⧫ Corrigés des exercices du chapitre 2

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, montrer que F_i est un sous-espace vectoriel de E.

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F_1=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y=0\}$.
2. $E=\mathbb{R}^3$, $F_2=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+3z=0\}$
3. $E=\mathbb{R}^3$, $F_3=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y=0 \text{ et } x+y+3z=0\}$.
4. $E=\mathbb{R}[X]$, $F_4=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P(1)=0\}$
5. $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $F_5=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM=MA\}$ où $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
6. $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F_6=\{f\in E \mid f \text{ est dérivable}\}$

Solution.

1. Par définition, $F_1\subset E$. De plus $0_E=(0\,;0\,;0)\in F_1$ car $0+2\times 0=0$. Enfin, si $v_1=(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $v_2=(x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont deux éléments de F_1 et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda v_1+v_2=(\lambda x_1+x_2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)$ et
$$(\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)=\lambda(x_1+2y_1)+x_2+2y_2=0$$
car v_1 et v_2 appartiennent à F_1 donc $x_1+2y_1=x_2+2y_2=0$. Ainsi, $\lambda v_1+v_2\in F_1$.
On conclut que $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
2. Par définition, $F_2\subset E$. De plus $0_E=(0\,;0\,;0)\in F_2$ car $0+0+3\times 0=0$. Enfin, si $v_1=(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $v_2=(x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont deux éléments de F_2 et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda v_1+v_2=(\lambda x_1+x_2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)$ et
$$(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2)=\lambda(x_1+y_1+3z_1)+(x_2+y_2+3z_2)=0$$
car v_1 et v_2 appartiennent à F_2 donc $x_1+y_1+3z_1=x_2+y_2+3z_2=0$. Ainsi, $\lambda v_1+v_2\in F_2$.
On conclut que $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
3. F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $E=\mathbb{R}^3$ et $F_3=F_1\cap F_2$, par conséquent, $\boxed{F_3 \text{ est également un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.
4. Par définition, $F_4\subset E$. De plus 0_E est le polynôme nul qui s'annule bien en 1 donc $0_E\in F_4$. Enfin, si P_1 et P_2 sont deux éléments de F_4 et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $(\lambda P_1+P_2)(1)=\lambda P_1(1)+P_2(1)=0$ car P_1 et P_2 appartiennent à F_4 donc $P_1(1)=P_2(1)=0$. Ainsi, $\lambda P_1+P_2\in F_4$.
On conclut que $\boxed{F_4 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
5. Par définition, $F_5\subset E$. De plus 0_E est la matrice nulle 0_n et, par propriété, $A0_n=0_nA=0_n$ donc $0_E\in F_5$. Enfin, si M_1 et M_2 sont deux éléments de F_5 et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors
$$A(\lambda M_1+M_2)=\lambda(AM_1)+AM_2=\lambda M_1A+M_2A=(\lambda M_1+M_2)A$$
car M_1 et M_2 appartiennent à F_5 donc $AM_1=M_1A$ et $AM_2=M_2A$. Ainsi, $\lambda M_1+M_2\in F_5$.
On conclut que $\boxed{F_5 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
6. Par définition, $F_6\subset E$. De plus 0_E est la fonction nulle qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $0_E\in F_6$. Enfin, si f_1 et f_2 sont deux éléments de F_6 et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc λf_1+f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\lambda f_1+f_2\in F_6$.
On conclut que $\boxed{F_6 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$.
2. $B = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
3. $C = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
4. $D = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Solution.

1. $v = (-1\,;0) \in A$ car $-1 \leqslant 0$ mais $-v = (1\,;0) \notin A$ car $1 > 0$. Ainsi, A n'est pas stable par le produit par un scalaire donc $\boxed{A \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.
2. $v_1 = (0\,;1)$ et $v_2 = (1\,;0)$ appartiennent à B car $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$ mais $v_1 + v_2 = (1\,;1) \notin B$ car $1 \times 1 = 1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble B n'est pas stable par addition donc on conclut que $\boxed{B \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.
3. Par définition $C \subset \mathbb{R}^2$ et $0_{\mathbb{R}^2} \in C$ car $0 = 0$. Soit $v_1 = (x_1\,;y_1)$ et $v_2 = (x_2\,;y_2)$ deux éléments de C et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2\,;\lambda y_1 + y_2)$ et, comme $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$, $\lambda x_1 + y_1 = \lambda x_2 + y_2$ donc $\lambda v_1 + v_2 \in C$.
   Ainsi, $\boxed{C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.
4. $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin D$ car $0 + 0 \neq 1$ donc $\boxed{D \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $A = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est monotone sur } \mathbb{R}\}$.
2. $B = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
3. $C = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$.
4. $D = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est impaire}\}$.

