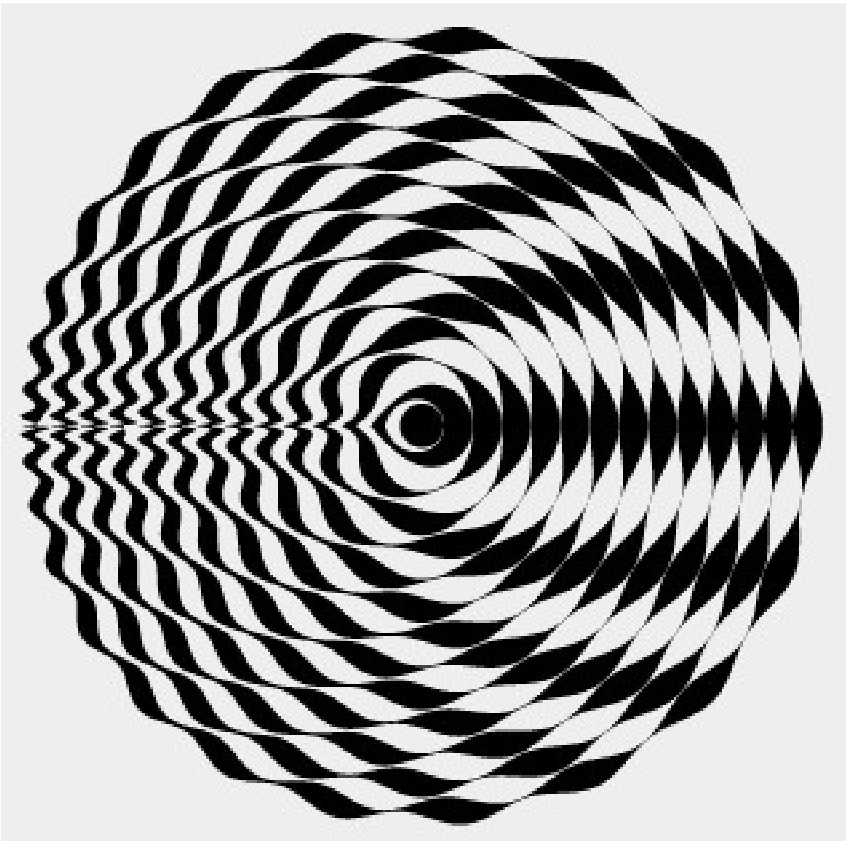
TB2
Sujets d'oraux de mathématiques

Corrigés



Année 2024-2025

Table des matières

Sujets d'algèbre

Sujet 1. Endomorphisme de Grégory et application (C1)

On considère les polynômes $P_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k(X) = X^k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}_n = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X)$$

où $P(X+1)$ désigne la composée de $X+1$ suivie de P.
Par exemple, si $P(X) = X^3$ alors $P(X+1) = (X+1)^3$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **a.** Montrer que la matrice de Δ_2 dans $\mathcal{B}_2$ est $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Quelles sont les valeurs propres de M_2 ? La matrice M_2 est-elle diagonalisable ?

3. **a.** Déterminer la matrice M_3 de Δ_3 dans la base $\mathcal{B}_3$.

b. La matrice M_3 est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

4. **a.** Déterminer le noyau et l'image de Δ_3.

b. En déduire que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$Q(X) = P(X+1) - P(X).$$

Ce polynôme P est-il unique ?

5. **a.** Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente une valeur explicite de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ en fonction de n.

Solution.

1. Rappelons que si P et Q sont deux polynômes alors, pour tous réels λ et μ, $\deg(\lambda P+\mu Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ et, si Q n'est pas constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\deg(X+1) = 1$, $\deg(P(X+1)) = \deg(P)$ donc $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant \deg(P)$ et ainsi $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}\Delta_n(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \Delta_n(P) + \mu \Delta_n(Q)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\Delta_n \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. a. Par définition, $\Delta_2(P_0) = 1 - 1 = 0$, $\Delta_2(P_1) = X + 1 - X = 1 = P_0$ et $\Delta_2(P_2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1 = P_0 + 2P_1$ donc

$$\boxed{M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b. La matrice M_2 est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux. Ainsi, $\boxed{\text{l'unique valeur propre de } M_2 \text{ est } 0}$. Si M_2 était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $M_2 = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de M_2. Dans cas, comme $\mathrm{Sp}(M_2) = \{0\}$, $D = 0_3$ donc $PDP^{-1} = 0_3$. Or $M_2 \neq 0_3$ donc $\boxed{M_2 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3. a. Comme précédemment, $\Delta_3(P_0) = 0$, $\Delta_3(P_1) = P_0$, $\Delta_3(P_2) = P_0 + 2P_2$ et $\Delta_3(P_3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 = P_0 + 3P_1 + 3P_2$ donc

$$\boxed{M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b. Comme précédemment, $\mathrm{Sp}(M_3) = \{0\}$ donc, comme $M_3 \neq 0_4$, $\boxed{M_3 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

De plus, comme 0 est valeur propre de M_3, $0 \in \ker(M_3)$ donc $\boxed{M_3 \text{ n'est pas inversible}}$.

4. a. Le système homogène associé à M_3 est échelonné et possède 3 pivots donc $\mathrm{rg}(M_3) = 3$. Dès lors, $\mathrm{rg}(\Delta_3) = 3$. Ainsi, par le théorème du rang, $\dim(\ker(\Delta_3)) = 4 - 3 = 1$. Or, on a vu que P_0 est un vecteur non nul appartenant à $\ker(\Delta_3)$ donc $\ker(\Delta_3) = \mathrm{Vect}(P_0)$ i.e. $\boxed{\ker(\Delta_3) = \mathbb{R}_0[X]}$. De plus, $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_3)) = \mathrm{rg}(\Delta_3) = 3$ et on a vu que les images de P_0, P_1, P_2 et P_3 appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathrm{Im}(\Delta_3) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathrm{Im}(\Delta_3)) = 3$, on conclut que $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_3) = \mathbb{R}_2[X]}$.

b. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_3)$ donc il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(P) = Q$ c'est-à-dire $\boxed{\text{il existe } P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(X+1) - P(X) = Q}$.

Ce polynôme P n'est pas unique car Δ_3 n'est pas injective. Pour tout polynôme constant R, $\Delta_3(P+R) = \Delta_3(P) + \Delta_3(R) = Q + 0 = Q$ car $R \in \ker(\Delta_3)$.

5. a. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(P) = X^2$ revient matriciellement à déterminer un vecteur $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ tel que $M_3 V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette égalité matricielle se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} b + c + d = 0 \\ 2c + 3d = 0 \\ 3d = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

donc une solution est $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X}$ est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(P) = X^2$.

b. On en déduit que, pour tout réel t, $t^2 = P(t+1) - P(t)$ donc, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} [P(k+1) - P(k)] \\
&= P(n+1) - P(0) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - 0 \\
&= \frac{n+1}{6}\left[2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\right] \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n)
\end{aligned}$$

soit finalement,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Sujet 2. Étude de deux suites imbriquées (C7)

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux suites réelles. On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}.$$

On se propose de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de n grâce à deux méthodes différentes.

Méthode 1 : à l'aide des nombres complexes

On pose, pour tout entier naturel n,

$$z_n = u_n + \mathrm{i}v_n.$$

1. En utilisant le logiciel de votre choix ou une calculatrice, calculer les 6 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

2. Placer les points M_n d'affixes z_n pour n allant de 0 à 5. Expliquer comment évolue $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ en fonction de n.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, z_{n+1} en fonction de z_n.

4. Déterminer une forme exponentielle de $1 - \mathrm{i}$.

5. Donner le terme général de la suite (z_n).

6. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Méthode 2 : à l'aide des matrices

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2. Déterminer une inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. Ces matrices seront à coefficients complexes.

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Solution.

Méthode 1 : à l'aide des nombres complexes

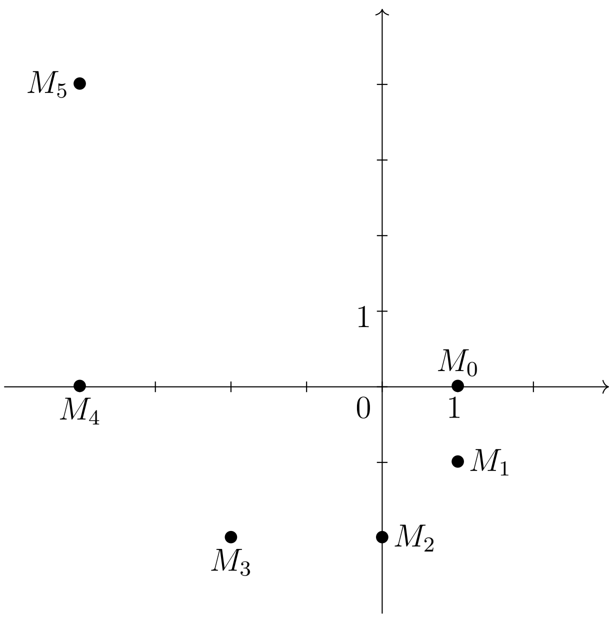
1. À l'aide de Python, le script suivant convient :

```
u = 1
v = 0
print(u,v)
for n in range(5):
  u,v = u+v, -u+v
print(u,v)
```

On obtient l'affichage suivant :

```
1 0
1 -1
0 -2
-2 -2
-4 0
-4 4
```

2. On obtient les points suivants :



Il semble que la suite $(|z_n|)$ soit croissante et que les points « tourne » de $-\frac{\pi}{4}$ entre deux valeurs de n consécutives donc que $\arg(z_{n+1}) = \arg(z_n) - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= u_{n+1} + \mathrm{i}v_{n+1} \\ &= u_n + v_n + \mathrm{i}(-u_n + v_n) \\ &= u_n + v_n - \mathrm{i}u_n + \mathrm{i}v_n \\ &= u_n + \mathrm{i}v_n - \mathrm{i}(u_n + \mathrm{i}v_n) \\ &= z_n - \mathrm{i}z_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (1-\mathrm{i})z_n}$.

4. Le module de $1-\mathrm{i}$ est $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Ainsi,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

donc $\boxed{1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = qz_n$ avec $q = 1 - \mathrm{i}$ donc la suite (z_n) est géométrique de raison $q = 1 - \mathrm{i}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 q^n$. Or, d'une part, $z_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0 = 1$ et, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q^n &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}^n \left[\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt{2^n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

On en déduit donc que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \sqrt{2^n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]}.$$

6. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sqrt{2^n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

donc, étant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $v_n = \mathrm{Im}(u_n)$, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad v_n = -\sqrt{2^n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}.$$

Méthode 2 : à l'aide des matrices

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ -u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = AX_n$$

en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. 1^{re} méthode : par le calcul

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible i.e. si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Or,

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 1^2 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine du trinôme $X^2 - 2X + 2 = 0$. Or, le discriminant de celui-ci est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ donc il possède deux racines complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = 1 - \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_2} = 1 + \mathrm{i}.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1 - \mathrm{i}\,; 1 + \mathrm{i}\}$.

Comme A est une matrice carrée d'ordre 2 qui possède 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Déterminons des vecteurs propres associés à chacune de ses valeurs propres. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Alors,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-\mathrm{i}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = (1-\mathrm{i})x \\ -x + y = (1-\mathrm{i})y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\mathrm{i}x \\ -x = -\mathrm{i}y \end{cases} \iff y = -\mathrm{i}x$$

car $\mathrm{i}^2 = -1$ donc $-x = -\mathrm{i}y$ équivaut à $\mathrm{i}^2 x = -\mathrm{i}y$ i.e. $-\mathrm{i}x = y$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1 - \mathrm{i}$.

De même,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+\mathrm{i}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = (1+\mathrm{i})x \\ -x + y = (1+\mathrm{i})y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \mathrm{i}x \\ -x = \mathrm{i}y \end{cases} \iff y = \mathrm{i}x$$

car $\mathrm{i}^2 = -1$ donc $-x = \mathrm{i}y$ équivaut à $\mathrm{i}^2 x = \mathrm{i}y$ i.e. $\mathrm{i}x = y$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1 - \mathrm{i}$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ en posant } D = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}}$.

