

## ◆ Corrigés des exercices du chapitre 4

**Exercice 1.** Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x; y; z) & \longmapsto & x + 2y - z \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \longmapsto & (x + y; 2x - y) \end{array}$$

**Solution.**

- Soit  $(x_1; y_1; z_1)$  et  $(x_2; y_2; z_2)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^3$  et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2)) &= f((\lambda x_1 + x_2; \lambda y_1 + y_2; \lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2) \\ &= \lambda f((x_1; y_1; z_1)) + f((x_2; y_2; z_2)) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

- Soit  $(x_1; y_1)$  et  $(x_2; y_2)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^2$  et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\begin{aligned} g(\lambda(x_1; y_1) + (x_2; y_2)) &= g((\lambda x_1 + x_2; \lambda y_1 + y_2)) \\ &= ((\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2); 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2); \lambda(2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2)) \\ &= \lambda(x_1 + y_1; 2x_1 - y_1) + (x_2 + y_2; 2x_2 - y_2) \\ &= \lambda g((x_1; y_1)) + g((x_2; y_2)) \end{aligned}$$

donc  $g$  est linéaire.

**Exercice 2.** On considère l'application  $f : (x; y) \mapsto xy$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer  $f((1; 1))$  et  $f((2; 2))$ .
2. L'application  $f$  est-elle linéaire ?

**Solution.**

1.  $f((1; 1)) = 1 \times 1 = 1$  et  $f((2; 2)) = 2 \times 2 = 4$ .
2. On remarque que  $f((2; 2)) \neq 2f((1; 1))$  c'est-à-dire  $f(2(1; 1)) \neq 2f((1; 1))$  donc  $f$  n'est pas linéaire.

**Exercice 3.** Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1 \\ \\ h : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' - P \\ \\ k : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' - P^2 \end{array}$$

**Solution.**

- $f(0) = 1 \neq 0$  donc  $f$  n'est pas linéaire.
- Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$g(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q) = \lambda P' + Q' - \lambda P - Q = \lambda(P' - P) + (\lambda Q' - Q) = \lambda g(P) + g(Q)$$

donc  $g$  est linéaire.

- Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$h(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi)(0) = \lambda\varphi(0) + \psi(0) = \lambda h(\varphi) + h(\psi)$$

donc  $h$  est linéaire.

- $k(1) = 0 - 1^2 = -1$  et  $k(2 \times 1) = k(2) = 0 - 2^2 = -4 \neq 2k(1)$  donc  $k$  n'est pas linéaire.

**Exercice 4.** Montrer que l'application  $f : (x; y; z) \mapsto (x + 2y; 4x - y + z; 2x + 2y + 3z)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer  $f^{-1}$ .

**Solution.** Soit  $(x_1; y_1; z_1)$  et  $(x_2; y_2; z_2)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^3$  et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\begin{aligned}
 & f(\lambda(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2)) \\
 &= f((\lambda x_1 + x - 2; \lambda y_1 + y_2; \lambda z_1 + z_2)) \\
 &= (\lambda x_1 + x_2 + 2(\lambda y_1 + y_2); 4(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2); \\
 &\quad 2(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2)) \\
 &= (\lambda(x_1 + 2y_1) + x_2 + 2y_2; \lambda(4x_1 - y_1 + z_1) + (4x_2 - y_2 + z_2); \\
 &\quad \lambda(2x_1 + 2y_1 + 3z_1) + (2x_2 + 2y_2 + 3z_2)) \\
 &= \lambda(x_1 + 2y_1; 4x_1 - y_1 + z_1; 2x_1 + 2y_1 + 3z_1) + \\
 &\quad (x_2 + 2y_2; 4x_2 - y_2 + z_2; 2x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\
 &= \lambda f((x_1; y_1; z_1)) + f((x_2; y_2; z_2))
 \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même c'est-à-dire un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