Solution.

1. La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction affine $g : x \longmapsto -3x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Cependant, la fonction $f + g : x \longmapsto x^3 - 3x$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ car $(f + g)(0) = 0 > -2 = (f + g)(1)$ mais $(f + g)(0) = 0 < (f + g)(2) = 2$. Ainsi, A n'est pas stable par somme donc $\boxed{A \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E}$.
2. Par définition, $B \subset E$. De plus 0_E est la fonction nulle qui s'annule bien en 0 donc $0_E \in B$. Enfin, si f_1 et f_2 sont deux éléments de B et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda f_1 + f_2)(0) = \lambda f_1(0) + f_2(0) = 0$ car f_1 et f_2 appartiennent à B donc $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Ainsi, $\lambda f_1 + f_2 \in B$. On conclut que $\boxed{B \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
3. Considérons les fonctions $f_1 : x \longmapsto \cos^2(x)$ et $f_2 : x \longmapsto \sin^2(x)$. Alors, $f_1(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $f_2(0) = 0$ donc f_1 et f_2 appartiennent à C. Cependant, pour tout réel x, $f_1(x) + f_2(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0$ donc $f_1 + f_2 \neq C$. Ainsi, C n'est pas stable par somme donc l'ensemble $\boxed{C \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E}$.
4. Par définition, $D \subset E$. De plus 0_E est la fonction nulle qui est impaire (puisque $-0 = 0$) donc $0_E \in D$. Enfin, si f_1 et f_2 sont deux éléments de D et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, pour tout réel x,

$$(\lambda f_1 + f_2)(-x) = \lambda f_1(-x) + f_2(-x) = -\lambda f_1(x) - f_2(x) = -(\lambda f_1 + f_2)(x)$$

   car f_1 et f_2 sont impaires donc $\lambda f_1 + f_2 \in D$.
   On conclut que $\boxed{D \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Exercice 4. On considère les ensembles

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(a-b\,;a+b\,;a-3b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $F \cap G$.

Solution.

1. Par définition, $F \subset \mathbb{R}^3$. De plus $0_{\mathbb{R}^3} = (0\,;0\,;0) \in F$ car $0+0-0=0$. Enfin, si $v_1 = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $v_2 = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2\,;\lambda y_1 + y_2\,;\lambda z_1 + z_2)$ et

$$(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1+y_1-z_1) + x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

car v_1 et v_2 appartiennent à F donc $x_1+y_1-z_1 = x_2+y_2-z_2 = 0$. Ainsi, $\lambda v_1 + v_2 \in F$ et on conclut que F est un sous-espace vectoriel de E.
Pour G, on peut remarquer que

$$G = \{a\,(1\,;1\,;1) + b\,(-1\,;1\,;-3) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

donc, en posant $u = (1\,;1\,;1)$ et $v = (-1\,;1\,;-3)$, $G = \mathrm{Vect}(u,v)$ ce qui permet de conclure que $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Un élément $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $F \cap G$ si et seulement si $x+y-z=0$ et il existe deux réels a et b tels que $x=a-b$, $y=a+b$ et $z=a-3b$. Or,

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases} \iff \begin{cases} (a-b)+(a+b)-(a-3b)=0 \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases} \iff \begin{cases} a+3b=0 \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-3b \\ x=-4b \\ y=-2b \\ z=-6b \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{F \cap G \text{ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur } w = (-4\,;-2\,;-6)}$ (qui est aussi la droite vectorielle engendrée par $-\frac{1}{2}w = (2\,;1\,;3)$).

Exercice 5. On considère les vecteurs $u = (-4\,;4\,;3)$, $v = (-3\,;2\,;1)$, $s = (-1\,;2\,;2)$ et $t = (-1\,;6\,;7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(s,t)$.

Solution. On peut remarquer que $s = u - v$ et $t = 4u - 5v$ donc s et t appartiennent à $\mathrm{Vect}(u,v)$ et donc $\mathrm{Vect}(s,t) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.
Réciproquement, on remarque que $u = 5s - t$ et $v = 4s - t$ donc $\mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathrm{Vect}(s,t)$.
Par le principe de double inclusion, on conclut que $\boxed{\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(s,t)}$.

