\ &= (\lambda P_1(0) + P_2(0) \,;\lambda P_1'(0) + P_2'(0) \,;\lambda P_1''(0) + P_2''(0))\\ &= \lambda\,(P_1(0) \,;P_1'(0) \,;P_1''(0)) + (P_2(0) \,;P_2'(0) \,;P_2''(0))\\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2)\end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
Déterminons son noyau. Soit $P \in \ker(f)$. Alors, $P(t_1) = 0$, $P(t_2) = 0$ et $P(t_3) = 0$ donc t_1, t_2 et t_3 sont trois racines distinctes de P. Comme $\deg(P) \leqslant 2$, on en déduit que $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Ainsi, f est injective et, comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, f est un isomorphisme.

2. Comme f est bijective, pour tout $(s_1 \,;s_2 \,;s_3) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P) = (s_1 \,;s_2 \,;s_3)$ c'est-à-dire tel que $P(t_1) = s_1$, $P(t_2) = s_2$ et $P(t_3) = s_3$.

Exercice 13.

1. Montrer que $f : A \longmapsto A + {}^tA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution.

1. Soit A_1 et A_2 deux éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la transposition,

$$\begin{aligned}f(\lambda A_1 + A_2) &= (\lambda A_1 + A_2) + {}^t(\lambda A_1 + A_2) = \lambda A_1 + A_2 + {}^t(\lambda A_1) + {}^tA_2\\ &= \lambda(A_1 + {}^tA_1) + A_2 + {}^tA_2 = \lambda f(A_1) + f(A_2)\end{aligned}$$

donc f est est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \in \ker(f)$. Alors $A + {}^tA = 0_3$ donc

$$= \begin{pmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,2} + a_{2,1} & a_{1,3} + a_{3,1}\\ a_{2,1} + a_{1,2} & 2a_{2,2} & a_{2,3} + a_{3,2}\\ a_{3,1} + a_{1,3} & a_{3,2} + a_{2,3} & 2a_{3,3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

donc $a_{1,1} = 0$, $a_{1,2} = -a_{2,1}$, $a_{1,3} = -a_{3,1}$, $a_{2,2} = 0$, $a_{2,3} = -a_{3,2}$ et $a_{3,3} = 0$. Ainsi,

$$\ker(f) \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix} \middle|\, (a \,;b \,;c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$$

en posant $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Inversement, on vérifie facilement que $f(A_1) = 0_3$, $f(A_2) = 0_3$ et $f(A_3) = 0_3$ donc, comme $\ker(f)$ est un espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3) \subset \ker(f)$. On conclut donc que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.
Considérons des réels a, b et c tels que $aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0_3$. Alors, $\begin{pmatrix} 0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix} = 0_3$ donc $a = b = c = 0$ et ainsi (A_1, A_2, A_3) est libre. On conclut que (A_1, A_2, A_3) est une base de $\ker(f)$. Dès lors, $\dim(\ker(f)) = 3$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f)) = 3^2 - 3 = 6$.

Exercice 14.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que $f_n : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   b. Déterminer $\ker(f_n)$ et en déduire que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Montrer que l'application $g : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.

Solution.

1. Soit P_1 et P_2 deux polynômes et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f_n(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X) \\ &= \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - (\lambda P_1(X) + P_2(X)) \\ &= \lambda(P_1(X+1) + P_1(X)) + P_2(X+1) - P_2(X) \\ &= \lambda f_n(P_1) + f_n(P_2) \end{aligned}$$

   donc f_n est un endomorphisme de $R_n[X]$.

2. Soit $P \in \ker(f_n)$. Alors, pour tout réel x, $P(x+1) = P(x)$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots = P(n)$ Dès lors, le polynôme $Q = P - P(0)$ possède $n+1$ racines distincts donc, comme $\deg(Q) \leqslant n$, $Q = 0$ donc P est constant égal à $P(0)$. Inversement, si P est un polynôme constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc $f_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi, $\ker(f_n) = \mathbb{R}_0[X]$. Dès lors, $\dim(\ker(f_n)) = 1$ donc, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n$. Or, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ alors

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(X+1)^k - X^k\right]$$

   et, par la formule du binôme de Newton, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(X+1)^k - X^k = X^k + \binom{k}{1} X^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} X + 1 - X^k = \binom{k}{1} X^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} X + 1$$

   est un polynôme de degré $k-1$ donc $f_n(P)$ est une polynôme de degré au plus $n-1$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathrm{Im}(f_n))$, on conclut que $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Comme dans la question **1.**, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors $Q = f(0_{\mathbb{R}[X]})$. Sinon, notons d le degré de Q. Alors, $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ donc, comme f_{d+1} est une application linéaire surjective de $\mathbb{R}_{d+1}[X]$ sur $\mathbb{R}_d[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que $Q = f_{d+1}(P) = P(X+1) - P(X)$. Ainsi, $Q = g(P)$ donc g est surjectif.