⧫ Corrigés des exercices du chapitre 3

Exercice 1. Déterminer la nature et calculer la somme de chacune des séries suivantes.

1. $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2.** $\sum \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n-1}$ **3.** $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ **4.** $\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$.

Solution. Dans chaque cas, on reconnaît (ou on fait apparaître) une somme téléscopique.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

donc $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ diverge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = +\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-k-1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)} = \mathrm{e}^{-0} - \mathrm{e}^{-(n+1)} = 1 - \mathrm{e}^{-(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} -(n+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)} = 0$. Ainsi, $\sum \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n-1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n-1} = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) \\
&= \ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

donc $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

4. Pour tout entier $n \geqslant$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1} \times \frac{k}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)
\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. Ainsi, $\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln(2)$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série dans chacun des cas suivants.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\cos^2(n)}$ **2.** $\displaystyle\sum\frac{n+5}{n^3+n+1}$ **3.** $\displaystyle\sum\frac{n\sqrt{n}}{n^4+1}$ **4.** $\displaystyle\sum\frac{n+1}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum\frac{\mathrm{e}^n}{(n+1)^2}$ **6.** $\displaystyle\sum\frac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{6^n}$ **7.** $\displaystyle\sum\frac{n(n-1)}{3^n+1}$ **8.** $\displaystyle\sum\frac{5^n+2}{5+4^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\frac{1}{2n}\right)$ **10.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{1}{2n}\right)$ **11.** $\displaystyle\sum\frac{3n+4}{2^n+5}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution.

1. Pour tout entier $n\geqslant 1$, $0<\cos^2(n)\leqslant 1$ donc $0<n\cos^2(n)\leqslant n$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{n\cos^2(n)}\geqslant\dfrac{1}{n}$. Or, par théorème, la série $\displaystyle\sum_{n_geqslant1}\frac{1}{n}$ diverge donc, par théorème, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\cos^2(n)}$ diverge également.

2. $\dfrac{n+5}{n^3+n+1}\sim\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{n+5}{n^3+n+1}$ converge.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^4+1}\leqslant\dfrac{n^2}{n^4}=\dfrac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{n\sqrt{n}}{n^4+1}$ converge.

4. $\dfrac{n+1}{n^2+1}\sim\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge donc, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{n+1}{n^2+1}$ diverge.

5. $\dfrac{e^n}{(n+1)^2}\sim\dfrac{e^n}{n^2}$ et, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^2}=+\infty$ donc la série de terme général $\dfrac{e^n}{n^2}$ diverge grossièrement et ainsi, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{\mathrm{e}^n}{(n+1)^2}$ diverge.

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|\leqslant 1$ donc $\dfrac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{6^n}\leqslant\dfrac{1}{6^n}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$. Or, comme $0\leqslant\dfrac{1}{6}<1$, la série géométrique $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{6}\right)^n$ converge et ainsi, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{6^n}$ converge.

7. $\dfrac{n(n-1)}{3^n+1}\sim\dfrac{n(n-1)}{3^n}=n(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{9}\times n(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$. Comme $0\leqslant\dfrac{1}{3}<1$, la série géométrique dérivée $\displaystyle\sum n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ converge donc, par produit par une constante, $\displaystyle\sum n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge également et finalement, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{n(n-1)}{3^n+1}$ converge.

8. $\dfrac{5^n+2}{5+4^n}\sim\dfrac{5^n}{4^n}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ et, comme $\dfrac{5}{4}\geqslant 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum\left(\frac{5}{4}\right)^n$ diverge donc, par théorème, $\displaystyle\sum\frac{5^n+2}{5+4^n}$ diverge.

9. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}=\cos(0)=1$ donc, par composition, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{2n}\right)=1$ donc la série $\displaystyle\sum\cos\left(\frac{1}{2n}\right)$ diverge grossièrement.

10. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, $\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$. Or, par théorème, $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum \frac{1}{2n}$ aussi et ainsi, par théorème, $\sum \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$ diverge également.

11. $\frac{3n+4}{2^n+5} \sim \frac{3n}{2^n} = \frac{3}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Or, comme $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$, la série géométrique dérivée $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge donc, par produit, $\sum \frac{3n}{2^n}$ converge et ainsi, par produit, $\sum \frac{3n+4}{2^n+5}$ converge.

12. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Or, par théorème, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc, par théorème, $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Exercice 3. Étudier la nature des séries suivantes et calculer la somme en cas de convergence.