Exercice 6. On considère les vecteurs $u = (1\,;1\,;1)$ et $v = (1\,;0\,;-1)$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{(2a\,; a + b\,; 2b) \mid (a\,; b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Solution. Posons $F = \{(2a\,; a + b\,; 2b) \mid (a\,; b) \in \mathbb{R}^2\}$. On remarque que

$$F = \{a\,(2\,;1\,;0) + b\,(0\,;1\,;2) \mid (a\,; b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(s, t)$$

en posant $s = (2\,;1\,;0)$ et $t = (0\,;1\,;2)$.

Or, $u = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$ et $v = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$ donc, en raisonnant comme dans l'exercice précédent, $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(s, t)$ et, inversement, $s = u + v$ et $t = u - v$ donc, de même, $\mathrm{Vect}(s, t) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$. On conclut donc que $\boxed{\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(s, t)}$ par le principe de double inclusion.

Exercice 7. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;1)$ et $v_2 = (1\,;2\,;2)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;0)$, $v_2 = (1\,;1\,;0)$ et $v_3 = (1\,;1\,;1)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;2\,;1)$, $v_2 = (2\,;1\,;-1)$ et $v_3 = (1\,;-1\,;-2)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;-1\,;1)$, $v_2 = (2\,;-1\,;3)$ et $v_3 = (-1\,;1\,;-1)$.

Solution.

1. Soit a et b deux réels tels que $av_1 + bv_2 = 0$. Alors, $a + b = 0$, $2b = 0$ et $a + 2b = 0$ donc $b = 0$ et $a = 0$. On conclut donc que la famille $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est libre}}$.
2. Soit a, b et c des réels tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Alors, $a + b + c = 0$, $b + c = 0$ et $c = 0$ donc $c = 0$, $b = 0$ et $a = 0$. On conclut que la famille $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est libre}}$.
3. On remarque de $v_2 = v_1 + v_3$ donc la famille $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est liée}}$.
4. On remarque que $v_3 = -v_1$ donc la famille $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est liée}}$.

Exercice 8. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère :

$$f_1 = \cos \qquad f_2 : x \longmapsto x\cos(x) \qquad f_3 = \sin \qquad \text{et} \qquad f_4 : x \longmapsto x\sin(x).$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ?

Solution. Considérons des réels a, b, c et d tels que $af_1 + bf_1 + cf_3 + df_4 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Ainsi, pour tout réel x, $a\cos(x) + bx\cos(x) + c\sin(x) + dx\sin(x) = 0$. En particulier,

- pour $x = 0$, on obtient $a = 0$;
- pour $x = \pi$, on obtient $-a - b\pi = 0$ donc, comme $a = 0$, $b = 0$;
- pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $c + d\frac{\pi}{2} = 0$ et, pour $x = -\frac{\pi}{2}$, on obtient $-c + d\frac{\pi}{2} = 0$. En soustrayant terme à terme, il vient $2c = 0$ donc $c = 0$ et, par suite, $d = 0$.

Ainsi, $a = b = c = d = 0$ donc la famille $\boxed{(f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ est libre}}$.

Exercice 9. Soit E un K-espace vectoriel et (u, v, w) une famille libre de E. On pose $e = v + w$, $f = u + w$ et $g = u + v$.

Montrer que (e, f, g) est une famille libre de E.

Solution. Soit a, b et c des réels tels que $ae+bf+cg=0$. Alors, $a(v+w)+b(u+w)+c(u+v)=0$ donc $(b+c)u+(a+c)v+(a+b)w=0$. Or, la famille (u,v,w) est libre donc on en déduit que $b+c=0$, $a+c=0$ et $a+b=0$. Or,

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-c \\ a=-c \\ (-c)+(-c)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-c \\ a=-c \\ -2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases}.$$

Ainsi, par définition, la famille $\boxed{(e,f,g) \text{ est libre}}$.

Exercice 10. Soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid -x+2y+3z-t=0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

Solution.