2$^{\text{de}}$ méthode : à l'aide Python

Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.matrix([[1,1], [-1,1]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([1.+1.j, 1.-1.j]),
matrix([[0.70710678+0.j, 0.70710678-0.j],
[0.+0.70710678j, 0.-0.70710678j]]))
```

on obtient peut conjecturer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1+\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i}\}$ (*Remarque.* En Python, le nombre complexe i est noté `j`.). On remarque, de plus, que dans la matrice de passage, sur la première colonne, la seconde ligne est égale à i fois la première et, sur la seconde colonne, la seconde ligne est égale à $-\mathrm{i}$ fois la première donc on peut conjecturer qu'un vecteur propre associé à $1+\mathrm{i}$ est $\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$ et un vecteur propre associé à $1-\mathrm{i}$ est $\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Il ne reste alors plus qu'à vérifier que $A\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} = (1+\mathrm{i})\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$ et que $A\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} = (1-\mathrm{i})\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$ et terminer le raisonnement comme dans la première méthode.

3. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. De plus, D est diagonale donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}(1-\mathrm{i})^n & 0\\ 0 & (1+\mathrm{i})^n\end{pmatrix}$.

Enfin, $\det(P) = 2\mathrm{i}$ donc, par propriété, $P^{-1} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -1\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1-\mathrm{i})^n & 0\\ 0 & (1+\mathrm{i})^n\end{pmatrix}\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -1\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^n & -(1-\mathrm{i})^n\\ \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^n & (1+\mathrm{i})^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\,[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n] & -(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\\ (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n & \mathrm{i}\,[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n]\end{pmatrix}}$$

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $X^n = A^nX_0$.

Initialisation. Comme $A^0 = I_2$, $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, grâce au résultat de la question **1.**,

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Étant donné que $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] & -(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n \\ (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n & \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] \\ (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}}$$

Remarque. On retrouve bien les mêmes valeurs que par la première méthode. En effet, on a vu que $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc $1+\mathrm{i} = \overline{1-\mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et ainsi, par les formules d'Euler,

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n}{2} = \sqrt{2^n}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{2} = \sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

et

$$v_n = \frac{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n - \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n}{2\mathrm{i}} = \sqrt{2^n}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{2\mathrm{i}} = \sqrt{2^n}\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = -\sqrt{2^n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Sujet 3. Calcul des puissances d'une matrice (O1)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 3I$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Démontrer qu'il existe un réel α tel que $B^2 = \alpha B$.

2. a. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre B^n et B.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Préciser X_0.

b. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

c. Déterminer les valeurs propres de M et en déduire que M est diagonalisable.

d. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

e. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de M^n en fonction de n.

f. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n et en déduire une expression de A^n en fonction de n.

Solution.

1. On calcule d'abord
$$B = A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
donc
$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
c'est-à-dire $\boxed{B^2 = -2B}$.

2. **a.** Comme $B^2 = -2B$, on a $B^3 = B^2B = (-2B)B = -2B^2 = -2(-2B) = 4B$ puis $B^4 = B^3B = (4B)B = 4B^2 = 4(-2B) = -8B$ et on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = (-2)^{n-1}B$.

   b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = (-2)^{n-1}B$ ».

   Initialisation. $(-2)^{1-1}B = (-2)^0B = 1B = B$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,
$$B^{n+1} = B^nB = ((-2)^{n-1}B)B = (-2)^{n-1}B^2 = (-2)^{n-1}(-2B) = (-2)^nB$$
   donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,
$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = (-2)^{n-1}B}.$$

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition, $\mathcal{Q}(n)$: « il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$ ».

   Initialisation. $A^0 = I = 0A + 1I$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors,
$$A^{n+1} = A^nA = (a_nA + b_nI)A = a_nA^2 + b_nA.$$
   Or, $A = B + 3I$ donc $A^2 = (B+3I)(B+3I) = B^2 + 3B + 3B + 9I = B^2 + 6B + 9I$ et, comme $B^2 = -2B$, $A^2 = 4B + 9I = 4(A - 3I) + 9I = 4A - 3I$. Dès lors,
$$A^{n+1} = a_n(4A - 3I) + b_nA = (4a_n + b_n)A - 3a_nI$$
   donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie en posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n$.

   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe des réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = a_nA + b_nI}$.

4. **a.** D'après la démonstration précédente, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ donc $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

b. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -3a_n \end{cases}.$$

donc

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_n + b_n \\ -3a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MX_n$$

en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - 4X + 3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles

$$\lambda_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1\,;3\}}$.

Comme M est une matrice carrée d'ordre 2 admettant 2 valeurs propres distinctes, par théorème, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

d. Déterminons des vecteurs associés à chacune des valeurs propres de M.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$MV = V \iff \begin{cases} 4x + y = x \\ -3x = y \end{cases} \iff y = -3x$$

donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$MV = 3V \iff \begin{cases} 4x + y = 3x \\ -3x = 3y \end{cases} \iff y = -x$$

donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

On en déduit qu'en posant $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } M = PDP^{-1}}$.

e. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = 1 \times (-1) - (-3) \times 1 = 2$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3^{n+1} & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1}-1 & 3^n-1 \\ 3-3^{n+1} & 3-3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1}-1 & 3^n-1 \\ 3-3^{n+1} & 3-3^n \end{pmatrix}}$.

f. La suite (X_n) est une suite géométrique de matrices colonne de raison M donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1}-1 & 3^n-1 \\ 3-3^{n+1} & 3-3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n-1 \\ 3-3^n \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{3^n-1}{2} \text{ et } b_n = \frac{3-3^n}{2}}$.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{3^n-1}{2} A + \frac{3-3^n}{2} I \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(3^n-1) & 3^n-1 & 1-3^n \\ 3^n-1 & 2(3^n-1) & 1-3^n \\ 0 & 0 & 3^n-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3-3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3-3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3-3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & 1-3^n \\ 3^n-1 & 3^n+1 & 1-3^n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Sujet 4. Évolution d'une population d'algues marines (O1)

On étudie une partie de la surface du fond de l'océan sur laquelle poussent uniquement deux algues : l'algue A et l'algue B. La quantité totale d'algues est supposée constante au cours du temps, égale à 1000 algues. On sait que, chaque année,

- 5% des algues A et 10% des algues B meurent ;
- la moitié des algues qui meurent sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre d'algues A en vie à la fin de l'année n et b_n le nombre d'algues B en vie à la fin de l'année n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$
où $M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M, de n et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que 1 est une valeur propre de M.

4. Montrer que M admet une autre valeur propre $\lambda \in [0\,;1[$.

5. En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, u_0, v_0, n et D.

7. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. On note a_∞ et b_∞ leurs limites.

8. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

9. Donner deux méthodes différentes pour calculer $a_\infty + b_\infty$.

10. En déduire que $u_0 = \dfrac{2000}{3}$.

11. Montrer que $a_\infty = \dfrac{2000}{3}$ et $b_\infty = \dfrac{1000}{3}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Au cours de l'année n, $0{,}05a_n$ algues A et $0{,}1b_n$ algues B meurent. Ainsi, le nombre total d'algues qui meurent est $0{,}05a_n + 0{,}1b_n$. Le moitié de celles-ci sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B donc

$$a_{n+1} = a_n - 0{,}05a_n + 0{,}5(0{,}05a_n + 0{,}1b_n) = 0{,}975a_n + 0{,}05b_n$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0{,}1b_n + 0{,}5(0{,}05a_n + 0{,}1b_n) = 0{,}025a_n + 0{,}95b_n.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}975a_n + 0{,}05b_n \\ 0{,}025a_n + 0{,}95b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{H}(n)$: « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation.** $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}}.$$

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{cases} 0{,}975x + 0{,}05y = x \\ 0{,}025x + 0{,}95y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}025x + 0{,}05y = 0 \\ 0{,}025x - 0{,}05y = 0 \end{cases} \iff 0{,}05y = 0{,}025x \iff y = 0{,}5x$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne non nulle telle que $MX = X$ donc on conclut que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$.

4. 1$^{\text{re}}$ méthode : par le calcul.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 0{,}975 - \lambda & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 - \lambda \end{vmatrix} = (0{,}975 - \lambda)(0{,}95 - \lambda) - 0{,}025 \times 0{,}05 \\ &= \lambda^2 - 1{,}925\lambda + 0{,}925 \end{aligned}$$

Comme 1 est valeur propre, 1 est racine du trinôme $X^2 - 1{,}925X + 0{,}925$ et ainsi ce trinôme se factorise par $X - 1$. On obtient $X^2 - 1{,}925X + 0{,}925 = (X-1)(X-0{,}925)$.

Ainsi, l'autre valeur propre de M est $\boxed{\lambda = 0{,}925}$.

2^de méthode : détermination à l'aide de Python

Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

M = np.matrix([[0.975, 0.05], [0.025, 0.95]])
print(np.linalg.eig(M))
```

qui affiche

```
(array([1., 0.925]),
matrix([[ 0.89442719, -0.70710678],
[[0.4472136, 0.70710678]])
```

Ainsi, l'autre valeur propre de M est $\boxed{\lambda = 0{,}925}$.

5. Comme M est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet 2 valeurs propres distinctes, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$. On a vu dans la question **3.** que $E_1(M) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}\right)$. Déterminons $E_{0{,}925}(M)$. Pour cela, on considère le système :

$$\begin{cases}0{,}975x + 0{,}05y = 0{,}925x\\0{,}025x + 0{,}95y = 0{,}925y\end{cases} \iff \begin{cases}0{,}05x + 0{,}05y = 0\\0{,}025x + 0{,}025y = 0\end{cases} \iff y = -x$$

donc $E_{0{,}925}(M) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}925\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 1\\0{,}5 & -1\end{pmatrix}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = P^{-1}M^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}$. Or, comme $M = PDP^{-1}$, par propriété, $M^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = P^{-1}(PD^nP^{-1})\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix} = (P^{-1}P)D^n\left(P^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}\right) = I_2D^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = D^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}}$.

7. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}925^n\end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}925^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\0{,}925^n v_0\end{pmatrix}$$

donc $u_n = u_0$ et $v_n = 0{,}925^n v_0$. Ainsi, (u_n) est constante égale à u_0 et (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}925 \in [0\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Or, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ 0{,}5u_n + v_n \end{pmatrix}$ donc $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = 0{,}5u_n + v_n$. Ainsi, par somme de limites, on en déduit que (a_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = u_0}$ et que (b_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0{,}5u_0}$.

8. On a vu que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0{,}5u_0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \in E_1(M)$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

9. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1000$ donc, par passage à la limite, $a_\infty + b_\infty = 1000$. D'autre part, $a_\infty + b_\infty = u_0 + 0{,}5u_0 = 1{,}5u_0$. Ainsi, $\boxed{a_\infty + b_\infty = 1000 = 1{,}5u_0}$.

10. On en déduit que $u_0 = \dfrac{1000}{1{,}5}$ i.e. $\boxed{u_0 = \dfrac{2000}{3}}$.

11. D'après ce qui précède, $\boxed{a_\infty = u_0 = \dfrac{2000}{3} \text{ et } b_\infty = 0{,}5u_0 = \dfrac{1000}{3}}$.

Sujet 5. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (O1)

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\varphi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que φ est linéaire.

3. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de A.

6. Justifier que φ est diagonalisable.

7. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

8. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Solution.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, il existe des réels a, b et c tels que $P = aX^2 + bX + c$. Dès lors, $P' = 2aX + b$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= (2X+1)(aX^2+bX+c) - (X^2-1)(2aX+b) \\ &= 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX + aX^2 + bX + c - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b) \\ &= (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + b + c\end{aligned}$$

donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]}$.

2. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (2X+1)(\lambda P + Q) - (X^2-1)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda(2X+1)P + (2X+1)Q - (X^2-1)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(2X+1)P + (2X+1)Q - \lambda(X^2-1)P' - (X^2-1)Q' \\ &= \lambda((2X+1)P - (X^2-1)P') + (2X+1)Q - (X^2-1)Q' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

3. $\boxed{\text{La base canonique de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } (1, X, X^2)}$.

4. On a

- $\varphi(1) = (2X+1) \times 1 - (X^2-1) \times 0 = 1 + 2X$
- $\varphi(X) = (2X+1) \times X - (X^2-1) \times 1 = 1 + X + X^2$
- $\varphi(X^2) = (2X+1) \times X^2 - (X^2-1) \times 2X = 2X + X^2$

donc la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

5. <u>1^{re} méthode : par le calcul</u>. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le système

$$(S)\begin{cases} x + y = \lambda x \\ 2x + y + 2z = \lambda y \\ y + z = \lambda z. \end{cases}$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 & L_1 \\ 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_2 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (1-\lambda)x + y = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \\ \left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) y - (1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1-\lambda}{2} L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) y - (1-\lambda)z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -(1-\lambda)\left(2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_3 - \left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) L_2 \end{cases}$$

Ainsi, (S) n'est pas de rang 3 si et seulement si $-(1-\lambda)\left(2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} -(1-\lambda)\left(2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) = 0 &\iff 1-\lambda = 0 \text{ ou } 2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2} = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } (1-\lambda)^2 = 4 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } 1-\lambda = 2 \text{ ou } 1-\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\,;-1\,;3\}}$.