1. $\sum \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ **2.** $\sum \frac{4^{n+1}}{n!}$ **3.** $\sum \frac{4^n+3^n}{5^n}$ **4.** $\sum \frac{7^n+6}{(n+1)!}$.

Solution.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)+1} = \frac{1}{2\times 0+1} - \frac{1}{2(n+1)+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $\sum \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4^n+1}{n!} = 4 \times \frac{4^n}{n!}$ et ainsi la série est le produit par une constante d'une série exponentielle. On en déduit qu'elle converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{n!} = 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} = 4\mathrm{e}^4$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4^n+3^n}{5^n} = \frac{4^n}{5^n} + \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Or, comme $0 \leqslant \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$, les deux séries géométriques $\sum\left(\frac{4}{5}\right)^n$ et $\sum\left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge donc, par somme, la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{15}{2}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{7^k+6}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{7^{k-1}+6}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{7^{k-1}+6}{k!} - \frac{7^{-1}+6}{0!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{7^{-1}7^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{43}{7}$$
$$= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{7^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{43}{7} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{7} \times \mathrm{e}^7 + 6 \times e - \frac{43}{7}$$

donc la série converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{7^n+6}{(n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^7+42e-43}{7}$.

Exercice 4. Soit p un réel de $]0\,;1[$ et λ un réel quelconque. Étudier la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes en cas de convergence.

1. $\sum_{n\geqslant 1} p(1-p)^{n-1}$ **2.** $\sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1}$ **3.** $\sum_{n\geqslant 1} n^2p(1-p)^{n-1}$

4. $\sum \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ **5.** $\sum n\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ **6.** $\sum n^2\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$

Solution.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k$ et, comme $p \in \,]0\,;1[$, $1-p \in \,]0\,;1[$ donc la série géométrique $\sum(1-p)^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-(1-p)} = \dfrac{1}{p}$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} p(1-p)^{n-1}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = p \times \dfrac{1}{p} = 1$.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n} k(1-p)^k$ et, comme $p \in \,]0\,;1[$, $1-p \in \,]0\,;1[$ donc la série géométrique dérivée $n\sum(1-p)^{n-1}$ converge vers $\dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = \dfrac{1}{p^2}$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p \times \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p}$.

3. Pour tout entier $k \geqslant 1$, $k^2 = k(k-1)+k$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2p(1-p)^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)(1-p)^{k-1}\\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Or, comme $p \in \,]0\,;1[$, $1-p \in \,]0\,;1[$ donc les séries géométriques dérivées $\sum n(1-p)^{n-1}$ et $\sum n(n-1)(1-p)^{n-2}$ convergent respectivement vers $\dfrac{1}{p^2}$ et $\dfrac{2}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{2}{p^3}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2p(1-p)^{n-1}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2p(1-p)^{n-1} = p(1-p)\times\frac{2}{p^3} + p\times\frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

4. La série exponentielle $\sum \dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge donc, par produit par une constante, $\sum \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda} = \mathrm{e}^0 = 1$.

5. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=9}^{n} k\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=9}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=9}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$$

donc la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = \lambda$.

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1) + k$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=9}^{n} k^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} (k(k-1)+k) \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \left[\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} \right] \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right] = \mathrm{e}^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right] \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda} \left[\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda} \right] = \lambda^2 + \lambda\end{aligned}$$

Ainsi, la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 + \lambda$.

Exercice 5.

1. Justifier que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}$ converge et calculer sa somme S_1 en admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. a. Justifier que $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge. On note S_2 sa somme.

b. Déterminer $S_1 + S_2$ puis en déduire la valeur de S_2.

Solution.

1. $\displaystyle\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{n^2}$ et, par théorème, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par produit par une constante, la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{(2n)^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$ donc $S_1 = \displaystyle\frac{\pi^2}{24}$.

2. a. $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{(2n)^2}$ et on vient de voir que la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{(2n)^2}$ converge donc la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

b. S_1 représente la somme des inverses des carrés des entiers pairs et S_2 la somme des inverses des carrés des entiers impairs donc $S_1 + S_2$ est la somme des inverses des carrés de tous les entiers strictement positifs. Ainsi, $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit que $S_2 = \displaystyle\frac{\pi^2}{6} - S_1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24}$ donc $S_2 = \displaystyle\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout entier $k > 0$, si $k \leqslant n$ alors $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$ puis déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution.