1. Par définition, $F\subset\mathbb{R}^4$ et $0_{\mathbb{R}^4}\in F$ car $-0+2\times 0+3\times 0-0=0$. De plus, si $v_1=(x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $v_2=(x_2,y_2,z_2,t_2)$ sont des éléments de F et λ est un réel alors $\lambda v_1+v_2=(\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2,\lambda z_1+z_2,\lambda t_1+t_2)$ et

$$(-\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2)-(\lambda t_1+t_2)=\lambda(-x_1+2y_1+3z_1-t_1)+(-x_2+2y_2+3z_2-t_2)=0$$

car v_1 et v_2 appartiennent à F donc $-x_1+2y_1+3z_1-t_1=-x_2+2y_2+3z_2-t_2=0$. Ainsi, $\lambda v_1+v_2\in F$ et on conclut que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

2. On remarque que

$$\begin{aligned} F&=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid t=-x+2y+3z\}=\{(x,y,z,-x+2y+3z) \mid (x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\} \\ &=\{x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,2)+z(0,0,1,3) \mid (x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

donc, en posant $u=(1,0,0,-1)$, $v=(0,1,0,2)$ et $w=(0,0,1,3)$, $F=\mathrm{Vect}(u,v,w)$. Ainsi, $\boxed{(u,v,w) \text{ est une famille génératrice de } F}$.

Remarque. Le fait que $F=\mathrm{Vect}(u,v,w)$ permet d'affirmer directement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ sans avoir à faire le raisonnement de la question **1.**.

Exercice 11. On considère $e_1=(1\,;1\,;1)$, $e_2=(1\,;1\,;0)$ et $e_3=(0\,;1\,;1)$. Montrer que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Solution. Comme $\dim(\mathbb{R}^3)=3=\mathrm{Card}(\mathcal{B})$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soit a, b et c des réels tels que $ae_1+b_2+ce_3=0$. Alors, $a+b=0$, $a+b+c=0$ et $a+c=0$. Des deux premières égalités, on déduit que $c=0$ puis, grâce à la dernière que $a=0$ et, enfin, grâce à la première, que $b=0$. Ainsi, $a=b=c=0$ donc $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En raison des dimensions, on conclut que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 12. Soit $F=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0 \text{ et } 4x+y=0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base de F.

Solution.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} F &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2x - y \text{ et } y = -4x\} \\ &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2x - (-4x) \text{ et } y = -4x\} \\ &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x \text{ et } y = -4x\} \\ &= \{(x\,;-4x\,;2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\,(1\,;-4\,;2) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $v = (1\,;-4\,;2)$, $F = \text{Vect}(v)$ donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Comme $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\boxed{(v) \text{ est une base de } F}$ (et donc F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 13. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les quatre matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de (A, B, C, D).

Solution.

1. Comme $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, il suffit de montrer que (A, B, C, D) est une famille libre. Soit a, b, c et d des réels. Alors,

$$aA+bB+cC+dD = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d & c+d \\ b+c+d & d \end{pmatrix}$$

donc

$$aA + bB + cC + dD = 0_4 \iff \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ c+d = 0 \\ b+c+d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ c = 0 \\ b+c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0$$

Ainsi, la famille (A, B, C, D) est libre et, comme $\dim(\mathscr{M}_2(4)) = 4 = \text{Card}(\mathcal{B})$, on conclut que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

2. En reprenant le calcul précédent,

$$aA+bB+cC+dD=P \iff \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ c+d=0 \\ b+c+d=1 \\ d=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c-3=2 \\ c-3=0 \\ b+c-3=1 \\ d=-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=5 \\ c=3 \\ b+c=4 \\ d=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+3=5 \\ c=-3 \\ b+3=4 \\ d=-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+1=2 \\ c=3 \\ b=1 \\ d=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ c=3 \\ b=1 \\ d=-3 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M=A+B+3C-3D}$.

Exercice 14. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$P_0(X)=1, \qquad P_1(X)=X+2, \qquad P_2(X)=X^2+4X-3, \qquad P_3(X)=X^3+6X^2-X.$$

1. Montrer que la famille (P_0,P_1,P_2,P_3) est libre.

2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer $\mathrm{Vect}(P_0,P_1,P_2,P_3)$.

4. Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q=X^3+X^2+X+1$ dans les bases $\mathcal{B}=(1,X,X^2,X^3)$ et $\mathcal{C}=(P_0,P_1,P_2,P_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

Solution.