Montrons que  $f$  est bijective. Soit  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 f((x; y; z)) = (a; b; c) &\iff \begin{cases} x + 2y = a \\ 4x - y + z = b \\ 2x + 2y + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -9y + z = b - 4a & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -2y + 3z = c - 2a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -9y + z = b - 4a \\ 25z = -10a - 2b + 9c & L_3 \leftarrow 9L_3 - 2L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -9y + (-\frac{2}{5}a - \frac{2}{25}b + \frac{9}{25}c) = b - 4a \\ z = -\frac{2}{5}a - \frac{2}{25}b + \frac{9}{25}c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -9y = -\frac{18}{5}a + \frac{27}{25} - \frac{9}{25}c \\ z = -\frac{2}{5}a - \frac{2}{25}b + \frac{9}{25}c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2(\frac{2}{5}a - \frac{3}{25} + \frac{1}{25}c) = a \\ y = \frac{2}{5}a - \frac{3}{25} + \frac{1}{25}c \\ z = -\frac{2}{5}a - \frac{2}{25}b + \frac{9}{25}c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{5}a + \frac{6}{25}b - \frac{2}{25}c \\ y = \frac{2}{5}a - \frac{3}{25}b + \frac{1}{25}c \\ z = -\frac{2}{5}a - \frac{2}{25}b + \frac{9}{25}c \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ , il existe un unique  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f((x; y; z)) = (a; b; c)$  donc  $f$  est bijective et c'est donc un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, le calcul précédent montre que

$$f^{-1} : (x; y; z) \mapsto \left( \frac{1}{5}x + \frac{6}{25}y - \frac{2}{25}z; \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}y + \frac{1}{25}z; -\frac{2}{5}x - \frac{2}{25}y + \frac{9}{25}z \right).$$

**Exercice 5.** Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\
 (x; y; z) \longmapsto (x + y + z; x + 2y - z) & (x; y; z) \longmapsto \begin{pmatrix} x - y & y - z & z - x \\ y - z & z - x & x - y \\ z - x & x - y & y - z \end{pmatrix} \\
 \\
 h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & k : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\
 (x; y; z) \longmapsto (x + y + z; x - z; 2x + y) & P \longmapsto P - XP' - P(0)
 \end{array}$$

**Solution.**

• Détermination de  $\ker(f)$  :

$$\begin{aligned}
 (x; y; z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + (x + 2y) = 0 \\ z = x + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z = x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ z = x + 2(-\frac{2}{3}x) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ z = -\frac{1}{3}x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\ker(f) = \{(x; -\frac{2}{3}x; -\frac{1}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}))$  donc, comme  $(1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ ,  $((1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}))$  est une base de  $\ker(f)$ .

• Détermination de  $\ker(g)$  :

$$(x; y; z) \in \ker(g) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} .$$

Ainsi,  $\ker(g) = \{(x; x; x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; 1; 1))$  donc, comme  $(1; 1; 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ ,  $((1; 1; 1))$  est une base de  $\ker(g)$ .

• Détermination de  $\ker(h)$  :

$$(x; y; z) \in \ker(h) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + x = 0 \\ z = x \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Ainsi,  $\ker(h) = \{(x; -2x; x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; -2; 1))$  donc, comme  $(1; -2; 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ ,  $((1; -2; 1))$  est une base de  $\ker(h)$ .

• Détermination de  $\ker(k)$  :

$$P \in \ker(k) \iff P - XP' - P(0) = 0$$

En notant  $n$  le degré du polynôme  $P$  et  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}
 P \in \ker(k) &\iff \sum_{i=0}^n a_i X^i - X \sum_{i=0}^n i a_i X^{i-1} - a_0 = 0 \iff \sum_{i=1}^n a_i X^i - \sum_{i=1}^n i a_i X^i = 0 \\
 &\iff \sum_{i=1}^n (1 - i) a_i X^i = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - i) a_i = 0 \\
 &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = 0 \iff P = a_0
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\ker(k)$  est  $\mathbb{R}_0[X]$  dont une base est le polynôme constant égal à 1.

### Exercice 6.

1. Montrer que  $f : (x; y; z) \mapsto x - 2y + 3z$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $H = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer une base de  $H$ .

#### Solution.

1. Soit  $(x_1; y_1; z_1)$  et  $(x_2; y_2; z_2)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^3$  et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2)) &= f((\lambda x_1 + x_2; \lambda y_1 + y_2; \lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2) \\ &= \lambda(x_1 - 2y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) \\ &= \lambda f((x_1; y_1; z_1)) + f((x_2; y_2; z_2)) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

2. Par définition,  $H = \ker(f)$  donc, par propriété,  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Par définition,

$$\begin{aligned} H &= \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - 3z\} \\ &= \{(2y - 3z; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y; z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(2; 1; 0) + z(-3; 0; 1) \mid (y; z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

en posant  $v_1 = (2; 1; 0)$  et  $v_2 = (-3; 0; 1)$ . Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $av_1 + bv_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Alors,  $(2a - 3b; a; b) = (0; 0; 0)$  donc  $a = b = 0$  et ainsi  $(v_1, v_2)$  est libre. On conclut que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $H$ .

