♦ Corrigés des exercices du chapitre 1

Exercice 1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$.

1. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{100}.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{100} u_k$.

Solution.

1. Par théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2n$ donc $\boxed{u_{100} = -197}$.

2. Par théorème $\sum_{k=0}^{100} u_k = 101 \times \frac{3 + (-197)}{2}$ i.e. $\boxed{\sum_{k=0}^{100} u_k = -9797}$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On note (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$ donc $v_{n+1} = 2v_n$. Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 2}$.

2. Par théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$. Or, $v_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 1$ donc $u_n = v_n - 1$ et on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} - 1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2, par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (2^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\sum_{k=0}^{n} 2^k - (n+1) = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n - 1 \\ &= 2 \times \frac{1 - 2^n}{-1} - n - 1 = 2\left(2^n - 1\right) - n - 1 = 2^{n+1} - 2 - n - 1\end{aligned}$$

autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = 2^{n+2} - n - 3}.$$

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n + 2}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$.

2. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

a. Justifier que (v_n) est bien définie et qu'il s'agit d'une suite arithmétique.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n puis une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n > -1.$ »
Sachant que $u_0 = 3 > -1$, $P(0)$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(k)$ est vraie. Alors, $u_k > -1$ donc $u_k + 2 > 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{u_k+2} < 1$. En multipliant par $-1 < 0$, on en déduit que $\dfrac{-1}{u_k+2} > -1$ c'est-à-dire $u_{k+1} > -1$. Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > -1}$.

2. **a.** D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$ donc $u_n + 1 \neq 0$ et ainsi v_n est bien définie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{-1}{u_n+2}+1} - \frac{1}{u_n+1} \\
&= \frac{1}{\frac{-1+u_n+2}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} \\
&= \frac{u_n+2-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } 1}$.

b. Le premier terme de (v_n) est $v_0 = \frac{1}{u_0+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{4} + n \times 1 = \frac{4n+1}{4}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ donc $\frac{1}{v_n} = u_n + 1$ et ainsi $u_n = \frac{1}{v_n} - 1$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{4}{4n+1} - 1 = \frac{4-(4n+1)}{4n+1}$ i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{3-4n}{4n+1}}.$$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 2$.

1. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \dfrac{4}{3}$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un expression de v_n en fonction de n.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}u_n + 2 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2}v_n$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } -\tfrac{1}{2}}$. De plus, le premier terme de (v_n) est $v_0 = u_0 - \frac{4}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \tfrac{2}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{4}{3}$ donc $u_n = v_n + \frac{4}{3}$. On déduit donc de la question précédente que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-(-\frac{1}{2})} + \frac{4}{3}(n+1)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} + \frac{4n}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{4n}{3} + \frac{4}{3}\\ &= \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{4n}{3} + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{4n}{3} + \frac{16}{9} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

Exercice 5.

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln(k)$.

2. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, la valeur de $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.

Solution.

1. Soit un entier $k \geqslant 2$. Alors, $\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$ i.e. par le propriété de la fonction ln, $\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln(k)}$.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$. On déduit de la question précédente que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(k-1) - \ln(k)\right]$$

et on reconnaît une somme téléscopique donc

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(2-1) - \ln(n) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(n) \text{ i.e. } \boxed{\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln(n)}.$$

Exercice 6.

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.

2. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ en fonction de n.

Solution.

1. Soit un entier $k \geqslant 1$. Alors,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(4k)^2 - 1^1}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{4k^2-1}}.$$

2. Soit un entier $n \geqslant 1$. On déduit de la question précédente, par linéarité, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

et on reconnaît une somme téléscopique car $\frac{1}{2(k+1)-1} = \frac{1}{2k+2-1} = \frac{1}{2k+1}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 1-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} = \frac{2n+1}{2(2n+1)} - \frac{1}{4n+2} = \frac{2n}{4n+2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}}.$$

Exercice 7.

1. Vérifier que, pour tout $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} - \dfrac{2}{\tan(2\alpha)}$.

2. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$ en fonction de n.

Solution

1. Par les formules de duplication,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(\alpha)} - \frac{2}{\tan(2\alpha)} &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{2\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)} - \frac{2\cos(2\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \\
&= \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)} - \frac{\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \\
&= \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{\tan(\alpha)} - \frac{2}{\tan(2\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}}.$$

2. Soit un entier $k \geqslant 1$. Alors, $0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{4}$ donc, grâce à la question précédente,

$$\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \frac{1}{2^k}\left[\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2^{k+2}})} - \frac{2}{\tan(2\frac{\pi}{2^{k+1}})}\right] = \frac{1}{2^k\tan(\frac{\pi}{2^{k+2}})} - \frac{1}{2^{k-1}\tan(\frac{\pi}{2^{k+1}})}$$

ce qui permet de faire apparaître une somme téléscopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2^k\tan(\frac{\pi}{2^{k+2}})} - \frac{1}{2^{k-1}\tan(\frac{\pi}{2^{k+1}})}\right] = \frac{1}{2^n\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})} - \frac{1}{2^{1-1}\tan(\frac{\pi}{2^{1+1}})}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \frac{1}{2^n\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})} - 1}.$$

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par (u_n), calculer $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$.

b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2$ donc $\boxed{u_1 = 2}$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2$ donc $\boxed{u_2 = 6}$.