1. Considérons des réels a, b, c et d. Alors,

$$\begin{aligned} aP_0+bP_1+cP_2+dP_3 &= a+b(X+2)+c(X^2+4X-3)+d(X^3+6X^2-X) \\ &= dX^3+(c+6d)X^2+(b+4c-d)X+a+2b-3c \end{aligned}$$

On en déduit que

$$aP_0+bP_1+cP_2+dP_3=0_{\mathbb{R}[X]} \iff \begin{cases} a+2b-3c=0 \\ b+4c-d=0 \\ c+6d=0 \\ d=0 \end{cases}$$

Or, le système est échelonné avec 4 pivots donc il admet une unique solution. Par ailleurs, $(0,0,0,0)$ est une solution du système donc c'est la seule. On conclut que $a=b=c=d=0$ donc la famille $\boxed{(P_0,P_1,P_2,P_3) \text{ est libre}}$.

2. Par propriété, $\dim(\mathbb{R}_3[X])=4$. Comme (P_0,P_1,P_2,P_3) est une famille libre de cardinal 4 de $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que $\boxed{\text{c'est une base de cet espace vectoriel}}$.

3. Comme (P_0,P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est en particulier une famille génératrice de cet espace vectoriel donc $\boxed{\mathrm{Vect}(P_0,P_1,P_2,P_3)=\mathbb{R}_3[X]}$.

4. Par définition, $\boxed{\text{dans la base } \mathcal{B}, \text{ les coordonnées de } Q \text{ sont } (1,1,1,1)}$. Déterminons ses coordonnées dans $\mathcal{C}$. En reprenant les calculs précédents,

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = Q \iff \begin{cases} a+2b-3c=1 \\ b+4c-d=1 \\ c+6d=1 \\ d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b-3c=1 \\ b+4c-1=1 \\ c+6=1 \\ d=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+2b+15=1 \\ b-20=2 \\ c=-5 \\ d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+44=-14 \\ b=22 \\ c=-5 \\ d=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-58 \\ b=22 \\ c=-5 \\ d=1 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de } Q \text{ dans } \mathcal{C} \text{ sont } (-58, 22, -5, 1)}$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

Solution.

1. Par définition, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^t0_3 = 0_3$ donc $0_3 \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. De plus, si A et B sont dans $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et λ est un réel alors ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB = \lambda A + B$ donc $\lambda A + B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. Par définition, une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre 3 égale à sa transposée. Ainsi, $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est donc de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 + eM_5 + fM_6$$

en posant

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6)$. Montrons à présent que la famille $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6)$ est libre. D'après la calcul précédent,

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + d_M4 + eM_5 + fM_6 = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 0$$

donc la famille est bien libre. Ainsi, $\boxed{(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6) \text{ est une base de } \mathcal{S}_3(\mathbb{R})}$ donc $\boxed{\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = 6}$.

Exercice 16. On considère l'ensemble

$$E = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists\,(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)\}.$$

1. Montrer que E est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.

Solution.

1. Considérons les fonctions $f_0 = \cos$, $f_1 : x \longmapsto x\cos(x)$ et $f_2 : x \longmapsto x^2\cos(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} E &= \{f : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)\cos(x) \mid (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{f : x \longmapsto ax^2\cos(x) + bx\cos(x) + c\cos(x) \mid (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{af_2 + bf_1 + cf_0 \mid (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) \end{aligned}$$

donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

2. Montrons que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Soit a, b et c des réels tels que $af_0 + bf_1 + cf_2 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors, pour tout réel x, $a\cos(x) + bx\cos(x) + cx^2\cos(x) = 0$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $a = 0$ et donc, pour tout réel x, $bx\cos(x) + cx^2\cos(x) = 0$. Pour $x = \pi$, on en déduit que $-b\pi - c\pi^2 = 0$ donc, en divisant par $\pi \neq 0$, on obtient $-b - c\pi = 0$ et, pour $x = -\pi$, on obtient $b\pi - c\pi^2 = 0$ donc $b - c\pi = 0$. Il s'ensuit que $b - c\pi - (-b - c\pi) = 0$ donc $2b = 0$ c'est-à-dire $b = 0$ et, par suite, $c = 0$. Ainsi, $a = b = c = 0$ donc la famille est libre. Comme, par ailleurs, d'après la question précédente, (f_0, f_1, f_2) est une famille génératrice de E, on conclut que $\boxed{(f_0, f_1, f_2) \text{ est une base de } E \text{ et donc } \dim(E) = 3}$.