**Exercice 7.** Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \longmapsto & (x + y; 2x + 2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \longmapsto & (x + y; x + 2y; y) \end{array}$$

#### Solution.

• Par propriété,  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1; 0)), f((0; 1))) = \text{Vect}((1; 2), (1; 2)) = \text{Vect}((1; 2))$  donc  $((1; 2))$  est une base de  $\text{Im}(f)$  et ainsi  $\text{rg}(f) = 1$ .

• Par propriété,  $\text{Im}(g) = \text{Vect}(g((1; 0)), g((0; 1))) = \text{Vect}((1; 1; 0), (1; 2; 1))$ . Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a(1; 1; 0) + b(1; 2; 1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Alors,  $(a + b; a + 2b; b) = (0; 0; 0)$  donc  $b = 0$  puis  $a = 0$ . Ainsi, la famille  $((1; 1; 0), (1; 2; 1))$  est libre et elle forme donc une base de  $\text{Im}(g)$ . Par suite,  $\text{rg}(g) = 2$ .

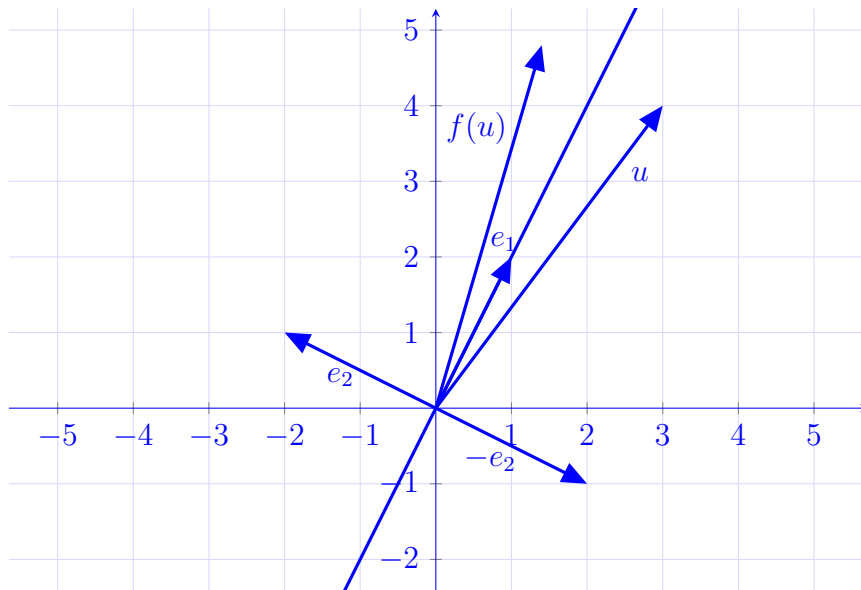
**Exercice 8.** Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , on considère la droite vectorielle  $D$  d'équation  $y = 2x$ .

1. Déterminer une base  $(e_1)$  de  $D$ .
2. On pose  $e_2 = (-2; 1)$ . Démontrer que la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Représenter géométriquement  $D$ ,  $e_1$  et  $e_2$ .
4. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  la symétrie d'axe  $D$ . On admet que  $f$  est linéaire.
  - a. Déterminer graphiquement  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ .
  - b. On considère la vecteur  $u = (3; 4)$ .  
Calculer les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- c. En déduire le symétrique de  $u$  par rapport à  $D$ .
5. Soit  $g$  l'application linéaire définie par  $g = \frac{1}{2}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^2})$ .
- a. Soit un vecteur  $v = \alpha e_1 + \beta e_2$  où  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Vérifier par le calcul que  $g(v)$  appartient à la droite  $D$ .
- b. Déterminer le noyau de  $g$  et interpréter géométriquement.

**Solution.**

1. Par définition,  $D = \{(x; 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; 2))$ . Comme  $e_1 = (1; 2) \neq (0; 0)$ ,  $(e_1)$  est une base de  $D$ .
2. Comme  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , il suffit de montrer que la famille  $(e_1, e_2)$  est libre. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $ae_1 + be_2 = (0; 0)$ . Alors,  $(a - 2b; 2a + b) = (0; 0)$  donc  $a - 2b = 0$  et  $2a + b = 0$ . On en déduit que  $2(a - 2b) - (2a + b) = 0$  c'est-à-dire  $-5b = 0$  donc  $b = 0$  et, par suite,  $a = 0$ . Ainsi,  $(e_1, e_2)$  est libre et c'est donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- 3.