2$^{\text{de}}$ méthode : à l'aide de Python

Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.matrix([[1,1,0], [2,1,2], [0,1,1]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([-1.,  1.,  3.]),
matrix([[ 4.08248290e-01,  7.07106781e-01,
   4.08248290e-01],
[-8.16496581e-01,  3.74983192e-16,  8.16496581e-01],
[ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,  4.08248290e-01]])
   )
```

on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1\,;1\,;3\}}$.

6. La matrice A est une matrice carrée d'ordre 3 qui admet 3 valeurs propres distinctes donc, par théorème, A est diagonalisable. Comme A est la matrice de φ dans la base canonique, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

7. Comme 0 n'est pas pas valeur propre de φ, $\ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ donc $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$. Comme φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et qui $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$.

8. Pour déterminer les sous-espaces propres, on reprend le système échelonné en remplaçant λ par les valeurs propres.

Pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\boxed{E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - X^2)}$.

Pour $\lambda = -1$, on obtient

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}.$$

Ainsi, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\boxed{E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - 2X + X^2)}$.

Pour $\lambda = 3$, on obtient

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}.$$

Ainsi, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\boxed{E_3(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 + 2X + X^2)}$.

Sujet 6. Résolution d'une équation matricielle (O1)

Partie I

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ de telle sorte que P soit de la forme $P = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.
Déterminer P^{-1}.

2. a. Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BD = DB$.
Montrer que B est une matrice diagonale.

b. Déterminer les matrices $B\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = D$.

3. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$. Combien y a-t-il de solutions ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède 3 valeurs propres non nulles, deux à deux distinctes.
On suppose, de plus, qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = C$.

1. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de M^2.

2. Montrer que si X est un vecteur propre de M^2 alors MX est un vecteur propre de M^2 pour la même valeur propre.

3. Montrer que si X est un vecteur propre de M^2 alors X et MX sont deux vecteurs colonnes proportionnels.

4. a. Soit X un vecteur propre de M^2.
Démontrer à l'aide de la question **3.** que X est aussi un vecteur propre de M.

b. En déduire que M est diagonalisable.

5. a. Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}CP$ et $P^{-1}MP$ soient diagonales.
On notera dans la suite : $D = P^{-1}CP$ et $B = P^{-1}MP$.

b. Vérifier que l'équation $M^2 = C$ équivaut à $B^2 = D$.

6. En supposant que les 3 valeurs propres distinctes de C sont strictement positives, expliciter toutes les matrices M vérifiant $M^2 = C$.

Solution.

Partie I

1. La question revient à montrer que 3, 6 et 1 sont les valeurs propres de A.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

• Déterminons $E_3(A)$:

$$X\in E_3(A)\iff\begin{cases}3x+2y+z=3x\\2x+3y+z=3y\\x+y+4z=3z\end{cases}\iff\begin{cases}2y+z=0\\2x+z=0\\x+y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-\frac{1}{2}z\\x=-\frac{1}{2}z\end{cases}$$

donc $E_3(A)=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}\;\middle|\;z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$.

• Déterminons $E_6(A)$:

$$\begin{aligned}X\in E_6(A)&\iff\begin{cases}3x+2y+z=6x\\2x+3y+z=6y\\x+y+4z=6z\end{cases}\iff\begin{cases}-3x+2y+z=0 & L_1\\2x-3y+z=0 & L_2\\x+y-2z=0 & L_3\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x+y-2z=0 & L_1\leftrightarrow L_3\\2x-3y+z=0 & L_2\\-3x+2y+z=0 & L_3\leftrightarrow L_1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x+y-2z=0 & L_1\\-5y+5z=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\5y-5z=0 & L_3\leftarrow L_3+3L_1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}\end{aligned}$$

donc $E_6(A)=\left\{\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\;\middle|\;z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

• Déterminons $E_1(A)$:

$$X \in E_1(A) \iff \begin{cases} 3x+2y+z=x \\ 2x+3y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y+z=0 & L_1 \\ 2x+2y+z=0 & L_2 \\ x+y+3z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+3z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2x+2y+z=0 & L_2 \\ 2x+2y+z=0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+3z=0 & L_1 \\ -5z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, on conclut que A est diagonalisable (ce que l'on savait déjà car A est une matrice symétrique à coefficients réels) et $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons le système $(S) : \begin{cases} x+y-z=a & L_1 \\ x+y+z=b & L_2 \\ -2x+y=c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y-z=a & L_1 \\ 2z=b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y-2z=c+2a & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z=a & L_1 \\ 3y-2z=c+2a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 2z=b-a & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-(-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)=a \\ 3y-(b-a)=c+2a \\ z=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \end{cases} \iff \begin{cases} x+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ y=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c \\ z=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{1}{6}a+\frac{1}{6}b-\frac{1}{3}c \\ y=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c \\ z=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \end{cases}.$$

Ainsi, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$.

Remarque. Bien que A soit symétrie réelle, on n'a pas $P^{-1} = {}^tP$ car la base de vecteurs propres que l'on a choisie pour construire P n'est pas orthonormée (elle est bien orthogonale mais ses vecteurs ne sont pas unitaires).

2. a. Écrivons $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors,

$$BD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 6b & c \\ 3d & 6e & f \\ 3g & 6h & i \end{pmatrix}$$

et

$$DB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 6d & 6e & 6f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

donc, comma $BD = DB$, on a $6b = 3b$, $c = 3c$, $3d = 6d$, $f = 6f$, $3g = g$ et $6h = h$ donc $b = c = d = f = g = h = 0$ et ainsi $\boxed{B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale}}$.

b. Soit B une matrice tel que $B^2 = D$. Alors, $BD = B(B^2) = B^3 = (B^2)B = DB$ donc, d'après la question précédente, B est diagonale. Ainsi, il existe des réels a, b et c tels que $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Dès lors, comme B est diagonale, $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ et ainsi, comme $B^2 = D$, $a^2 = 3$, $b^2 = 6$ et $c^2 = 1$ donc $a = \pm\sqrt{3}$, $b = \pm\sqrt{6}$ et $c = \pm 1$. Ainsi, B est l'une des 8 matrices $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, ces 8 matrices vérifient bien $B^2 = D$ donc les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors,

$$M^2 = A \Longleftrightarrow M^2 = PDP^{-1} \Longleftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Longleftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D.$$

Ainsi, d'après la question précédente, $M^2 = A$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est l'une des 8 matrices B précédentes donc si et seulement si M est l'une des 8 matrices PBP^{-1} (et ces 8 matrices sont bien différentes car leurs spectres sont différents).

On conclut que $\boxed{\text{l'équation } M^2 = A \text{ possède 8 solutions}}$.

Partie II

1. Comme C est une matrice d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisation et chacun des ses sous-espaces propres est de dimension 1. Comme $M^2 = C$, on conclut que $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } M^2 \text{ sont de dimension 1}}$.

2. Soit X un vecteur propre de M^2. Alors, X est non nul et il existe un réel λ tel que $M^2X = \lambda X$. Dès lors, $M^2(MX) = M^3X = M(M^2X) = M(\lambda X) = \lambda(MX)$. De plus, si $MX = 0_{3,1}$ alors $M^2X = M0_{3,1} = 0_{3,1}$ donc $CX = 0_{3,1}$ i.e., comme X est non nul, 0 est valeur propre de C. Or, ceci est exclu par l'énoncé donc $MX \neq 0_{3,1}$ donc on conclut que $\boxed{MX \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } \lambda}$.

3. Soit X un vecteur propre de M^2. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X \in E_\lambda(M^2)$. Par la question précédente, $MX \in E_\lambda(M^2)$ et, d'après la question **1.**, $\dim(E_\lambda(M^2) = 1$ donc $E_\lambda(M^2)) = \mathbf{Vect}(X)$. Ainsi, $MX \in \text{Vect}(X)$ donc $\boxed{\text{il existe un réel } k \text{ tel que } MX = kX}$.

4. **a.** D'après la question précédente, il existe un réel k tel que $MX = kX$ et, de plus, comme X est un vecteur propre de M^2, $X \neq 0_{3,1}$.
   $\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ est un vecteur propre de } M}$.

   b. Comme $M^2 = C$ est diagonalisable, il existe une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M^2. Or, d'après la question précédente, X_1, X_2 et X_3 sont aussi des vecteurs propres de M donc (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

5. **a.** Avec les notations de la question précédente, si on considère la matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2, X_3) alors il existe des matrices diagonales D et B telles que $M^2 = PDP^{-1}$ et $M = PBP^{-1}$.

   b. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} M^2 = C &\iff (PBP^{-1})^2 = PDP^{-1} \iff PB^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff B^2 = P^{-1}(PDP^{-1})P \iff B^2 = D. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{M^2 = C \text{ si et seulement si } B^2 = D}$.

6. Par le même raisonnement que dans la question **2.b.** de la **Partie I**, comme B est diagonale, B est l'une des 8 matrices dont la diagonale est composée des $\pm\sqrt{\lambda}$ où $\lambda \in \text{Sp}(C)$. On en déduit que M est l'une des 8 matrices PBP^{-1} et, réciproquement, une telle matrice vérifie bien $M^2 = C$ car

$$(PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1} = PDP^{-1} = C.$$

   Notons λ_1, λ_2 et λ_3 les trois valeurs propres de C associées respectivement aux vecteurs propres X_1, X_2 et X_3.

   Alors $\boxed{\text{les solutions de } M^2 = C \text{ sont les 8 matrices } M = P\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}P^{-1}}$.

Sujet 7. Étude de trois suites imbriquées (O2)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calculs que A est diagonalisable.

2. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

3. Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

4. Calculer P^{-1}.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

7. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 3w_n \end{cases}.$$

En utilisant la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n en fonction de n.

8. Que fait la fonction suivante, écrite en Python ?

```python
def suite(n):
  u, v, w = 1, 1, 1
  for k in range(1, n+1):
    u, v, w = u+v+w, 2*v+w, 3*w
  return u, v, w
```

L'utiliser pour vérifier les résultats de la question 7).

Solution.

1. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont des éléments diagonaux. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\,;2\,;3\}$ donc A est une matrice carrée d'ordre 3 ayant 3 valeurs propres distinctes donc, par propriété, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   • Déterminons $E_1(A)$:

$$X \in E_1(A) \iff \begin{cases} x + y + z = x \\ 2y + z = y \\ 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

   donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

   • Déterminons $E_2(A)$:

$$X \in E_2(A) \iff \begin{cases} x + y + z = 2x \\ 2y + z = 2y \\ 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

   donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

   • Déterminons $E_3(A)$:

$$X \in E_3(A) \iff \begin{cases} x + y + z = 3x \\ 2y + z = 3y \\ 3z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

   donc $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   On conclut que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres de A.

3. On déduit des questions précédentes qu'on a l'égalité $A = PDP^{-1}$ en posant les matrices $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

4. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons le système $(S) : \begin{cases} x+y+z=a \\ y+z=b \\ z=c \end{cases}$. Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} z = a-b \\ y = b-c \\ z = c \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{H}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation. $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors, $A^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2^n & -2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-2^n \\ 0 & 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-2^n \\ 0 & 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$.

7. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n + w_n \\ 2u_n + w_n \\ 3w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AX_n$$

donc (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ i.e.

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2^n - 1 + 3^n - 2^n \\ 2^n + 3^n - 2^n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = w_n = 3^n}$.

8. La fonction `suite` renvoie les valeurs de u_n, v_n et w_n pour la valeur de n passé en argument.

Avec l'instruction

```
for n in range(6):
  print(suite(n))
```

on obtient l'affichage suivant :

```
(1, 1, 1)
(3, 3, 3)
(9, 9, 9)
(27, 27, 27)
(81, 81, 81)
(243, 243, 243)
```

ce qui est bien cohérent puisque $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$.

Sujets d’analyse

Sujet 8. Étude d'une fonction et applications (C2)

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. a. Donner l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

c. Calculer f' et f'' sur $]0\,;+\infty[$.

d. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

e. Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$ que l'on déterminera.

2. On considère la fonction F définie sur $U =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

a. Calculer, pour tout $(x,y) \in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

b. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que si $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ alors $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$

c. En déduire les points critiques de F.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Étudier les variations de (u_n).

c. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

d. Écrire un programme en Python permettant d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$.

Solution.

1. **a.** Par définition, $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}_+}$.

   b. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et différence de fonctions continues. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ donc, par différence, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$ donc f est également continue en 0. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

   c. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et différence de fonctions deux fois dérivables et, pour tout réel $t > 0$,

$$f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t}\right) \quad \text{i.e.} \quad \boxed{f'(t) = 2t - \ln(t) - 1}$$

   et

$$\boxed{f'(t) = 2 - \frac{1}{t}}.$$

   d. Pour tout réel $t > 0$, $f''(t) = \dfrac{2t-1}{t}$ est du signe de $2t-1$ donc $f''(t) \leqslant 0$ si $t \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $f''(t) \geqslant 0$ si $t \in \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Ainsi, f' est décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. On en déduit que f' atteint son minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum vaut

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 + \ln(2) - 1 = \ln(2) > 0$$

   donc $f'(t) > 0$ pour tout réel $t > 0$.

   On conclut que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

   e. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc injective sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(1) = 1^2 - 1\ln(1) = 1$ donc 1 est l'unique antécédent de 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Autrement dit, $\boxed{1 \text{ est l'unique solution de l'équation } f(t) = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2. **a.** Pour tout $(x, y) \in U$,

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x}}$$

   et

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(x)}.$$

   b. Supposons que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$. Alors, $\dfrac{x}{y} = \ln(x)$ et $\dfrac{y}{x} = \ln(y)$ donc

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\left[\ln(x) - \ln(y)\right] = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right] = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} + 1$$

   i.e. $\boxed{f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1}$.

c. La question précédente assure que si $(x,y) \in U$ est un point critique de F alors $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$ donc, d'après les résultats de la question **1.**, $\dfrac{x}{y} = 1$ i.e. $y = x$.

Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors $(a,a) \in U$. De plus, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,a) = \ln(a) - \dfrac{a}{a} = \ln(a) - 1$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,a) = \dfrac{a}{a} - \ln(a) = 1 - \ln(a)$ donc (a,a) est un point critique de F si et seulement si $\ln(a) = 1$ i.e. $a = e$.

On conclut que $\boxed{\text{l'unique point critique de } F \text{ est } (e,e)}$.

3. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. Comme $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$. Or, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}6$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et on a vu que $f(1) = 1$. Ainsi, $\dfrac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$ i.e. $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1}.$$

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

Initialisation. Comme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}6$, $u_0 \leqslant u_1$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $\dfrac{1}{2}u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

c. Ainsi, (u_n) est croissante et bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = f(\ell)$. Ainsi, $\ell = \ell^2 - \ell\ln(\ell)$ donc, comme $\ell \neq 0$, $1 = \ell - \ln(\ell)$ i.e. $g(\ell) = 0$ où $g : x \longmapsto x - \ln(x) - 1$. Or, $g(1) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc g est strictement croissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in]0\,;1[$, $g(x) > g(1) = 0$ et, pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $g(x) > g(1) = 0$ donc 1 est l'unique solution de $g(x) = 0$. Ainsi, on conclut que $\ell = 1$ i.e.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

d. La fonction suivante répond à la question car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$ donc $|u_n - 1| = 1 - u_n$. (Rappel : en Python, la fonction ln est disponible dans le module `math` sous la nom `log`.)