Exercice 17. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux ensembles suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(A, B, C)$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

3. En déduire une base de F puis sa dimension.

4. La famille (A, B, C) est-elle libre ? En déduire une base de G, ainsi que sa dimension.

5. **a.** Justifier que A, B et C sont des éléments de F.

b. En déduire que $G \subset F$.

6. Démontrer que $G = F$.

Solution.

1. On remarque que

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; d = -a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \mathrm{Vect}(M, N, P)$$

en posant

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. Le résultat de la question précédente assure que $\boxed{(M, N, P) \text{ est une famille génératrice de } F}$.

3. Montrons que (M, N, P) est libre. D'après le calcul précédent, pour tous réels a, b et c,

$$aM + bN + cP = 0_2 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0_2 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

donc la famille est libre. On en déduit que $\boxed{(M, N, P) \text{ est une base de } F \text{ donc } \dim(F) = 3}$.

4. Soit a, b et c des réels. Alors,

$$aA + bB + cC = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + c \\ a + b + c & -a - 2c \end{pmatrix}$$

donc

$$aA + bB + cC = 0_2 \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ a = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc (A, B, C) est une famille libre. Or, par définition, c'est une famille génératrice de G donc $\boxed{(A, B, C) \text{ est une base de } G \text{ et ainsi } \dim(G) = 3}$.

5. **a.** D'une part, A, B et C sont bien des éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et, d'autre part, $1 + (-1) = 0$, $0 + 0 = 0$ et $2 + (-2) = 0$ donc $\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ appartiennent à } F}$.

b. D'après le résultat de la question précédente, A, B et C appartiennent à F donc, comme F est un espace vectoriel, par théorème, $\mathrm{Vect}(A, B, C) \subset F$ i.e. $\boxed{G \subset F}$.

6. Comme G est un sous-espace vectoriel de F et comme $\dim(F) = \dim(G) = 3$, on conclut que $\boxed{G = F}$.

Exercice 18. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, pour tout réel α, on considère $F_\alpha = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(\alpha) = 0\}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer la dimension du sous-espace $G = F_1 \cap F_2$.

3. On pose $H = \{(X^2 - 3X + 2)Q(X) \mid Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$.
Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer la dimension.

4. Démontrer que $G = H$.

Solution.

1. Par définition, $F_\alpha \subset \mathbb{R}_3[X]$ et le polynôme nul s'annule en α donc $0_{\mathbb{R}_3[X]} \in F_\alpha$. Soit P et Q deux éléments de F_α et λ un réel. Alors,

$$(\lambda P + Q)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + Q(\alpha) = 0$$

car $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$. Ainsi, $\lambda P + Q$ appartient à F_α et on conclut que l'ensemble $\boxed{F_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. Par définition,

$$\begin{aligned}
G &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \mid a + b + c + d = 0 \text{ et } 8a + 4b + 2c + d = 0\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \mid a + b + c - 8a - 4b - 2c = 0 \text{ et } d = -8a - 4b - 2c\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \mid -7a - 3b - c = 0 \text{ et } d = -8a - 4b - 2c\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \mid c = -7a - 3b \text{ et } d = -8a - 4b - 2(-7a - 3b)\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \mid c = -7a - 3b \text{ et } d = 6a + 2b\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + (-7a - 3b)X + 6a + 2b \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{a(X^3 - 7X + 6) + b(X^2 - 3X + 2) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $P_1 = X^3 - 7X + 6$ et $P_2 = X^2 - 3X + 2$ alors $G = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. De plus, si a et b sont deux réels tels que $aP_1 + bP_2 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ alors, d'après le calcul précédent, $aX^3 + bX^2 + (-7a - 3b)X + 6a + 2b$ est le polynôme nul donc $a = b = 0$. Ainsi, (P_1, P_2) est libre donc c'est une base de G et on conclut que $\boxed{\dim(G) = 2}$.

3. Par définition,

$$\begin{aligned}
H &= \{(X^2 - 3X + 2)(aX + b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{a(X^3 - 3X^2 + 2X) + b(X^2 - 3X + 2) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}
\end{aligned}$$

donc $H = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2)$ où $Q_1 = X^3 - 3X^2 + 2X$ et $Q_2 = X^2 - 3X + 2$. Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrons que (Q_1, Q_2) est libre. Soit a et b deux réels. Alors,

$$aQ_1 + bQ_2 = a(X^3 - 3X^2 + 2X) + b(X^2 - 3X + 2) = aX^3 + (-3a + b)X^2 + (2a - 3b)X + 2b$$

donc

$$aQ_1 + bQ_2 = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \iff \begin{cases} a = 0 \\ -3a + b = 0 \\ 2a - 3b = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

donc (Q_1, Q_2) est libre. On conclut que (Q_1, Q_2) est une base de H donc $\boxed{\dim(H) = 2}$.

