Banque « Agro-Véto »
AT - 0618

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Afin de faciliter la compréhension de son travail le candidat encadrera ou soulignera ses réponses aux questions traitées. Dans les questions comportant des démonstrations, il est invité à souligner les arguments principaux de son raisonnement.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre

Dans cet exercice, on considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé.

On rappelle que si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors on définit le produit scalaire $u.v$ et la norme $||u||$ par :

$$u.v = xx' + yy' \quad \text{et} \quad ||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. Calculer le produit $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.
2. Montrer, sans faire aucun calcul, que la matrice M est diagonalisable.
3. (a) Résoudre l'équation $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner les valeurs propres de f.
4. On définit les vecteurs $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
   (a) Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Que remarque-t-on ?
   (b) Montrer que les deux vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux et calculer leur norme. Montrer aussi que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (e_1, e_2) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Calculer $u.e_1$, $u.e_2$ et en déduire, en fonction de x et de y, les coordonnées du vecteur u dans la base (e_1, e_2).
6. Soit $u = (x, y)$ un vecteur ; notons (a, b) ses coordonnées dans la base (e_1, e_2). On a donc $u = ae_1 + be_2$.
   (a) Montrer que $||u||^2 = a^2 + b^2$.
   (b) Montrer que $||f(u)||^2 = 9a^2 + b^2$.
   (c) Montrer enfin que l'on a :
   $$||u||^2 \leq ||f(u)||^2 \leq 9||u||^2.$$
7. Déduire de ce qui précède que pour tous réels x et y, on a :
   $$x^2 + y^2 \leq (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 \leq 9x^2 + 9y^2.$$
8. On note G la fonction de deux variables définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :
   $$G(x, y) = (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 - (x^2 + y^2).$$
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G(x, y) \geq 0$.
   (b) Montrer que G admet sur $\mathbb{R}^2$ un minimum, et que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où ce minimum est atteint est :
   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$$

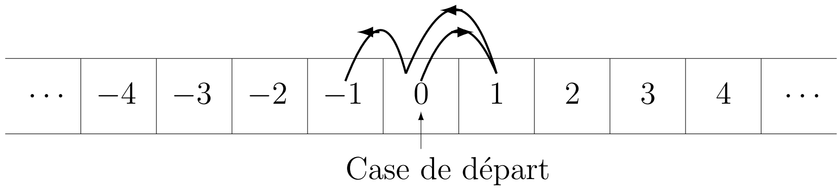
Exercice d'analyse

Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5$, et $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)e^x$. On admet que les fonctions P et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer, pour tout réel x, $P'(x)$, puis $P'(x) + P(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Si x est un nombre réel, factoriser $x^3 - x$.
4. Tracer le tableau de variations de f. On fera également apparaître les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Justifier que $f(x) < 0$ lorsque $x \in [-1, 1]$.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[-2e, +\infty[$.
7. Donner le signe de f sur $]-\infty, -1]$.
8. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
9. Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 3x^2 + 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et que celle-ci est comprise entre 1 et 2.

Exercice de probabilités

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. Une puce se déplace sur une bande formée de cases numérotées ainsi :



A chaque seconde, la puce effectue l'une des deux actions suivantes :

— ou bien elle saute d'une case vers la droite, (on dira que la puce "va à droite")

— ou bien elle saute d'une case vers la gauche (on dira que la puce "va à gauche").

Ces choix s'effectuent aléatoirement. On suppose que la probabilité que la puce aille à gauche est de $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est de $\frac{1}{2}$, et que les différents sauts de la puce sont indépendants.

Dans tout le problème, on étudie le comportement de la puce sur n secondes, de la première seconde à la n^{eme} seconde. Ainsi, la puce effectue n sauts en tout. De plus, on suppose que la puce, avant les n sauts, part de la case numérotée 0.

Par exemple sur la figure, la puce a effectué $n = 3$ sauts ; le premier saut est vers l'avant, et les deux suivants sont vers l'arrière.