4. a. Graphiquement,  $f(e_1) = e_1$  et  $f(e_2) = -e_2$ .
- b. On cherche deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $u = ae_1 + be_2$  c'est-à-dire  $(3; 4) = (a - 2b; 2a + b)$ .  
Or

$$\begin{cases} a - 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2(4 - 2a) = 3 \\ b = 4 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} 5a - 8 = 3 \\ b = 4 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{11}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2)$  sont  $(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5})$ .

- c. Par linéarité, on en déduit que

$$f(u) = f\left(\frac{11}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2\right) = \frac{11}{5}f(e_1) - \frac{2}{5}f(e_2) = \frac{11}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 = \left(\frac{7}{5}; \frac{24}{5}\right).$$

5. a. Comme  $g$  est linéaire et comme  $D$  est un espace vectoriel, il suffit de montrer que  $g(e_1)$  et  $g(e_2)$  appartiennent à  $D$ . Or,  $g(e_1) = \frac{1}{2}(f(e_1) + e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_1) = e_1 \in D$  et  $g(e_2) = \frac{1}{2}f(e_2) + e_2 = \frac{1}{2}(-e_2) + e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \in D$ . Ainsi, pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $g(\alpha e_1 + \beta e_2) \in D$ .

- b. Le calcul précédent montre que  $e_2 \in \ker(g)$ . Comme  $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ ,  $\dim(\ker(g)) \geq 1$ . De plus,  $\ker(g) \subset \mathbb{R}^2$  donc  $\dim(\ker(g)) \leq 2$  et  $\ker(g) \neq \mathbb{R}^2$  car  $g(e_1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ . Ainsi,  $\dim(\ker(g)) < 2$  donc  $\dim(\ker(g)) = 1$  et finalement  $\ker(g) = \text{Vect}(e_2)$ .
- Si on décompose un vecteur  $v$  dans la base  $(e_1, e_2)$  sous la forme  $v = \alpha e_1 + \beta e_2$  alors  $g(v) = \alpha e_1$  donc  $g$  est la projection sur la droite  $D$  parallèlement à la droite engendrée par  $e_2$  (qui n'est autre que  $\ker(g)$ ).

### Exercice 9.

- Justifier qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f((1; 0; 0)) = (0; 1)$ ,  $f((1; 1; 0)) = (1; 0)$  et  $f((1; 1; 1)) = (1; 1)$ .
- Déterminer explicitement  $f$ .
- Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

### Solution.

- Posons  $e_1 = (1; 0; 0)$ ,  $e_2 = (1; 1; 0)$  et  $e_3 = (1; 1; 1)$  et considérons trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Alors,  $(a + b + c; b + c; c) = (0; 0; 0)$  donc  $c = 0$  puis  $b = 0$  et, enfin,  $a = 0$ . Ainsi,  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre et, comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , on conclut que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Or, on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base donc il existe une unique application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(e_1) = (0; 1)$ ,  $f(e_2) = (1; 0)$  et  $f(e_3) = (1; 1)$ .
- Notons  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $v = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire  $v = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$ . Déterminons les coordonnées  $(a; b; c)$  de  $v$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Pour cela, on remarque que  $e_1 = \varepsilon_1$ ,  $e_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  et  $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  donc  $\varepsilon_1 = e_1$ ,  $\varepsilon_2 = e_2 - e_1$  et  $\varepsilon_3 = e_3 - e_1 - (e_2 - e_1) = e_3 - e_2$ . Ainsi,

$$v = xe_1 + y(e_2 - e_1) + z(e_3 - e_2) = (x - y)e_1 + (y - z)e_2 + ze_3$$

donc, par linéarité de  $f$ ,

$$f(v) = (x - y)f(e_1) + (y - z)f(e_2) + zf(e_3) = (0; x - y) + (y - z; 0) + (z; z) = (y; x - y + z)$$

Ainsi,  $f : (x; y; z) \mapsto (y; x - y + z)$ .

- Par définition,

$$(x; y; z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

donc  $\ker(f) = \{(x; 0; -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; 0; -1))$ . Ainsi,  $\dim(\ker(f)) = 1$  et, par le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$ . Or,  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension 2 donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ .

### Exercice 10.

 Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

- $f : (x; y; z) \mapsto (y - z; z - x; x - y)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même.
- $g : (x, y, z, t) \mapsto (2x + y + z; x + y + t; x + z - t)$  de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution.**

1. Par définition,

$$(x; y; z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ z - x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ z = x \\ x = y \end{cases}$$

donc  $\ker(f) = \{(x; x; x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; 1; 1))$ . Ainsi,  $\dim(\ker(f)) = 1$  et, par le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$ . Or,  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  qui est de dimension 2. Ce sous-espace est engendré par les images par  $f$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire par les vecteurs  $e_1 = (0; -1; 1)$ ,  $e_2 = (1; 0; -1)$  et  $e_3 = (-1; 1; 0)$ . Montrons que  $(e_1, e_2)$  forment une famille libre. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Alors,  $(b; -a; a - b) = (0; 0; 0)$  donc  $a = b = 0$ . Ainsi, la famille est libre et, en raison des dimension,  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

2. Par définition,

$$(x, y, z, t) \in \ker(g) \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + (x + z) = 0 \\ t = x + z \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ t = x + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x - z \\ t = x + z \end{cases}$$

donc

$$\ker(g) = \{(x, -2x - z, z, x + z) \mid (x; z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, -2, 0, 1) + z(0, -1, 1, 1) \mid (x; z) \in \mathbb{R}^2\}$$

donc  $\ker(g) = \text{Vect}(e_1, e_2)$  en posant  $e_1 = (1, -2, 0, 1)$  et  $e_2 = (0, -1, 1, 1)$ . Montrons que  $(e_1, e_2)$  est libre. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$ . Alors,  $(a, -2a - b, b, a + b) = (0, 0, 0, 0)$  donc  $a = b = 0$  et ainsi la famille  $(e_1, e_2)$  est libre. On en déduit que c'est une base de  $\ker(g)$ . Ainsi,  $\dim(\ker(g)) = 2$  et, par le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(g)) = 4 - 2 = 2$ . Or,  $\text{Im}(g)$  contient la vecteur  $g(1, 0, 0, 0) = (2; 1; 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $((2; 1; 1))$  est une base de  $\text{Im}(g)$ .

**Exercice 11.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $f : P \mapsto P + P'$  est un automorphisme  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Solution.** Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2) + (\lambda P_1 + P_2)' = \lambda P_1 + P_2 + \lambda P_1' + P_2' = \lambda(P_1 + P_1') + P_2 + P_2' = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

donc  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $P \in \ker(f)$ . Alors,  $P + P' = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$  donc  $P = -P'$ . Or, si  $P \neq 0$ ,  $\deg(P) > \deg(P')$  et donc  $P \neq -P'$ . Ainsi,  $P = 0$  donc  $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ . Dès lors,  $f$  est injective et, en raison des dimensions,  $f$  est bijective. Ainsi,  $f$  est bien un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 12.** Soit  $t_1, t_2$  et  $t_3$  trois réels distincts.

1. Montrer que  $f : P \mapsto (P(t_1); P(t_2); P(t_3))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $s_1, s_2$  et  $s_3$  des réels. Dédurre de la question précédente qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $P(t_1) = s_1, P(t_2) = s_2$  et  $P(t_3) = s_3$ .

**Solution.**

1. Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2) &= ((\lambda P_1 + P_2)(0); (\lambda P_1 + P_2)'(0); (\lambda P_1 + P_2)''(0)) \\ &= (\lambda P_1(0) + P_2(0); \lambda P_1'(0) + P_2'(0); \lambda P_1''(0) + P_2''(0)) \\ &= \lambda (P_1(0); P_1'(0); P_1''(0)) + (P_2(0); P_2'(0); P_2''(0)) \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

donc  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Déterminons son noyau. Soit  $P \in \ker(f)$ . Alors,  $P(t_1) = 0$ ,  $P(t_2) = 0$  et  $P(t_3) = 0$  donc  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont trois racines distinctes de  $P$ . Comme  $\deg(P) \leq 2$ , on en déduit que  $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ . Ainsi,  $f$  est injective et, comme  $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ,  $f$  est un isomorphisme.

2. Comme  $f$  est bijective, pour tout  $(s_1; s_2; s_3) \in \mathbb{R}^3$ , il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $f(P) = (s_1; s_2; s_3)$  c'est-à-dire tel que  $P(t_1) = s_1$ ,  $P(t_2) = s_2$  et  $P(t_3) = s_3$ .

**Exercice 13.**

1. Montrer que  $f : A \mapsto A + {}^tA$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2. Déterminer une base de  $\ker(f)$  et en déduire la dimension de  $\text{Im}(f)$ .