1. Soit un entier $k > 0$ tel que $k \leqslant n$. Alors, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $0 < \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les termes de la somme sont positifs,

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\geqslant 0} \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = +\infty$. On en déduit que la suite des sommes partielles (S_n) n'est pas bornée donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 7.

1. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\ln(n)}}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln(n))^n}$.

2. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $(\ln(n))^{\ln(n)} = n^{\ln(\ln(n))}$.

b. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\ln(\ln(n)) \geqslant 2$.

c. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

Solution.

1. Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{e}^2$, $\ln(n) \geqslant 2$ donc $n^{\ln(n)} \geqslant n^2 > 0$ et ainsi $\frac{1}{n^{\ln(n)}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc, par théorème, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\ln(n)}}$ converge aussi.

Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{e}^2$, $\ln(n) \geqslant 2$ donc $(\ln(n))^n \geqslant 2^n$ et ainsi $\frac{1}{(\ln(n))^n} \leqslant \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $0 \leqslant \frac{1}{2} < 0$ donc, par théorème, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ converge aussi.

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $(\ln(n))^{\ln(n)} = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))} = \left(\mathrm{e}^{\ln(n)}\right)\ln(\ln(n)) = n^{\ln(\ln(n))}$.

b. Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}$, par croissance de ln, $\ln(\ln(n)) \geqslant \ln(\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2})) = \ln(\mathrm{e}^2) = 2$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \approx 1618{,}2$ donc $N = 1619$ convient.

c. Pour tout $n \geqslant N$, $\ln(\ln(n)) \geqslant 2$ donc $n^{\ln(\ln(n))} \geqslant n^2 > 0$ et ainsi $\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc, par théorème, la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$ c'est-à-dire, d'après la question **a.**, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ converge.

Exercice 8.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f_m : [2\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^m}$.

Calculer, pour tout réel $x \geqslant 2$, $f_m'(x)$ et en déduire les variations de f_m sur $[2\,;+\infty[$.

2. a. Soit un entier $k \geqslant 2$. Justifier que pour tout $x \in [k\,;k+1]$, $\frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \frac{1}{x\ln(x)}$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

d. Calculer l'intégrale de la question précédente et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

3. **a.** Soit un entier $k \geqslant 3$. Justifier que pour tout $x \in [k-1\,;k]$, $\frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \frac{1}{x(\ln(x))^2}$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 3$, $\frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\ln(x))^2} \mathrm{d}x$.

c. En s'inspirant de la démarche de la question **2.**, déduire la nature de $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

d. Soit un entier $p \geqslant 2$. Déduire de la question précédente la nature de $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$.

Solution.

1. La fonction f_m est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ par produit et quotient de fonctions dérivables et

$$\forall x \geqslant 2, \quad f_m'(x) = -\frac{1 \times (\ln(x))^m + x \times m \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^{m-1}}{(x(\ln(x))^m)^2} = -\frac{(\ln(x))^{m-1}(\ln(x)+m)}{(x(\ln(x))^m)^2}.$$

Or, pour tout $x \geqslant 2$, $\ln(x) > 0$ et $m > 0$ donc $f_m'(x) < 0$. Ainsi, la fonction f_m est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

2. **a.** Par décroissance de f_1 sur $[2\,;+\infty[$, pour tout $x \in [k\,;k+1]$, $f_1(k) \geqslant f_1(x)$ c'est-à-dire $\frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \frac{1}{x\ln(x)}$.

b. Soit un entier $k \geqslant 2$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)} \mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

Or, comme $\frac{1}{k\ln(k)}$ ne dépend pas de x,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)} \mathrm{d}x = ((k+1)-k) \times \frac{1}{k\ln(k)} = \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Ainsi, on a bien

$$\frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

c. Soit un entier $n \geqslant 2$. On déduit de la question précédente que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x$$

la dernière égalité découlant de la relation de Chasles sur les intégrales.

d. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors, en faisant apparaître une forme $\frac{u'}{u}$,

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(2).$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(2).$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$. Par comparaison, on en déduit que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$ donc la série diverge.