On appelle D la variable aléatoire désignant le numéro de la case sur laquelle la puce se retrouve au bout des n sauts.

A. Etude de D dans des cas particuliers

1. Quel est le numéro de la case la plus à droite sur laquelle la puce puisse se retrouver ? On rappelle que la puce part de la case 0 et effectue n sauts.
2. Dans cette question on suppose que $n = 2$.
   (a) Indiquer ce que signifient, en français, chacun des trois événements suivants :
   $$(D = 0); (D = 1); (D = 2)$$
   Donner leur probabilité. *Remarque : l'un de ces trois événements a une probabilité nulle.*
   (b) Donner aussi $P(D = -1)$ et $P(D = -2)$.
   (c) Calculer alors, dans le cas $n = 2$, l'espérance et la variance de D.
3. Lorsque $n = 3$, donner l'ensemble des valeurs prises par D et la loi de D.

B. Etude de D dans le cas général

On revient au cas général, n est donc un entier naturel non nul quelconque.

1. On appelle X le nombre de fois, parmi les n sauts effectués, où la puce va à droite. En reconnaissant une loi usuelle, donner la loi de X (on ne demande pas d'en rappeler la formule).
2. On appelle Y le nombre de fois, parmi les n sauts, où la puce va à gauche. Exprimer Y en fonction de X.
3. Expliquer, de façon très claire, pourquoi on a la relation $D = 2X - n$. *On rappelle que la puce part de la case numérotée* 0.
4. Donner l'espérance et la variance de D en fonction de n. Interpréter la valeur trouvée pour l'espérance.

C. Etude de D dans un autre cas

Dans cette dernière partie, on conserve le même cadre mais on modifie la loi des sauts de la puce.

Ce qui ne change pas : La puce part toujours de la case 0, et à chaque seconde, elle "va à droite" ou elle "va à gauche". Elle effectue n sauts, et les sauts de la puce sont toujours aléatoires.

Ce qui change : On **ne** suppose **plus** que la probabilité que la puce aille à gauche est de $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est de $\frac{1}{2}$, et on **ne** suppose **plus** que les différents sauts de la puce sont indépendants.

Par contre, on suppose que les sauts de la puce dépendent a priori du mouvement précédent ; cela se traduit par le phénomène suivant :

— si la puce vient d'aller à droite, alors elle a, à la seconde qui suit, une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller à droite, et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller à gauche ;

— si la puce vient d'aller à gauche, alors elle a, à la seconde qui suit, une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller à gauche, et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller à droite.

Enfin, lors du premier mouvement la puce part de la case 0 et va à droite avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et va à gauche avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on appelle A_k l'événement : (À la seconde k, la puce va à droite). On note $a_k = P(A_k)$.

1. D'après l'énoncé, quelle est la valeur de a_1 ?
2. (a) En lisant l'énoncé, donner pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, la probabilité conditionnelle de l'événement A_{k+1} sachant A_k (c'est-à-dire $P(A_{k+1}|A_k)$).

   (b) En déduire $P(A_2|A_1)$, $P(A_2|A_1^c)$ puis $P(A_2)$.

   (c) Calculer, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, la probabilité $P(A_{k+1}|A_k^c)$ puis montrer que :
   $$a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}.$$

   On pourra utiliser, dans les questions (b) et (c), la formule des probabilités totales.
3. Le but de cette question est de calculer a_k en fonction de l'entier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. À cet effet on pose, pour tout entier k compris entre 1 et n, $b_k = a_k - \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $b_{k+1} = \dfrac{1}{3}b_k$.

   (b) Donner alors l'expression de b_k en fonction de l'entier naturel k.

   (c) En déduire l'expression de a_k en fonction de k.
4. On appelle Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A_k est réalisé, et qui vaut -1 sinon.

   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par Z_k.

   (b) Déterminer la loi de Z_k et calculer l'espérance de Z_k.
5. Expliquer pourquoi on a $D = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$.
6. Donner alors l'espérance de D en fonction de n.

Fin de l'épreuve