**Solution.**

1. Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux éléments de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, par linéarité de la transposition,

$$\begin{aligned} f(\lambda A_1 + A_2) &= (\lambda A_1 + A_2) + {}^t(\lambda A_1 + A_2) = \lambda A_1 + A_2 + {}^t(\lambda A_1) + {}^tA_2 \\ &= \lambda(A_1 + {}^tA_1) + A_2 + {}^tA_2 = \lambda f(A_1) + f(A_2) \end{aligned}$$

donc  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \ker(f)$ . Alors  $A + {}^tA = 0_3$  donc

$$= \begin{pmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,2} + a_{2,1} & a_{1,3} + a_{3,1} \\ a_{2,1} + a_{1,2} & 2a_{2,2} & a_{2,3} + a_{3,2} \\ a_{3,1} + a_{1,3} & a_{3,2} + a_{2,3} & 2a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc  $a_{1,1} = 0$ ,  $a_{1,2} = -a_{2,1}$ ,  $a_{1,3} = -a_{3,1}$ ,  $a_{2,2} = 0$ ,  $a_{2,3} = -a_{3,2}$  et  $a_{3,3} = 0$ . Ainsi,

$$\ker(f) \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$$

en posant  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Inversement, on vérifie facilement que  $f(A_1) = 0_3$ ,  $f(A_2) = 0_3$  et  $f(A_3) = 0_3$  donc, comme  $\ker(f)$  est un espace vectoriel,  $\text{Vect}(A_1, A_2, A_3) \subset \ker(f)$ . On conclut donc que  $\ker(f) = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$ .

Considérons des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0_3$ . Alors,  $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

donc  $a = b = c = 0$  et ainsi  $(A_1, A_2, A_3)$  est libre. On conclut que  $(A_1, A_2, A_3)$  est une base de  $\ker(f)$ . Dès lors,  $\dim(\ker(f)) = 3$  et, par le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f)) = 3^2 - 3 = 6$ .



### Exercice 14.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a. Montrer que  $f_n : P \mapsto P(X+1) - P(X)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- b. Déterminer  $\ker(f_n)$  et en déduire que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

2. Montrer que l'application  $g : P \mapsto P(X+1) - P(X)$  est un endomorphisme surjectif de  $\mathbb{R}[X]$ .

### Solution.

1. Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f_n(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X) \\ &= \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - (\lambda P_1(X) + P_2(X)) \\ &= \lambda(P_1(X+1) - P_1(X)) + P_2(X+1) - P_2(X) \\ &= \lambda f_n(P_1) + f_n(P_2) \end{aligned}$$

donc  $f_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Soit  $P \in \ker(f_n)$ . Alors, pour tout réel  $x$ ,  $P(x+1) = P(x)$  donc  $P(0) = P(1) = P(2) = \dots = P(n)$ . Dès lors, le polynôme  $Q = P - P(0)$  possède  $n+1$  racines distinctes donc, comme  $\deg(Q) \leq n$ ,  $Q = 0$  donc  $P$  est constant égal à  $P(0)$ . Inversement, si  $P$  est un polynôme constant alors  $P(X+1) = P(X)$  donc  $f_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ . Ainsi,  $\ker(f_n) = \mathbb{R}_0[X]$ . Dès lors,  $\dim(\ker(f_n)) = 1$  donc, par le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n$ .

Or, si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$  alors

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k [(X+1)^k - X^k]$$

et, par la formule du binôme de Newton, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$(X+1)^k - X^k = X^k + \binom{k}{1} X^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} X + 1 - X^k = \binom{k}{1} X^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} X + 1$$

est un polynôme de degré  $k-1$  donc  $f_n(P)$  est une polynôme de degré au plus  $n-1$ . Ainsi,  $\text{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et, comme  $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\text{Im}(f_n))$ , on conclut que  $\text{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

3. Comme dans la question 1.,  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ . Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$  alors  $Q = f(0_{\mathbb{R}[X]})$ . Sinon, notons  $d$  le degré de  $Q$ . Alors,  $Q \in \mathbb{R}_d[X]$  donc, comme  $f_{d+1}$  est une application linéaire surjective de  $\mathbb{R}_{d+1}[X]$  sur  $\mathbb{R}_d[X]$ , il existe  $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$  tel que  $Q = f_{d+1}(P) = P(X+1) - P(X)$ . Ainsi,  $Q = g(P)$  donc  $g$  est surjectif.