```python
from math import *

def seuil():
  n = 0
  u = 1/2
  while 1-u > 10**(-4):
    n += 1
    u = u**2 - u*log(u)
  return n
```

On trouve $\boxed{n = 19994}$.

Sujet 9. Étude d'une suite définie par récurrence (C4)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que (u_n) est bien définie et strictement positive.

3. Que fait la fonction suivante, écrite en Python ?

```python
def mystere(n):
  u = 1
  for i in range(n):
    u = u + 1/u
  return u
```

Utiliser cette fonction pour conjecturer le comportement de la suite (u_n) ainsi que celui de la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Étudier les variations de (u_n).

5. Montrer que (u_n) diverge et en déduire la limite de (u_n).

6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$.

7. On pose, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2).$$

b. En déduire la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c. À l'aide de la courbe de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (qui peut être tracée à main levée), démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \leqslant 2\sqrt{n-2} - 1.$$

d. Déduire des questions précédentes un encadrement de u_n valable pour tout entier $n \geqslant 3$ puis donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. $u_1 = 1 + \frac{1}{1}$ donc $\boxed{u_1 = 2}$ et $u_2 = 2 + \frac{1}{2}$ donc $\boxed{u_2 = \frac{5}{2}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

Initialisation. Par définition, u_0 existe et $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n > 0$ donc u_n et $\frac{1}{u_n}$ existent et ainsi u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, $\frac{1}{u_n} > 0$ donc, par somme, $u_{n+1} > 0$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et strictement positive}}$.

3. L'appel `mystere(n)` renvoie la valeur de u_n pour un entier naturel n passé en argument.

On peut conjecturer que (u_n) est croissante et diverge très lentement vers $+\infty$ (par exemple, $u_{100} \approx 14$, $u_{1000} \approx 45$ et $u_{10^6} \approx 1414$).

On peut modifier la fonction `mystere` afin qu'elle affiche les valeurs de la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)$ de la manière suivante :

```python
from math import sqrt

def mystere(n):
  u = 1
  for i in range(n):
    u = u + 1/u
  return u/sqrt(2*n)
```

On peut conjecturer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)$ est décroissante et converge vers 1 (par exemple, $\frac{u_{100}}{\sqrt{2 \times 100}} \approx 1{,}01$, $\frac{u_{1000}}{\sqrt{2 \times 1000}} \approx 1{,}001$ et $\frac{u_{10^6}}{\sqrt{2 \times 10^6}} \approx 1{,}000002$).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ car $u_n > 0$ donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

5. Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ. Comme (u_n) est croissante, elle est minorée par $u_0 = 1$ donc $\ell \geqslant 1$. En particulier, $\ell \neq 0$. Dès lors, $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\ell}$ donc, par somme, $u_n + \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell + \frac{1}{\ell}$. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell + \frac{1}{\ell}$. Or, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ i.e. $\frac{1}{\ell} = 0$. C'est absurde donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge}}$.

Comme (u_n) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, soit (u_n) converge soit (u_n) tend vers $+\infty$. Or, on vient de voir que (u_n) diverge donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

6. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$ ».

Initialisation. Comme $u_1^2 = 2^2 = 4$ et $2(1-1) = 0$, $u_1^2 \geqslant 2(1-1)$ i.e. $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$ donc

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geqslant 2(n-1) + 2 = 2n$$

car $\dfrac{1}{u_n^2} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n^2 \geqslant 2(n-1)}.$$

7. a. Soit un entier $n \geqslant 3$. On remarque que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $u_{k+1} - u_k = \dfrac{1}{u_k}$. De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, d'après la question précédente, $u_k^2 \geqslant 2(k-1)$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{u_k^2} \geqslant \sqrt{2(k-1)}$ i.e., comme $u_k > 0$, $u_k \geqslant \sqrt{2(k-1)}$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{u_k} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2(k-1)}}$ i.e. $u_{k+1} - u_k \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2(k-1)}}$.

Ainsi, en sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n-1} u_{k+1} - u_k \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2(k-1)}}.$$

Or, par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_2$ et, par linéarité et changement d'indice,

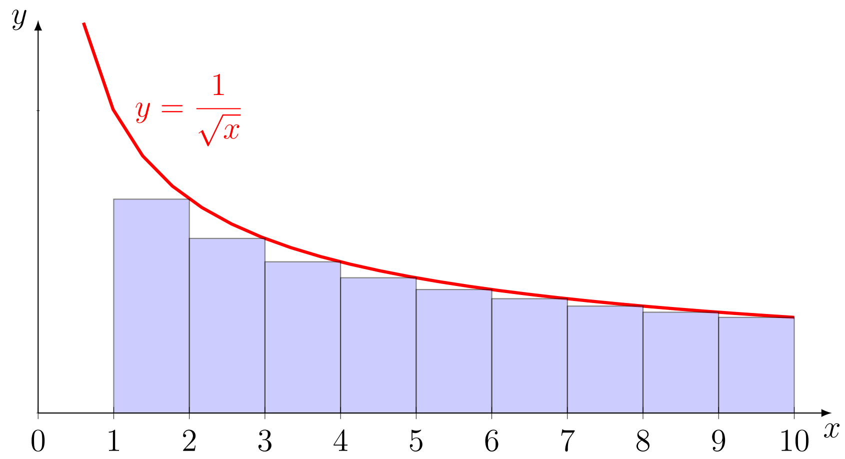
$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2(k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k-1}} \underset{j=k-1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{j}} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_n.$$

Ainsi, $u_n - u_2 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} S_n$ donc $\boxed{S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2)}$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\sqrt{2} > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2}(u_n - u_2) = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Par suite, $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

c. Soit un entier $n \geqslant 3$. Pour tout entier entier $k \geqslant 2$, on peut interpréter le nombre $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ comme l'aire du rectangle de hauteur $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ construit sur le segment $[k-1\,; k]$.



Comme ces rectangles sont entièrement situés en dessous de la courbe de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n-2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n-2} = 2\sqrt{n-2} - 2.$$

Dès lors,

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + 2\sqrt{n-2} - 2$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n-2} - 1}.$$

d. D'une part, on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{2(n-1)}$. D'autre part, on a vu que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2)$ donc, comme $\sqrt{2} > 0$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} S_n + u_2$. On déduit alors de la question précédente que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{n-2} - 1\right) + \frac{5}{2} = \sqrt{2}\sqrt{n-2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \leqslant \sqrt{2(n-2)} + 2.$$

car $\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}8 \leqslant 2$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ \sqrt{2(n-1)} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2(n-2)} + 2}$.

On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\sqrt{2n\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n\left(1 - \frac{2}{n}\right)} + 2$$

donc

$$\sqrt{2n}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}\sqrt{1 - \frac{2}{n}} + 2$$

i.e. comme $\sqrt{2n} > 0$,

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leqslant \sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{2n}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{2}{n} = 1$ donc, par continuité de la racine carrée en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{2}{n}} = \sqrt{1} = 1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{2n}} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}} = 1$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$. Ainsi, par définition, $\boxed{u_n \sim \sqrt{2n}}$.

Sujet 10. Modèle de Gompertz (C6)

On peut modéliser la masse corporelle d'un rat musqué en fonction de son âge par le modèle de croissance de Gompertz.

Si on note t l'âge (en jours) du rat et $Y(t)$ sa masse (en grammes), on suppose que la fonction Y vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad Y'(t) = -r \ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) Y(t)$$

avec r et K des réels strictement positifs tels que $0 < Y(0) < K$.

Dans la suite, on note Y une solution de cette équation différentielle et on admet que, pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, $0 < Y(t) < K$.

1. a. Justifier que la fonction $f : y \longmapsto \dfrac{1}{-r\ln(\frac{y}{K})y}$ admet une primitive F sur $]0\,; K[$.

b. Montrer que, pour tout réel t positif, $(F \circ Y)'(t) = 1$.

2. Vérifier que $F : y \longmapsto -\dfrac{1}{r} \ln\left(-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)\right)$ est une primitive de f sur $]0; K[$.

3. a. Déduire des questions précédentes l'existence d'une constante réelle C telle que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$-\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}$$

b. On pose $y_0 = Y(0)$. Établir que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$.

c. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = K \exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$.

4. Étudier les variations de la fonction Y sur $[0\,; +\infty[$. Que représente la constante K ?

5. On considère la fonction Z définie pour tout $t \geqslant 0$ par $Z(t) = \ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right)$.

Démontrer que Z est une fonction affine de coefficient directeur $-r$. Préciser son ordonnée à l'origine.

6. *Détermination expérimentale de y_0, K et r*

Le tableau ci-contre contient les valeurs mesurées tous les 20 jours de la masse du rat, de sa naissance à son 301e jour. On note T_i le temps de mesure et M_i la masse mesurée le jour T_i.

a. Proposer des valeurs de y_0 et K.

b. Indiquer comment on pourrait proposer une valeur expérimentale de r.

Temps (j)	Masse (g)
0	16,00
20	116,06
40	304,48
60	486,91
80	611,92
100	683,91
120	721,96
140	741,24
160	750,81
180	755,51
200	757,81
220	758,93
240	759,48
260	759,75
280	759,88
300	759,94

Solution.

1. **a.** Pour tout $y \in]0\,;K[$, $0 < y < K$ donc, comme $K > 0$, $0 < \dfrac{y}{K} < 1$ et ainsi, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{y}{K}\right) < 0$. Comme $r > 0$, il s'ensuit que, pour tout $y \in]0\,;K[$, $-r\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)y > 0$ donc $-r\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)y \neq 0$. Ainsi, la fonction f est définie sur $]0\,;K[$. Comme f est une composée de fonctions de référence, elle est continue sur $]0\,;K[$ et donc, par théorème, $\boxed{f \text{ admet une primitive } F \text{ sur }]0\,;K[}$.

   b. La fonction $F \circ Y$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ car, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) \in]0\,;K[$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$(F\circ Y)'(t) = F'(Y(t))Y'(t) = f(Y(t))Y'(t) = \frac{1}{-r\ln(\frac{Y(t)}{K})Y(t)}\left(-r\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right)Y(t)\right) = 1.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*,\ (F\circ Y)'(t) = 1}$.

2. On a vu précédemment que, pour tout $y \in]0\,;K[$, $-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right) > 0$ donc F est bien définie sur $]0\,;K[$. De plus, elle est dérivable sur $]0\,;K[$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $y \in]0\,;K[$,

$$F'(y) = -\frac{1}{r} \times \frac{-\frac{\frac{1}{K}}{\frac{y}{K}}}{-\ln(\frac{y}{K})} = -\frac{1}{r} \times \frac{\frac{1}{y}}{\ln(\frac{y}{K})} = \frac{1}{-r\ln(\frac{y}{K})y} = f(y).$$

   Ainsi, $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0\,;K[}$.

3. **a.** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(F\circ Y)'(t) = 1$ donc, comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(F\circ Y)(t) = t+C$ i.e. $-\dfrac{1}{r}\ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right) = t+C$. Dès lors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right) = -r(t+C)$ donc $-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}$.

   On conclut donc qu'$\boxed{\text{il existe } C \in \mathbb{R} \text{ telle que, pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ -\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}}$.

   b. On a donc $-\ln\left(\dfrac{Y(0)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-rC}$ i.e. $-\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right) = \mathrm{e}^{-rC}$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = -\mathrm{e}^{-r(t+C)} = -\mathrm{e}^{-rC}\mathrm{e}^{-rt} = -\left(-\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\right)\mathrm{e}^{-rt}$$

   donc,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}}.$$

c. On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{Y(t)}{K} = \exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$ donc on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ Y(t) = K\exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]}$.

4. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$Y'(t) = -r\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right)Y(t) = -r\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt} \times K\exp\left[\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$$

donc, comme exp est à valeurs positives, $Y'(t)$ est du signe de $-rL\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)$. Or, par hypothèse, $r > 0$, $K > 0$ et $y_0 = Y(0) \in]0\,;K[$ donc, comme on l'a vu précédemment, $\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right) < 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y'(t) > 0$ donc $\boxed{Y \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

De plus, comme $r > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} -rt = -\infty$ donc, comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-rt} = 0$. Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt} = 0$ donc, par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = K\mathrm{e}^0$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = K}$.

La valeur K représente donc le poids limite du rat musqué.

5. Remarquons que Z est bien définie pour tout $t \geqslant 0$. On a vu précédemment que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)} > 0$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$ donc

$$Z(t) = \ln\left(-\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right) = \ln\left(\ln\left(\frac{K}{y_0}\right)\right) + \ln(\mathrm{e}^{-rt}) = -rt + \ln\left(\ln\left(\frac{K}{y_0}\right)\right)$$

donc $\boxed{Z \text{ est bien une fonction affine de coefficient directeur } -r}$. De plus, il suit de l'égalité précédente que $\boxed{\text{son ordonnée à l'origine est } \ln\left(\ln\left(\dfrac{K}{y_0}\right)\right)}$.

6. **a.** D'après le tableau, $Y(0) = 16$ donc $\boxed{y_0 = 16}$ et Y semble se stabiliser autour de 760 donc $\boxed{K = 760}$.

b. On en déduit que $Z(0) = \ln\left(-\ln\left(\frac{16}{760}\right)\right) \approx 1{,}35$ et $Z(100) = \ln\left(-\ln\left(\frac{683{,}91}{760}\right)\right) \approx -2{,}25$ donc $-r \approx \dfrac{-2{,}25 - 1{,}35}{100 - 0}$ soit $\boxed{r \approx 0{,}036}$.

Sujet 11. Étude d'une suite définie implicitement I (C5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et $(v_n)_{n\geqslant 3}$ telles que, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant n \leqslant v_n \\ f_n(u_n) = 0 \\ f_n(v_n) = 0 \end{cases}.$$

3. À l'aide d'une modélisation numérique ou graphique, conjecturer le comportement asymptotique de (u_n), (v_n), $\left(\frac{n}{v_n}\right)$.

4. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

5. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{v_n}$.

6. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 3$:

$$1 < u_n < e.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

c. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d. Montrer que

$$\ln(u_n) \sim u_n - 1$$

et en déduire que

$$u_n - 1 \ \sim \frac{1}{n}.$$

Solution.

1. La fonction f_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$f_n'(x) = 1 - n \times \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x}.$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, f_n est du signe de $x - n$ donc $f_n'(x) < 0$ si $x \in\,]0\,;n[$, $f_n'(n) = 0$ et $f_n'(x) < 0$ si $x \in\,]n\,;+\infty[$.

On en déduit que f_n est strictement décroissante sur $]0\,;n]$ et strictement croissante sur $[n\,;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $n > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} -n\ln(x) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$.

Enfin, pour tout $x > 0$, $f_n(x) = x\left[1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par combinaison linéaire, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - n\dfrac{\ln(x)}{x} = 1$ et ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

On aboutit donc au tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
Variation de f_n	$+\infty$	↘	$n - n\ln(n)$	↗	$+\infty$

2. Supposons $n \geqslant 3$. Alors, $n \geqslant e$ donc, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(n) \geqslant \ln(e) = 1$ donc $n - n\ln(n) \leqslant 0$. Sur chacun des deux intervalles $]0\,;n]$ et $[n\,;+\infty[$, la fonction f_n est continue (car dérivable) et strictement monotone donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur $[n - n\ln(n)\,;+\infty[$. Ainsi, il existe un unique $u_n \in\,]0\,;n]$ et un unique $v_n \in [n\,;+\infty[$ tels que $f(u_n) = f(v_n) = 0$.
On en déduit l'existence des deux suites de l'énoncé.

3. En traçant les courbes des fonctions f_n pour différentes valeurs de n à l'aide de GeoGebra, $\boxed{\text{on peut conjecturer que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{v_n} = 0}$.

4. Par définition, pour tout $n \geqslant 3$, $v_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f_n(v_n) = 0$ donc $v_n - n\ln(v_n) = 0$ i.e. $v_n = n\ln(v_n)$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{v_n}{n} = \ln(v_n)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = +\infty$. Par inverse, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{v_n} = 0}$.

6. a. Soit un entier $n \geqslant 3$. D'une part, $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0$ et, d'autre part, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ (car $n \geqslant 3 > e$) donc, comme $f_n(u_n) = 0$, $f(1) > f_n(u_n) > f(e)$. La fonction f_n étant strictement décroissante sur $[0\,;n[$ et cet intervalle contenant les trois nombres 1, u_n et e, on en déduit que $\boxed{1 < u_n < e}$.

b. Soit un entier $n \geqslant 3$. Alors,

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1)\ln(u_n) = u_n - n\ln(u_n) - \ln(u_n) = f_n(u_n) - \ln(u_n)$$

donc, comme $f_n(u_n) = 0$, $f_{n+1}(u_n) = -\ln(u_n)$. Or, on a vu à la question précédente que $u_n > 1$ donc $\ln(u_n) > 0$ et ainsi, $f_{n+1}(u_n) < 0$. Autrement dit, $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Or, u_n et u_{n+1} appartiennent à $]0\,;n+1]$ et f_{n+1} est décroissante sur cet intervalle donc $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f_n(u_n) = 0$ donc $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$. Or, la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln(u_n)} = 1$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

d. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln(u_n) = \ln(1+(u_n-1))$ et, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dès lors, par théorème, $\boxed{\ln(u_n) \sim u_n - 1}$.

Par ailleurs, comme on l'a vu précédemment, pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$ donc, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n \sim 1$ et ainsi, par quotient d'équivalent, $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{n}$.

Par transitivité de la relation d'équivalence, on ne déduit que $\boxed{u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}}$.

Sujet 12. Arctan itérée (C9)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n) \end{cases}.$$

1. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle. Essayer plusieurs valeurs de u_0.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arctan(x) - x$.

- **a.** Étudier le sens de variation de g.
- **b.** En déduire le signe de g.
- **c.** Dresser le tableau de variations de g, en précisant les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge. Que vaut alors sa limite ℓ ?

4. On suppose dans cette question que $u_0 \geqslant 0$.

- **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
- **b.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
- **c.** En déduire que la suite (u_n) converge.

5. Que se passe-t-il si $u_0 < 0$?

Solution.

1. On peut écrire un programme en Python pour obtenir les premières valeurs de (u_n). La fonction arctan se trouve dans le module `math`. Pour connaître la syntaxe en Python, on peut écrire dans la console