4. Si $P \in H$ alors il existe $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P = (X^2 - 3X + 2)Q$ donc $P(1) = (1^2 - 3 \times 1 + 2)Q(1) = 0$ et $P(2) = (2^2 - 3 \times 2 + 2)Q(2) = 0$ et ainsi $P \in G$. On en déduit que $H \subset G$ et, comme $\dim(G) = \dim(H)$, on conclut que $\boxed{G = H}$.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère, d'un part, les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0) \qquad v = (0, 1, -1, 0) \qquad \text{et} \qquad w = (1, 1, 1, 1)$$

et, d'autre part, les vecteurs

$$x = (0, 0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad y = (1, 1, 0, -1).$$

On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

1. Déterminer les dimensions de F et de G.

2. On pose $H = F \cap G$.

a. Justifier que $\dim(H) \in \{0, 1, 2\}$.

b. Montrer que si $\dim(H) = 2$ alors $x \in F$ et aboutir à un contradiction.

c. Montrer que si $\dim(H) = 0$ alors (u, v, w, x, y) est libre et aboutir à une contradiction.

d. En déduire la dimension de H.

Solution.

1. • Montrons que la famille (u, v, w) est libre. Soit a, b et c des réels. Alors, $au + bv + vw = (a + c, b + c, a - b + c, c)$ donc

$$au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc (u, v, w) est libre et ainsi (u, v, w) est une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$ donc $\boxed{\dim(F) = 3}$.

• Montrons que la famille (x, y) est libre. Soit a et b des réels. Alors, $ax + by = (b, b, a, -b)$ donc $ax + by = (0, 0, 0, 0)$ si et seulement si $a = b = 0$ donc (x, y) est libre et, comme précédemment, $\boxed{\dim(G) = 2}$.

2. a. Comme $H \subset G$, $\dim(H) \leqslant 2$ donc $\boxed{\dim(H) \in \{0, 1, 2\}}$.

b. Supposons que $\dim(H) = 2$. Alors, en raison des dimensions, $H = G$ donc $G \subset F$. En particulier, $x \in F$ donc il existe des réels a, b et c tels que $x = au + bv + cw$. Or, comme on l'a vu précédemment, $au + bv + vw = (a + c, b + c, a - b + c, c)$ donc

$$au + bv + cw = x \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a - b + c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \iff\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

et on obtient un système incompatible. C'est absurde donc $\boxed{\dim(H) \neq 2}$.

c. Supposons que $\dim(H) = 0$ c'est-à-dire que $H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Montrons qu'alors (u, v, w, x, y) est libre. Soit a, b, c, d et e des réels tels que $au + bv + cw + dx + ey = 0$. Alors, $au + bv + cw = -dx - dy$ donc $au + Bv + cw \in F \cap G = H$. Ainsi, $au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^4}$ mais comme (u, v, w) est libre, on en déduit que $a = b = c = 0$. Dès lors, $dx + ey = 0_{\mathbb{R}^4}$ et, comme (x, y) est libre, $d = e = 0$. Ainsi, $a = b = c = d = e = 0$ donc (u, v, w, x, y) est libre. Or, ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 donc le cardinal d'une famille libre ne peut pas excéder 4. On arrive à une absurdité donc $\boxed{\dim(H) \neq 0}$.

d. On a vu que $\dim(H) \in \{0\,;1\,;2\}$, que $\dim(H) \neq 2$ et que $\dim(H) \neq 0$ donc on conclut que $\boxed{\dim(H) = 1}$.

Exercice 20. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les polynômes

$$P_1 = X^3 + 1 \qquad P_2 = X^3 + X \qquad P_3 = X^3 + X^2 \qquad \text{et} \qquad P_4 = X^3.$$

On pose $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

1. Écrire la matrice A de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Écrire la matrice B de $(1, X, X^2, X^3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. Calculer AB. Qu'en déduit-on ?

Solution.