3. a. Par décroissance de f_2 sur $[2\,;+\infty[$, pour tout $x \in [k-1\,;k]$, $f_2(k) \leqslant f_2(x)$ c'est-à-dire $\frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \frac{1}{x(\ln(x))^2}$.

b. Soit un entier $k \geqslant 3$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\ln(k))^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, comme $\frac{1}{k(\ln(k))^2}$ ne dépend pas de x,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\ln(k))^2}\,\mathrm{d}x = (k-(k-1)) \times \frac{1}{k(\ln(k))^2} = \frac{1}{k(\ln(k))^2}.$$

Ainsi, on a bien

$$\frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

c. Soit un entier $n \geqslant 3$. On déduit de la question précédente que

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\ln(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, en faisant apparaître une forme $\frac{u'}{u^2}$,

$$\int_{2}^{n} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n} \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^n = -\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(2)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$$

car $\ln(n) > 0$ puisque $n \geqslant 3$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}.$$

Ainsi, les sommes partielles sont majorées donc elle converge et on conclut que $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ converge.

d. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant 1$ donc $\ln(n)^2 \leqslant \ln(n)^p$. Dès lors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $0 < n(\ln(n))^2 \leqslant n(\ln(n))^p$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{n(\ln(n))^p} \leqslant \frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Par comparaison, on déduit de la question précédente que la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ converge.

Exercice 9.

1. Déterminer $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

2. En déduire que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Solution.

1. Soit a et b deux réels. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1} = \dfrac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \dfrac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$. Ainsi, il suffit que $a+b=0$ et $a=1$ c'est-à-dire $a=1$ et $b=-1$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

2. En reconnaissant une somme téléscopique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc la série converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exercice 10.

1. Déterminer $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.

2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Solution.

1. Soit a, b et c des réels. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{a(k^2+3k+2)+b(k^2+2k)+c(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit que $a+b+c=0$ et $3a+2b+c=0$ et $2a=1$ c'est-à-dire $a=\frac{1}{2}$, $b+c=-\frac{1}{2}$ et $2b+c=-\frac{3}{2}$. On en déduit que $(2b+c)-(b+c) = -\frac{3}{2}+\frac{1}{2} = -1$ donc $b=-\frac{1}{2}$ et finalement $c=\frac{1}{2}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{k+2}$.

2. En faisant apparaître une somme téléscopique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1}\right) - \left(\frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

donc la série converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 11. On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = +\infty$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{F_n F_{n+2}}$ converge et calculer sa somme.

Solution. Pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k F_{k+2}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k+1}}{F_k F_{k+2} F_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k+2} - F_k}{F_k F_{k+2} F_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k F_{k+1}} - \frac{1}{F_{k+1} F_{k+2}} \\ &= \frac{1}{F_1 F_2} - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1\end{aligned}$$

car $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{n+1} F_{n+2} = +\infty$.

Ainsi, la série converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{F_n F_{n+2}} = 1$.

Exercice 12.

1. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin^2(x) \leqslant \frac{1}{2}\}$ ne contient pas trois entiers consécutifs.

2. En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\sin^2(n)}{n}$ diverge.

Solution.

1. Pour tout réel x,

$$\sin^2(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff |\sin(x)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}} \iff |\sin(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

À l'aide du cercle trigonométrique, on en déduit que $\sin^2(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi$. Ceci définit deux intervalles de longueur $\dfrac{\pi}{2} < 2$ donc chaque intervalle contient au plus 2 entiers. De plus l'écart entre les deux intervalles aussi $\frac{\pi}{2} > 1$ donc il y a toujours un entier entre deux intervalles consécutifs. Ainsi, trois entiers consécutifs ne peuvent pas tous les trois appartenir à $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin^2(x) \leqslant \frac{1}{2}\}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en rassemblant les termes 3 par 3,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3n} \frac{\sin^2(k)}{k} &= \left(\frac{\sin^2(1)}{1} + \frac{\sin^2(2)}{2} + \frac{\sin^2(3)}{3}\right) + \left(\frac{\sin^2(4)}{4} + \frac{\sin^2(5)}{5} + \frac{\sin^2(6)}{6}\right) + \cdots \\ &\qquad + \left(\frac{\sin^2(3n-2)}{3n-2} + \frac{\sin^2(3n-1)}{3n-1} + \frac{\sin^2(3n)}{3n}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\sin^2(3p-2)}{3p-2} + \frac{\sin^2(3p-1)}{3p-1} + \frac{\sin^2(3p)}{3p}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, dans chaque parenthèse, un terme à son numérateur au moins égal à $\dfrac{1}{2}$ et les autres termes sont positifs. De plus, dans la p-ième parenthèse, les trois termes ont un dénominateur inférieur ou égal à $3p$ donc

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\sin^2(k)}{k} \geqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{1}{3p} = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série n'est pas majorée donc la série diverge.