```
>>> import math
>>> dir(math)
```

ce qui permet d'afficher la liste de toutes les fonctions contenus dans le module `math`. En l'occurence, en Python, la fonction arctan est notée `atan`.

On peut donc utiliser la fonction suivante :

```
def suite(x0,n):
  u=x0
  for k in range(n):
    print(u)
    u=atan(u)
```

En testant plusieurs valeur de x_0 et de n, on peut conjecturer que (u_n) est décroissante sur $x_0 \leqslant 0$ et croissante sinon et que, dans tous les cas, (u_n) semble converger vers 0.

2. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$

De plus, g' ne s'annule qu'en 0 donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$.

b. On remarque que $g(0) = \arctan(0) - 0 = 0$ donc, comme g est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{g(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in \,]-\infty\,;0] \text{ et } g(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in [0\,;+\infty[}$.

c. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Ainsi, on aboutit au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors, d'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, d'autre part, comme arctan est continue sur $\mathbb{R}$, $\arctan(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(\ell)$ i.e. $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(\ell)$. Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\arctan(\ell) = \ell$ donc $g(\ell) = 0$. Or, comme g est strictement décroissante, g est injective sur $\mathbb{R}$ donc, comme $g(0) = 0$, 0 est l'unique antécédent de 0 par g. On conclut donc que $\boxed{\ell = 0}$.

4. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».
Initialisation. Par hypothèse, $u_0 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n \geqslant 0$ donc, comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\arctan(u_n) \geqslant \arctan(0)$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc, d'après la question **2.b.**, $g(u_n) \leqslant 0$ i.e. $\arctan(u_n) - u_n \leqslant 0$ soit $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

c. Comme (u_n) est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

5. Si $u_0 < 0$, on montre comme précédemment par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$ et on en déduit, en utilisant la question **2.** que (u_n) est croissante. Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

Sujet 13. Une équation différentielle à paramètre (O2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$(E_n): \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^2} y''(t) + y(t) = \sin(t).$$

1. a. Montrer que la fonction $f_1 : t \longmapsto \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{2}$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, si $n \neq 1$, la fonction $f_n : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que l'équation (E_n) est équivalente à l'équation différentielle :

$$(F_n): \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + n^2 y(t) = n^2 \sin(t).$$

3. a. Résoudre l'équation homogène associée à (F_n).

b. Donner la forme générale des solutions de (F_n) (et donc de (E_n)).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'unique solution g_n de (E_n) vérifiant $g_n(0) = 0$ et $g_n'(0) = 0$.

5. Déterminer, pour tout réel t, la limite de $g_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. a. La fonction f_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et combinaison linéaire de fonctions qui le sont. De plus, pour tout réel t,

$$f_1'(t) = \frac{\cos(t) - (\cos(t) - t\sin(t))}{2} = \frac{t\sin(t)}{2}$$

et

$$f_1''(t) = \frac{\sin(t) + t\cos(t)}{2}$$

donc

$$f_1''(t) + f_1(t) = \frac{\sin(t) + t\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{2} = \sin(t)$$

donc $\boxed{f_1 \text{ est solution de } (E_1)}$.

b. Supposons $n \geqslant 2$ et $f : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car proportionnelle à la fonction sinus et, pour tout réel t,

$$f''(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\sin''(t) = -\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$$

donc, pour tout réel t,

$$\frac{1}{n^2}f''(t)+f(t) = -\frac{1}{n^2}\times\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)+\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) = \left(-\frac{1}{n^2-1}+\frac{n^2}{n^2-1}\right)\sin(t) = \sin(t).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien solution de } (E_n) \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Pour toute fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$\frac{1}{n^2}y''(t)+y(t) = \sin(t) \underset{n\neq 0}{\Longleftrightarrow} n^2\left(\frac{1}{n^2}y''(t)+y(t)\right) = n^2\sin(t) \Longleftrightarrow y''(t)+n^2y(t) = n^2\sin(t)$$

donc $\boxed{(E_n) \text{ est équivalente à } (F_n)}$.

3. a. L'équation homogène associée à (F_n) est $(H_n) : y''+n^2y = 0$. L'équation caractéristique associée à (H_n) est $(C_n) : x^2+n^2 = 0$ qui est équivalente à $(x-in)(x+in) = 0$ donc, comme $n \neq 0$, (C_n) possède deux solutions complexes conjuguées : $x_1 = in$ et $x_2 = -in$. Par théorème, l'ensemble des solutions de (H_n) sur $\mathbb{R}$ est

$$\{t \longmapsto \mathrm{e}^{0t}(A\cos(nt)+B\sin(nt)) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

i.e.

$$\boxed{\{t \longmapsto A\cos(nt)+B\sin(nt) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

b. Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{2} + A\cos(nt) + B\sin(nt) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{si } n = 1}.$$

et

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) + A\cos(nt) + B\sin(nt) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{si } n \geqslant 2}.$$

4. **1$^{\text{er}}$ cas** : $n = 1$. On peut remarquer que la fonction f_1 vérifie

$$f_1(0) = \frac{\sin(0) - 0 \times \cos(0)}{2} = 0$$

et

$$f_1'(0) = \frac{0 \times \sin(0)}{2} = 0$$

donc $\boxed{g_1 = f_1}$.

2$^{\text{nd}}$ cas : $n \geqslant 2$. Soit A et B deux réels et

$$g : t \longmapsto \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) + A\cos(nt) + B\sin(nt).$$

Alors, pour tout réel t,

$$g'(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\cos(t) - nA\sin(nt) + nB\cos(nt)$$

donc

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ \dfrac{n^2}{n^2-1} + nB = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -\dfrac{n}{n^2-1} \end{cases}.$$

Ainsi, $g_n : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t) - \dfrac{n}{n^2-1}\sin(nt)$.

On conclut donc que, pour tout réel g_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{2} & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t) - \dfrac{n}{n^2-1}\sin(nt) & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}}.$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$g_n(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) - \frac{n}{n^2-1}\sin(nt).$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n^2}{n^2-1} \sim \dfrac{n^2}{n^2} \sim 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t) = \sin(t)$. De plus, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \left|\frac{n}{n^2-1}\sin(nt)\right| \leqslant \frac{n}{n^2-1}\,|\sin(nt)| \leqslant \frac{n}{n^2-1}.$$

Or, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n}{n^2-1} \sim \dfrac{n}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{n}{n^2-1}\sin(nt)\right| = 0$ et donc, par propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2-1}\sin(nt) = 0$.

Par somme de limite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = \sin(t)}$.

Sujet 14. Étude d'une suite définie implicitement II (O2)

On considère l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \mathrm{e}^x \end{array}.$$

Définition de la suite (u_n)

1. Dresser le tableau de variations de l'application f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

Dans toute la suite, on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la solution de l'équation $f(x) = n$. On définit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Conjecture sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et représenter sur le graphique les premiers termes de la suite (u_n). (On pourra s'aider pour le tracé d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique.)

4. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

Étude mathématique de la suite (u_n)

5. Étudier les variations de la suite (u_n).

6. En déduire que la suite (u_n) a une limite que l'on déterminera.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ln(n)$.

8. Montrer que $\mathrm{e}^{u_n} \sim n$.

9. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

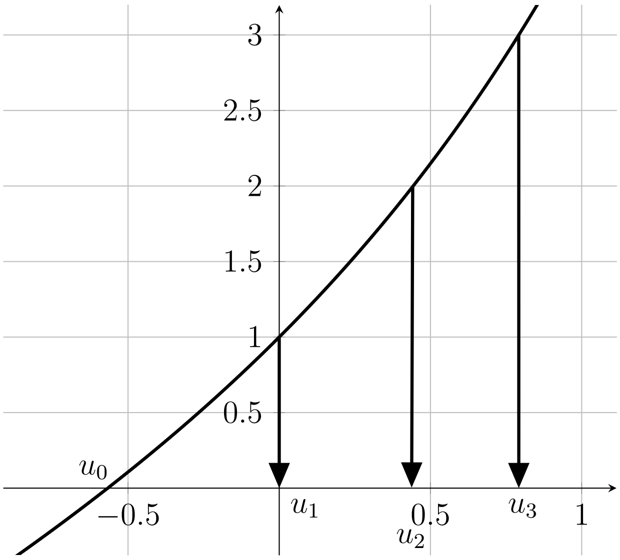
   De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

   On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$+\infty$

2. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'équation } f(x) = n \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}}$.

3. À l'aide de GeoGebra, on obtient l'allure suivante :



4. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$ donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$. Comme f est croissante, on en déduit que que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

6. Comme (u_n) est croissante, elle admet une limite (finie ou infinie) d'après le théorème des suites monotones. Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$. En particulier, $(f(u_n))$ converge. Or, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = n$ donc la suite $(f(u_n))$ diverge vers $+\infty$. C'est absurde donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $f(u_n) = n$ et $f(\ln(n)) = \ln(n) + e^{\ln(n)} = \ln(n) + n$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(n) \geqslant 0$ donc $f(\ln(n)) \geqslant n$ i.e. $f(\ln(n)) \geqslant f(u_n)$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln(n) \geqslant u_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \ln(n)}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = n$ i.e. $u_n + e^{u_n} = n$ donc $e^{u_n} = n - u_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{u_n}}{n} = 1 - \dfrac{u_n}{n}$. Or, par croissance de (u_n) et d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = u_1 \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$ donc, en divisant par $n > 0$, $0 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$. Par différence, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{u_n}}{n} = 1$ donc $\boxed{e^{u_n} \sim n}$.

9. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{u_n}}{n} = 1$. De plus, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^{u_n}}{n}\right) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{e^{u_n}}{n}\right) = \ln(e^{u_n}) - \ln(n) = u_n - \ln(n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{\ln(n)} - 1 = \frac{u_n - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(\frac{e^{u_n}}{n})}{\ln(n)}.$$

Par quotient de limites, on en déduit que $\dfrac{u_n}{\ln(n)} - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et ainsi $\boxed{u_n \sim \ln(n)}$.

Sujet 15. Autour de la moyenne d'un nombre et de son inverse (O2)

Partie 1. Étude d'une fonction d'une variable

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est impaire.

2. Dresser le tableau de variation complet de f.

3. La fonction f admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}^*$?

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?

5. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right).$$

Démontrer que $\mathscr{C}$ possède en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

Partie 2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right). \end{cases}$$

1. Calculer les premières valeurs de la suite (u_n), à la main ou avec un logiciel de votre choix.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n), ainsi que sa limite éventuelle.

2. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. En ayant recours à la fonction f, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie 3. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

1. Donner les deux dérivées partielles de g.

2. En quels points la fonction g peut-elle admettre un extremum local ?

3. **a.** Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$g(x, y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

b. En déduire que g présente un extremum local en $(1, 1)$.

4. Démontrer que la fonction g ne présente pas d'extremum local en $(-1, -1)$.

Solution.

Partie 1

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0 et, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{1}{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(-x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x \neq 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[-1\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right]$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

3. D'après le tableau, $\boxed{\text{l'axe des ordonnées est asymptote verticale à } \mathscr{C}}$. En revanche, $\mathscr{C}$ ne possède pas d'asymptote horizontale.

4. On en déduit que la fonction f ne possède pas d'extremums globaux sur $\mathbb{R}^*$. En revanche, elle possède deux extremums locaux : $\boxed{\text{un maximum local égale à 0 atteint en } -1}$ et $\boxed{\text{un maximum local égale à 1 atteint en 1}}$.

5. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2x}$ donc $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{2x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ donc, par définition, $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty}$.

Partie 2.

1. On calcule les premières valeurs de (u_n) à l'aide de la fonction Python suivante :