1. Dans la base $(1, X, X^2, X^3)$, la matrice de $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2. Méthode 1. Soit a, b, c et d des réels. Alors,

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = a(X^3+1) + b(X^3+X) + c(X^3+X^2) + dX^3 = (a+b+c+d)X^3 + cX^3 + bX + a$$

donc

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \iff \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Méthode 2. A est une matrice triangulaire inférieure donc les coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible. Dès lors, $\mathrm{rg}(A) = 4$ donc, par théorème, $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 4$ i.e. $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{B})) = 4$ et ainsi, comme $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

3. On remarque que $1 = P_1 - P_4$, $X = P_2 - P4$, $X^2 = P_3 - P_4$ et $X^3 = P_4$ donc la matrice de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4. On vérifie que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

donc on peut en déduit que $\boxed{B = A^{-1}}$.

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (u, v, w) avec $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1, 1)$.

2. (u, v, w, x) avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1, 1)$ et $x = (0, 2, -1, 1)$.

Solution.

1. La matrice de (u, v, w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a le même rang successivement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Il y a trois pivots donc le rang de M est 3 et ainsi le rang de $\boxed{(u, v, w) \text{ est égal à } 3}$.

2. La matrice de (u, v, w, x) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a le même rang successivement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_2 \end{matrix}$$

Il y a deux pivots donc le rang de M est 2 et ainsi $\boxed{\text{le rang de } (u, v, w, x) \text{ est égal à } 3}$.

Exercice 22.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout réel x, $P(\mathrm{e}^x) = 0$ alors P est le polynôme nul.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$. Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Conclure que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Solution.

1. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et notons n le degré P. Alors, comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^0 < \mathrm{e}^1 < \cdots < e^n$ donc les $n+1$ nombres e^k pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont tous distincts. De plus, par hypothèse, ce sont des racines de P donc P a un nombre de racines strictement supérieur à son degré, ce qui est absurde. On conclut donc que $\boxed{P \text{ est le polynôme nul}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, ..., a_n des réels tels que $\sum_{k=0}^{n} a_k f_k$ soit la fonction nulle. Alors, pour tout réel x, $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^{kx} = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\mathrm{e}^x\right)^k = 0$. Ainsi, si on pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, pour tout réel x, $P(\mathrm{e}^x) = 0$ donc, d'après la question précédente, P est le polynôme nul c'est-à-dire $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Ainsi, la famille $\boxed{(f_0, f_1, ..., f_n) \text{ est libre}}$.

3. Supposons que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ soit de dimension finie et notons n sa dimension. Alors, $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ contenant $n+1$ vecteurs donc, par propriété, elle est liée, ce qui contredit le résultat de la question précédente. Ainsi, on conclut que $\boxed{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ n'est pas de dimension finie}}$.

Exercice 23. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $f_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_i$.

Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de E.

Solution. Comme $\mathcal{B}'$ est de cardinal égal à la dimension de E, il suffit de montrer que cette famille est génératrice. Or, la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et tous ses termes diagonaux sont égaux à 1 donc il y a n pivots et ainsi $\mathrm{rg}(M) = n$. Dès lors, $\mathrm{rg}(\mathcal{B}') = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{B}') = n$ donc $\mathcal{B}'$ est génératrice et, par suite, $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E}$.

Exercice 24. Soit E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution. Supposons que $F \cup G$ soit un espace vectoriel et que F ne soit pas inclus dans G. Alors, il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$. Soit $g \in G$. Alors, $f \in F \subset F \cup G$ et $g \in G \subset F \cup G$ donc, comme $F \cup G$ est un espace vectoriel, $f + g \in F \cup G$. Ainsi, $f + g$ appartient à F ou à G. Si $f + g \in G$ alors il existe $g' \in G$ tel que $f + g = g'$ donc $f = g' - g$. Or, G est un espace vectoriel donc, comme g et g' appartiennent à G, $g - g'$ aussi donc $f \in G$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $f + g \in F$ donc il existe $f' \in F$ tel que $f + g = f'$ et donc, de même, $g = f' - f \in F$. On a donc montré que tout vecteur de g de G appartient à F donc $G \subset F$. Ainsi, on a bien montré que si $F \cup G$ est un espace vectoriel alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Réciproquement, si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un espace vectoriel et si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un espace vectoriel.

Finalement, on conclut que $\boxed{F \cup G \text{ est un espace vectoriel si et seulement si } f \subset G \text{ ou } G \subset F}$.