2. Étant donné que $u_1 - u_0 = 2 \neq 4 = u_2 - u_1$, la suite $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

Étant donné que $u_0 = 0$, si (u_n) était géométrique de raison q alors $u_1 = qu_0 = 0$. Or, $u_1 = 2 \neq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

3. a. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 2k + 2$ donc, par linéarité de la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2\frac{(n-1)n}{2} + 2n = n(n-1) + 2n = n(n+1)$$

b. Par ailleurs, cette somme est téléscopique donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_{n-1+1} - u_0 = u_n - 0 = u_n$$

donc, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n+1)}$.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + nu_n}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Par définition, $u_0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(k)$ est vraie. Alors, $u_k > 0$ donc, comme $k \geqslant 0$, $ku_k \geqslant 0$ et donc $1 + ku_k > 0$. Par quotient, on en déduit que $\frac{u_k}{1+ku_k} > 0$ c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$. Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_n = \frac{1}{\frac{u_n}{1+nu_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+nu_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{nu_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} \text{ i.e. } \boxed{v_n = n}.$$

3. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$. Mais, par ailleurs, il s'agit d'une somme téléscopique donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n-1+1}} - \frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_n} - 1$$

donc $\frac{1}{u_n} - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc $\frac{1}{u_n} = \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2-n+2}{2}$ et on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{n^2-n+2}}.$$

Exercice 10. Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i2^j \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ij^2 \qquad S_3 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (i+j)^2.$$

Solution.

$S_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} 2^j\right) = \frac{n(n+1)}{2} \times 2 \times \frac{1-2^m}{1-2} = n(n+1)\frac{1-2^m}{-1}$ donc

$$\boxed{S_1 = n(n+1)\left(2^m - 1\right)}.$$

$S_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} j^2\right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ donc

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)m(m+1)(2m+1)}{12}}.$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i^2 + 2i\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} j^2\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i^2 + 2i\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i^2 + n(n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= (n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)^2}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + n + \frac{2n+1}{3}\right]\\
&= \frac{n(n+1)^2}{2}\left[\frac{4n+2+3n}{3}\right]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S_3 = \frac{n(n+1)^2(7n+2)}{6}}.$$

Exercice 11. Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{j}{i+1}$.

Solution.
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{j}{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}\times\frac{i(i+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$ donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{j}{i+1}=\frac{n(n+1)}{4}}.$$

Exercice 12. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}$.

Solution.
$S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}=(2+1)^n$ donc $\boxed{S=3^n}$.

Exercice 13. Soit un entier $n\geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^3}{(k+1)(k-1)^2}\right)$.

Solution. Remarquons que, pour tout entier $k\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{k^3}{(k+1)(k-1)^2}\right)&=\ln\left(\frac{k^2}{k+1}\times\frac{k}{(k-1)^2}\right)=\ln\left(\frac{k^2}{k+1}\right)+\ln\left(\frac{k}{(k-1)^2}\right)\\&=\ln\left(\frac{k^2}{k+1}\right)-\ln\left(\frac{(k-1)^2}{k}\right).\end{aligned}$$

Or, $\frac{(k-1)^2}{(k-1)+1}=\frac{(k-1)^2}{k}$ donc on fait apparaître une somme téléscopique,

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^3}{(k+1)(k-1)^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2}{k+1}\right)-\ln\left(\frac{(k-1)^2}{k}\right)=\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{(2-1)^2}{2}\right)$$

soit finalement

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^3}{(k+1)(k-1)^2}\right)=\ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{2n^2}{n+1}\right)}.$$

Exercice 14. On considère la suite (F_n) définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}F_k=F_{n+2}-1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$.

Solution. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $F_k=F_{k+2}-F_{k+1}$ donc on fait apparaître une somme téléscopique

$$\sum_{k=0}^{n}F_n=\sum_{k=0}^{n}(F_{k+2}-F_{k+1})=F_{n+2}-F_1\text{ i.e. }\boxed{\sum_{k=0}^{n}F_n=F_{n+2}-1}.$$

De même, pour tout entier k, $F_{k+1}=F_{k+2}-F_k$ donc

$$F_{k+1}^2=F_{k+1}(F_{k+2}-F_k)=F_{k+1}F_{k+2}-F_kF_{k+1}.$$

Dès lors, comme $F_0=0$,

$$\sum_{k=0}^{n}F_k^2=\sum_{k=1}^{n}F_k^2=\sum_{k=0}^{n-1}F_{k+1}^2=\sum_{k=0}^{n-1}(F_{k+1}F_{k+2}-F_kF_{k+1})=F_{n-1+1}F_{n-1+2}-F_0F_1$$

i.e., comme $F_0=0$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}}$.