```python
def suite(n):
  u = 2
  for i in range(n):
    u = 1/2*(u + 1/u)
  return u
```

On peut conjecturer que (u_n) est décroissante et converge (très vite !) vers 1.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

Initialisation. Par définition, u_0 existe et $u_0 = 2 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n > 0$ donc u_n et $\dfrac{1}{u_n}$ existent et ainsi u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, $\dfrac{1}{u_n} > 0$ donc, par somme, $u_{n+1} > 0$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et strictement positive}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $u_n = 2 \geqslant 1$. Sinon, $n > 0$ donc $u_n = f(u_{n-1})$. Or, d'après la question précédente, $u_{n-1} > 0$ et, d'après la **Partie 1.**, sur $]0\,;+\infty[$, f est minorée par 1 donc $f(u_{n-1}) \geqslant 1$. Ainsi, $u_n \geqslant 1$.

Le résultat est montré dans tous les cas donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{1 - u_n}{2u_n} \leqslant 0$$

car $u_n \geqslant 1$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

5. Comme (u_n) est décroissante et minorée par 1, (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$ d'après le théorème de la limite monotone. Alors, $\ell \neq 0$ donc $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$ et ainsi, par somme de limites, $u_n + \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \dfrac{1}{\ell}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{1}{\ell}\right)$. Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{1}{\ell}\right)$ i.e. $2\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ donc $\ell = \dfrac{1}{\ell}$ et finalement $\ell^2 = 1$. Comme $\ell > 0$, on conclut que $\ell = 1$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

Partie 3.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(1+y)\left[-\frac{1}{x^2}(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 1\right] = \frac{1}{2}(1+y)\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

donc

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(1+y)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right)}.$$

Les variables x et y ayant un rôle symétrique, on a de même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(1+x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right)}.$$

2. Si f admet un extremum local en $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ alors (x, y) est un point critique de f. Or,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1+y)\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0 \\ \dfrac{1}{2}(1+x)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+y = 0 \text{ ou } \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ 1+x = 0 \text{ ou } \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -1 \text{ ou } y = x^2 \\ x = -1 \text{ ou } x = y^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Or, comme $x \neq 0$,

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ 1 = x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de g sont $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ et $(1, 1)$.

Dès lors, $\boxed{g \text{ ne peut présenter un extremum local qu'en } (-1, -1), (1, -1), (-1, 1) \text{ et } (1, 1)}$.

3. a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + y + x + xy) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x} + 1 + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{g(x, y) = 1 + f(x) + f(y) + f(\tfrac{x}{y})}$.

b. On a vu dans la **Partie 1.** que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 1$ donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 1$, $f(y) \geqslant 1$ et $f(\frac{x}{y}) \geqslant 1$ de sorte que $g(x, y) \geqslant 4$. Or, $g(1, 1) = \dfrac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1) = 4$ donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $g(x, y) \geqslant g(1, 1)$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ présente un minimum local en } (1, 1)}$.

4. L'image de $(-1, -1)$ par g est $g(-1, -1) = 0$. Soit h un réel appartenant à $]-1\,;1[$ de sorte que $-1 + h < 0$ et $-1 - h < 0$. Alors,

$$g(-1 + h, -1 + h) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1+h} + \frac{1}{-1+h}\right)(1 - 1 + h)(1 - 1 + h) = \frac{h^2}{-1+h} < 0$$

car $h^2 > 0$ et $-1+h < 0$ et

$$
\begin{aligned}
g(-1+h,-1-h) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1+h}+\frac{1}{-1-h}\right)(1-1+h)(1-1-h) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(-1-h)+(-1+h)}{(-1+h)(-1-h)}(-h^2) = \frac{h^2}{1-h^2} > 0
\end{aligned}
$$

car $|h| < 1$ donc $1-h^2 > 0$.

Ainsi, dans tout voisinage de $(-1,-1)$, il existe des points (a,b) tels que $g(a,b) < g(-1,-1)$ et des points (a,b) tels que $g(a,b) > g(-1,-1)$ donc $\underline{g \text{ ne présente pas d'extremum local en } (-1,-1)}$.

Remarque On a $g(1,-1) = g(-1,1) = 0$. De plus, si $h \in \,]-1\,;1[$ de sorte que $-1+h < 0$ alors

$$
g(1,-1+h) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{-1+h}\right)\times 2\times(1-1+h) = \frac{-1+h+1}{-1+h}\times h = \frac{h}{-1+h}
$$

qui est du signe opposé de h car $-1+h<0$ donc dans tout voisinage de $(1,-1)$, il existe des points dont les images sont supérieures à $g(1,-1)$ et des points dont les images sont inférieures à $g(1,-1)$. Ainsi, g ne présente pas d'extremum en $(-1,1)$. En échangeant le rôle de x et y, on conclut de même que g ne présente pas d'extremum en $(1,-1)$. Ainsi, le seul extremum de g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est 4 atteint en $(1,1)$.

Sujet 16. Étude d'une suite définie par une intégrale (O2)

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n sous la forme d'une intégrale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Encadrer la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. À l'aide des questions précédentes, montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{3}{2}\ln(2)$.

6. **a.** Écrire en Python une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui renvoie la valeur de S_n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 1{,}0397$.

Solution.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{(\frac{1}{3})^{2k+1}}{2k+1} - \frac{0^{2k+1}}{2k+1}$$

i.e. $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \times \frac{1}{3} \times 3 = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$$

donc, d'après la question précédente,

$$S_n = 3\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$S_n = 3\int_0^{\frac{1}{3}}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(t^2)^k = \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

3. a. Soit $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$. Alors, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ donc, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{1}{9}$. Ainsi, $-\frac{1}{9} \leqslant -t^2 \leqslant 0$ donc $\frac{8}{9} \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 \leqslant \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{9}{8}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right],\ 1 \leqslant \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{9}{8}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, en multipliant l'inégalité précédente par $t^{2n+2} \geqslant 0$, il vient

$$t^{2n+2} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \leqslant \frac{9}{8}t^{2n+2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{8} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant \frac{9}{8}\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$$

D'après le résultat de la question 1,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{3}} t^{2(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Par le théorème d'encadrement, on conclut donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

4. a. Soit a et b deux réels. Alors, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$,

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t)+b(1-t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{(a-b)t+a+b}{1-t^2}$$

donc, pour que l'égalité voulue soit réalisée, il suffit que $a-b=0$ et $a+b=1$ i.e. $a=b$ et $2a=1$ soit $a=b=\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right],\ \frac{1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}}$.

b. Par linéarité de l'intégrale, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

soit, finalement,

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2)}.$$

5. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2} - \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 3 \times \frac{1}{2}\ln(2) - 3I_n.$$

Or, on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{2}\ln(2)$. Comme (S_n) est la suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, on en déduit que la série $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}\ln(2)}$.

6. a. La fonction suivante convient.

```python
def somme(n):
  S = 0
  for k in range(n+1):
    S += 1/(2*k+1)*(1/3)**(2*k)
return S
```

7. On peut adapter la fonction précédente de la manière suivante.

```python
def seuil():
  S = 1
  n = 0
    while S <= 1.0397:
    n += 1
    S += 1/(2*n+1)*(1/3)**(2*n)
  return n
```

On obtient $\boxed{n = 3}$ (ce qui illustre une convergence très rapide de la série).

Sujet 17. Modélisation d'une population de cerfs (O2)

Soit μ et K deux réels strictement positifs. On considère la fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}.$$

On considère également la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $x_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

1. Étude de la fonction f

- **a.** Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
- **b.** Justifier que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer f'.
- **c.** Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$. On y fera apparaître la limite de f en $+\infty$.
- **d.** Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- **a.** Quelle information nous apporte le résultat de la question **1.a.** concernant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- **b.** On suppose dans cette question que $x_0 \leqslant \frac{K}{\mu}$.
  - i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$.
  - ii. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  - iii. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **c.** Que se passe-t-il si $x_0 > \frac{K}{\mu}$?

3. Application

On étudie l'évolution de la population de cerfs dans une forêt. On suppose qu'au début de chaque année d'observation $n \in \mathbb{N}$, le nombre de cerfs vivant dans cette forêt est donné par x_n.

- **a.** On suppose ici que $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 2$.
  Que peut-on dire de l'évolution de la population de cerfs de cette forêt au fil des ans ?
- **b.** Même question lorsque $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 20$.
- **c.** Même question lorsque $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 200$.

Solution.

1. **Étude de la fonction f**

a. Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} = x \iff x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} - x = 0 \iff x\left(\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} - 1\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} = 1 \iff x = 0 \text{ ou } 1 - \frac{\mu}{K}x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{K}{\mu} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = x \text{ est } \left\{0\,;\frac{K}{\mu}\right\}}$.

b. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} + x \times \left(-\frac{\mu}{K}\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}\right)$$

donc $\boxed{f'(x) = \left(1 - \frac{\mu}{K}x\right)\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}}$.

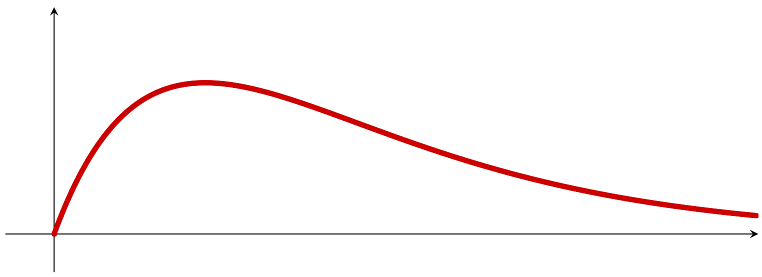
c. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positive, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - \frac{\mu}{K}x$. Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[0\,;\frac{K}{\mu}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[\frac{K}{\mu}\,;+\infty\right[$. On en déduit donc que f est croissante sur $\left[0\,;\frac{K}{\mu}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{K}{\mu}\,;+\infty\right[$.

De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = e \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{\mu}{K}x}}$. Or, comme $\frac{\mu}{K} > 0$, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mu}{K}x}}{x} = +\infty$ donc, par inverse et produit par une constante, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	0	$\frac{K}{\mu}$	$+\infty$
Variations de f	0 ↗	$\frac{K}{\mu}$	↘ 0

d. On obtient une courbe dont l'allure est la suivante.



2. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a. Si (x_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+$ alors (x_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Or, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$ donc, par unicité de la limite de (x_{n+1}), $f(\ell) = \ell$.

Ainsi, d'après la question **1.a.**, $\boxed{\text{si } (x_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{K}{\mu}}$.

b. i. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$ ».

Initialisation. Par hypothèse, $x_0 > 0$ et $x_0 \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$ et, comme f est croissante sur $\left[0\,;\frac{K}{\mu}\right]$, $f(0) \leqslant f(x_n) \leqslant f(\frac{K}{\mu})$ i.e. $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}}.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc, comme $\frac{\mu}{K} > 0$, $\frac{\mu}{K}x_n \leqslant 1$ et ainsi $1 - \frac{\mu}{K}x_n \geqslant 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x_n} \geqslant 1$ donc, en multipliant par $x_n \geqslant 0$, $x_n\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x_n} \geqslant x_n$ i.e. $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$.

iii. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{K}{\mu}$ donc elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de la limite monotone. De plus, comme (x_n) est à valeurs positives, $\ell \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après la question **2.a.**, ℓ vaut 0 ou $\frac{K}{\mu}$. Or, comme (x_n) est croissante, elle est minorée par $x_0 > 0$ donc $\ell \geqslant x_0 > 0$. Ainsi, $\ell \neq 0$ donc $\ell = \frac{K}{\mu}$.

On conclut donc que $\boxed{(x_n) \text{ converge et que } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{K}{\mu}}$.

c. Si $x_0 > \frac{K}{\mu}$ alors, d'après l'étude de f, $x_1 = f(x_0) \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc, d'après ce qui précède, la suite (x_{n+1}) (dont le premier terme est x_1 et qui vérifie la même relation de récurrence que (x_n)) et croissante et converge vers $\frac{K}{\mu}$.

Dès lors, $\boxed{(x_n) \text{ est croissante à partir du rang 1 et converge vers } \frac{K}{\mu}}$.

3. Application

a. Ici, $\frac{K}{\mu} = 50 \geqslant x_0$ donc la population de cerfs va croire et tendre vers 50.

b. Ici, $\frac{K}{\mu} = 5 \leqslant x_0$ donc la population de cerfs va décroître la première année puis croître et tendre vers 5. (Remarque. Dans ce cas, $f(x_0) \approx 1$ donc on imagine que des individus extérieurs à la forêt vont y venir durant l'année 1...)

c. Dans ce cas, $\frac{K}{\mu} = 0{,}5 < 1$ donc la population de cerfs s'éteint dès la première année.

Sujet 18. Modèles de Maltus et de Verhulst (O2)

Nous allons étudier deux modèles utilisés pour décrire l'évolution d'une population.

Partie I. Modèle de Maltus

Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$:

$$(E_1) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad y'(t) = ay(t).$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

2. Soit $y_0 > 0$. Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

3. Soit y la solution de (E_1) déterminée dans la question **2.**.

a. Déterminer, si elle existe, la limite de y en $+\infty$.

b. Déterminer une fonction g telle que $t \longmapsto g(y(t))$ soit une fonction affine dont on exprimera les coefficients en fonction de a et de y_0.

Partie II. Modèle de Verhulst

Soit $r > 0$ et $K > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$:

$$(E_2) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

On cherchera uniquement les solutions de (E_2) à valeurs dans $]0\,;K[$ c'est-à-dire les solutions y telles que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < y(t) < K$.

1. Soit $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$ une fonction à valeurs dans $]0\,;K[$. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on pose $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$. Montrer que y est solution de (E_2) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$(E_3) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad z'(t) = -rz(t) + \frac{r}{K}.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_3).

3. Soit $y_0 \in\,]0\,;K[$. Déterminer la solution de (E_2) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

4. Soit y la solution de (E_2) déterminée dans la question **3.**.

a. Déterminer, si elle existe, la limite de y en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction $h : t \longmapsto \ln\left(\frac{y(t)}{K-y(t)}\right)$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est une fonction affine sur $[0\,;+\infty[$ dont on exprimera les coefficients en fonction de r, K et y_0.

Partie III. Application et identification de modèles

On observe empiriquement l'évolution de la croissance de bactéries *Lactobacillus*.

temps (heures)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (UFC.mL^{-1})	0,52	0,83	1,37	2,29	3,71	6,11	10,06

On observe empiriquement l'évolution de la croissance du nombre de plants d'algues *Fucus serratus*.

temps (jours)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (en milliers)	0,12	0,73	3,54	8,03	9,68	9,97	10,04

Les modèles étudiés ci-dessus pourraient-ils décrire l'évolution de la croissance des bactéries *Lactobacillus* ou des algues *Fucus serratus* ?

Dans chaque cas, quel modèle correspondrait alors le mieux ?

Solution.

Partie I. Modèle de Malthus

1. L'équation (E_1) est équivalente à

$$\forall t \in [0\,;+\infty[\quad y'(t) - ay(t) = 0$$

donc, par théorème, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{t \longmapsto C\mathrm{e}^{at} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.

2. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$. Alors,

$$f(0) = y_0 \iff C\mathrm{e}^0 = y_0 \iff C = y_0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E_1) \text{ telle que } y(0) = y_0 \text{ est } t \longmapsto y_0\mathrm{e}^{at}}$.

3. a. Comme $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} at = +\infty$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{at} = +\infty$. Comme $y_0 > 0$, on en déduit, par produit, que $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty}$.

b. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) > 0$ car $y_0 > 0$ et $\ln(y(t)) = \ln(y_0\mathrm{e}^{at}) = \ln(y_0) + \ln(\mathrm{e}^{at}) = \ln(y_0) + at$ donc $\boxed{t \longmapsto \ln(y(t)) \text{ est une fonction affine}}$ dont le coefficient directeur est a et l'ordonnée à l'origine est $\ln(y_0)$.

Partie II. Modèle de Verhulst

1. Comme y ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$, z est bien définie sur $[0\,;+\infty[$ et, comme y est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, z l'est aussi et, pour tout réel $t \geqslant 0$, $z'(t) = -\dfrac{y'(t)}{y(t)^2}$. Ainsi, z est solution de (E_3) si et seulement si, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$-\frac{y'(t)}{y(t)^2} = -r \times \frac{1}{y(t)} + \frac{r}{K}$$

ce qui équivaut, en multipliant par $-y(t)^2 \neq 0$, à

$$y'(t) = ry(t) - \frac{r}{K}y(t)^2$$

i.e.

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

Ainsi, on a montré que $\boxed{z \text{ est solution de } (E_3) \text{ si et seulement si } y \text{ est solution de } (E_2)}$.

2. L'équation (E_3) est équivalente à : pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $z'(t) + rz(t) = \dfrac{r}{K}$. L'équation homogène associée est (H) : pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $z'(t) + rz(t) = 0$. L'ensemble des solutions de (H) est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-rt} \mid C \in \mathbb{R}\}$

On cherche une solution particulière de (E_3) soit la forme d'une fonction constante $h : t \longmapsto a$ où $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $h'(t) + rh(t) = 0 + ra = ra$ donc, pour que h

soit solution de (E_3), il suffit que $ra = \dfrac{r}{K}$ i.e. que $a = \dfrac{1}{K}$. Ainsi, $h : t \longmapsto \dfrac{1}{K}$ est une solution particulière de (E_3).

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{ t \longmapsto C\mathrm{e}^{-rt} + \dfrac{1}{K} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$.

3. Une fonction y est solution de (E_2) si et seulement si $\dfrac{1}{y}$ est solution de (E_3) ce qui équivaut à dire qu'il existe une réel C tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{y(t)} = C\mathrm{e}^{-rt} + \dfrac{1}{K} = \dfrac{CK\mathrm{e}^{-rt}+1}{K}$. Ainsi, y est solution de (E_2) si et seulement s'il existe un réel C tel que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) = \dfrac{K}{CK\mathrm{e}^{-rt}+1}$. De plus, on a alors $y(0) = \dfrac{K}{CK+1}$ donc

$$y(0) = y_0 \iff \frac{K}{CK+1} = y_0 \iff \frac{K}{y_0} = CK+1 \iff CK = \frac{K}{y_0} - 1 \iff C = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}.$$

Ainsi, $y(0) = y_0$ si et seulement si $C = \dfrac{K-y_0}{Ky_0}$ donc la solution de (E_2) telle que $y(0) = y_0$ est $y : t \longmapsto \dfrac{K}{\frac{K-y_0}{y_0}\mathrm{e}^{-rt}+1}$ soit encore

$$\boxed{y : t \longmapsto \frac{Ky_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}+y_0}}.$$

Remarque : en toute rigueur, il faudrait vérifier que la fonction obtenue est bien à valeur dans $]0\,;K[$. C'est relativement clair car $K > y_0$ donc, d'une part, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$ et, d'autre part, pour tout réel $t \geqslant 0$, $(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt} > 0$ donc $(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}+y_0 > y_0$ donc $y(t) < K$.

4. a. Comme $r > 0$, par le même raisonnement que dans la question **3.a.**, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$ donc, par produit, somme et quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = K}$.

b. Remarquons que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < y(t) < K$ donc $\frac{y(t)}{K-y(t)} > 0$. Ainsi, h est bien définie sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{K-y(t)} &= \frac{Ky_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{rt}+y_0} \times \frac{1}{K - \frac{Ky_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{rt}+y_0}}\\ &= \frac{Ky_0}{K(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}+Ky_0-Ky_0}\\ &= \frac{y_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}} = \frac{y_0}{K-y_0}\mathrm{e}^{rt}\end{aligned}$$

donc, pour tout réel $t \geqslant 0$, $h(t) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K-y_0}\mathrm{e}^{rt}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K-y_0}\right) + \ln(\mathrm{e}^{rt})$ soit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad h(t) = rt + \ln\left(\frac{y_0}{K-y_0}\right)}.$$

Partie III. Application et identification de modèles

temps (heures)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (UFC.mL^{-1})	0,52	0,83	1,37	2,29	3,71	6,11	10,06
ln(quantité)	$-0{,}65$	$-0{,}19$	0,31	0,83	1,31	1,81	2,31

On constate que le logarithme népérien de la quantité de bactéries a une croissance linéaire avec un taux d'accroissement d'environ 0,25 donc on peut modéliser l'évolution par le modèle de Malthus avec $a = 0{,}25$. Ainsi, on obtient que la population à l'instant t est modélisée par le fonction $y : t \longmapsto 0{,}52\mathrm{e}^{0{,}25t}$.

temps (jours)	0	2	4	6	8	10
quantité (en milliers)	0,12	0,73	3,54	8,03	9,68	9,97
ln(quantité/(1 − quantité))	$-4{,}41$	$-2{,}54$	$-0{,}6$	1.41	3,41	5,8

La population semble se stabiliser autour de $K = 10$. On constate que le logarithme népérien de la quantité divisée par 10 moins la quantité a un croissance relativement linéaire avec un taux d'accroissement d'environ 1 donc on peut modéliser l'évolution par le modèle de Verhulst avec $r = 1$. Ainsi, on obtient que la population à l'instant t est modélisée par la fonction $y : t \longmapsto \dfrac{1{,}2}{9{,}88\mathrm{e}^{-t} + 0{,}12}$.

Sujet 19. Racine carrée itérée (O2)

Soit t un réel strictement positif. On considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = t \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}. \end{cases}$$

1. **a.** Déterminer le signe de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - x$.

b. On suppose que $t = 2$.
À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, déterminer des valeurs approchées des premiers termes de la suite (x_n).

c. On suppose que $t > 1$.

i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.

ii. En déduire que la suite (x_n) converge et donner sa limite.

d. Que se passe-t-il si $0 < t < 1$?

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(x_n - 1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{x_n} = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)$$

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2^n\left(\sqrt{x_n} - 1\right)^2$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b. Déterminer, de même, le sens de variation de la suite (v_n).

c. On suppose que $t > 1$.

i. Démontrer que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

ii. En déduire que la suite (v_n) converge également vers L.

d. Que se passe-t-il si $0 < t < 1$?

3. *Question complémentaire, non posée à l'oral*
On suppose $t \neq 1$.

a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = t^{\frac{1}{2^n}}.$$

b. Démontrer que $x_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{2^n}$.

c. En déduire la valeur de L.

Solution.

1. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$ donc le signe de $g(x)$ est le signe de $1 - \sqrt{x}$. Or, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{1}$ i.e. $\sqrt{x} \leqslant 1$ et, si $x \geqslant 1$ alors $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{1}$ i.e. $\sqrt{x} \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 - \sqrt{x} \leqslant 0$ et, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $1 - \sqrt{x} \leqslant 1$. On conclut que $\boxed{g(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [0\,;1] \text{ et } g(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [1\,;+\infty[}$.

b. À l'aide du code Python suivant :

```python
from math import sqrt

def suite(n):
  x=2
  for k in range(n):
      print(x)
      u=sqrt(x)
```

on obtient l'affichage des n premières valeurs de (x_n).
Par exemple, l'appel `suite(5)` donne

```
2
1.4142135623730951
1.189207115002721
1.0905077326652577
1.0442737824274138
```

c. i. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ ».
Initialisation. Comme $t > 1$, d'après la question **a.**, $g(t) \leqslant 0$ donc $\sqrt{t} \leqslant t$ i.e. $x_1 \leqslant x_0$. De plus, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, comme $t \geqslant 1$, $\sqrt{t} \geqslant \sqrt{1}$ i.e. $x_1 \geqslant 1$. Ainsi, $1 \leqslant x_1 \leqslant x_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $1 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{x_{n+1}} \leqslant \sqrt{x_n}$ i.e. $1 \leqslant x_{n+2} \leqslant x_{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n}.$$

ii. La question précédente montre que (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc, par le théorème de la limite monotone, (x_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ donc, d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$ et, d'autre part, comme la fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\ell}$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \sqrt{\ell}$. Par unicité de la limite de (x_{n+1}), on en déduit que $\ell = \sqrt{\ell}$. En élevant au carré, il s'ensuit que $\ell^2 = \ell$ puis, en divisant par $\ell \neq 0$ (puisque $\ell \geqslant 1$), on conclut que $\ell = 1$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1}$.

d. Si $0 < t < 1$ alors $1 \geqslant \sqrt{t} \geqslant t$ donc $x_0 \leqslant x_1 \leqslant$. Par le même raisonnement par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$ donc (x_n) est croissante et majorée par 1. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, (x_n) converge vers un réel ℓ et le même raisonnement que précédemment montre que $\ell = 1$. Ainsi, si $0 < t < 1$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_n - 1) = 2^n\left(2\left(\sqrt{x_n} - 1\right) - (x_n - 1)\right) \\ &= 2^n(-x_n + 2\sqrt{x_n} - 1) = -2^n(x^n - 2\sqrt{x_n} + 1) = -2^n\left(\sqrt{x_n}^2 - 2\sqrt{x_n} + 1\right) \end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{u_{n+1} - u_n = -2^n\left(\sqrt{x_n} - 1\right)^2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{n+1}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) - 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = 2^n\left(2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) - \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)\right) \\ &= 2^n\left(\frac{1}{x_n} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{x_n}} + 1\right) = 2^n\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^n - 2 \times \frac{1}{\sqrt{x_n}} + 1\right) \\ &= 2^n\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} - 1\right)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.

c. i. On a montré, dans la question **1.c.**i. que, lorsque $t > 1$, (x_n) est minorée par 1 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - 1 \geqslant 0$ et donc (u_n) est minorée par 0. Ainsi, (u_n) est décroissant et minorée par 0 donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } L \geqslant 0}$.

ii. On a vu que (x_n) converge vers 1 donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{L}{1} = L}$.

d. Si $0 < t < 1$, les calcules précédents s'appliquent de la même façon pour montrer que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante. De plus, dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n \leqslant 1$ donc $x_n - 1 \leqslant 0$ et ainsi, comme $2^n > 0$, $u_n \leqslant 0$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{x_n} \leqslant 0$ (puisque $u_n \leqslant 0$ et $x_n > 0$). Ainsi, (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers un réel L. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n v_n$ donc, comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L}$.

3. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $x_n = t^{\frac{1}{2^n}}$ ».

Initialisation. Comme $t^{\frac{1}{2^0}} = t^1 = t = x_0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $x_n = t^{\frac{1}{2^n}}$ donc

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} = x_n^{\frac{1}{2}} = \left(t^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = t^{\frac{1}{2^n}}}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - 1 = t^{\frac{1}{2^n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln(t)}{2^n}} - 1$ et, comme $2 > 1$, $\frac{\ln(t)}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc comme $\ln(t) \neq 0$ (car $t \neq 1$), par les équivalents usuels, $\boxed{x_n - 1 \sim \frac{\ln(t)}{2^n}}$.

c. Ainsi, $u_n = 2^n(x_n - 1) \sim 2^n \times \frac{\ln(t)}{2^n} \sim \ln(t)$ donc $u_n \sim \ln(t)$ et ainsi, par propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(t)$. On conclut donc que $\boxed{L = \ln(t)}$.

Sujets de probabilités : variables aléatoires discrètes à support fini

Sujet 20. Remplacement d'une boule noire par une boule blanche (C2)

Soit a un nombre entier naturel non nul. Une urne contient a boules blanches et a boules noires.

On pioche une boule de l'urne.

- Si elle est blanche, on la replace dans l'urne.
- Si elle est noire, on la remplace par une blanche.

On répète cette expérience.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'évènement « on obtient une boule blanche au i-ème tirage ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées au bout de n tirages.

1. Déterminer $X_1(\Omega)$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega)$.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = 0)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, a]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{a+k}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \frac{a-k+1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1).$$

5. Montrer que la suite $(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis convergente.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2a\mathbf{E}(X_n) = (2a-1)\mathbf{E}(X_{n-1}) + a$.

7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \mathbf{E}(X_n)$.

a. Montrer que la suite $(e_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

Solution.

1. Si on tire une boule blanche au premier tirage alors $X_1 = 0$ et, sinon, $X_1 = 1$. Ainsi, $\boxed{X_1(\Omega) = \{0\,;1\}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Au bout de n tirages, on a tiré entre 0 et $\min(n, a)$ boules noires donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, \min(n, a)]\!]}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(X_n = 0) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ donc, par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = 0) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1)\cdots\mathbf{P}(B_n \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, a]\!]$. L'évènement $(X_n = k)$ est réalisé si et seulement si on a tiré k boules noires lors des $n-1$ premiers tirages et on tire une boule blanche au n-ème tirage ou si on a tiré $k-1$ boules noires au cours des $n-1$ premiers tirages et on tire une boule noire au n-ième tirage. Autrement dit,

$$(X_n = k) = [(X_{n-1} = k) \cap B_n] \cup \left[(X_{n-1} = k-1) \cap \overline{B_n}\right]$$

donc, comme cette union est disjointe (puisque les deux évènements $(X_{n-1} = k)$ et $(X_{n-1} = k-1)$ sont incompatibles),

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\mathbf{P}(B_n \mid X_{n-1} = k) + \mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)\mathbf{P}(\overline{B_n} \mid X_{n-1} = k-1).$$

Or, si $(X_{n-1} = k)$ est réalisé alors on a tiré k boules noires au cours des $n-1$ premier tirage donc, au moment du n-ème tirage, l'urne contient $a+k$ boules blanches et, ainsi, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(B_n \mid X_{n-1} = k) = \frac{a+k}{2a}$. De même, si $(X_{n-1} = k-1)$ est réalisé alors on a tiré $k-1$ boules noires au cours des $n-1$ premier tirage donc, au moment du n-ème tirage, l'urne contient $a-(k-1)$ boules blanches et, ainsi, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(\overline{B_n} \mid X_{n-1} = k-1) = \frac{a-k+1}{2a}$.

On conclut donc que

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{a+k}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \frac{a-k+1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant ce qui précède avec $k = a$, on obtient

$$\mathbf{P}(X_n = a) = \mathbf{P}(X_{n-1} = a) + \frac{1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = a-1).$$

Or, $\frac{1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = a-1) \geqslant 0$ donc $\mathbf{P}(X_n = a) \geqslant \mathbf{P}(X_{n-1} = a)$. On conclut donc que la suite $\boxed{(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.
De plus, par définition d'une probabilité, $(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 donc, on déduit du théorème de la limite monotone que $\boxed{(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question **4.**, pour tout $k \in [\![1, a]\!]$,

$$2ak\mathbf{P}(X_n = k) = k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + k(a-k+1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{a} 2ak\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{a} \left[k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + k(a-k+1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)\right].$$

Par linéarité de la somme puis grâce au changement d'indice $j = k-1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 2a\sum_{k=1}^{a} k\mathbf{P}(X_n = k) &= \sum_{k=1}^{a} k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{k=1}^{a} k(a-k+1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{a} k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{j=0}^{a-1}(j+1)(a-j)\mathbf{P}(X_{n-1} = j) \end{aligned}$$

En remarquant que, dans les deux premières somme, le terme en $k = 0$ est nul et que, dans le troisième, le terme en $j = a$ est nul, on obtient

$$\begin{aligned} 2a\sum_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{a} k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{j=0}^{a}(j+1)(a-j)\mathbf{P}(X_{n-1} = j) \\ &= \sum_{k=0}^{a} \left[k(a+k) + (k+1)(a-k)\right]\mathbf{P}(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{a} \left[(2a-1)k + a\right]\mathbf{P}(X_{n-1} = k) \\ &= (2a-1)\sum_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + a\sum_{k=0}^{a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) \end{aligned}$$

Or, $X_n(\Omega)$ et $X_{n-1}(\Omega)$ sont tous les deux inclus dans $[\![0, a]\!]$ donc $\sum_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{E}(X_n)$, $\sum_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_{n-1} = k) = \mathbf{E}(X_{n-1})$ et $\sum_{k=0}^{a}\mathbf{P}(X_n = k) = 1$ donc on conclut que

$$\boxed{2a\mathbf{E}(X_n) = (2a-1)\mathbf{E}(X_{n-1}) + a.}$$

7. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question précédente,

$$e_{n+1} - a = \mathbf{E}(X_{n+1}) - a = \frac{2a-1}{2a}\mathbf{E}(X_n) + \frac{1}{2} - a = \frac{2a-1}{2a}e_n + \frac{a}{2a} - \frac{2a^2}{2a} = \frac{2a-1}{2a}(e_n - a).$$

Ainsi, $\boxed{(e_n - a)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{2a-1}{2a}}$.

b. Comme X_0 est une variable aléatoire certaine égale à 0, $e_0 = \mathbf{E}(X_0) = 0$ donc $e_0 - a = -a$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n - a = -a\left(\frac{2a-1}{2a}\right)^n$ donc $e_n = a - a\left(\frac{2a-1}{2a}\right)^n$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{E}(X_n) = a\left[1 - \left(\frac{2a-1}{2a}\right)^n\right]}.$$

Sujet 21. Germination de graines (C4)

On dispose de n pots, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On plante une graine dans chaque pot. Les germinations des graines sont indépendantes les unes des autres.

Pour chaque graine, la probabilité de germer est égale à p, avec $p \in]0\,;1[$.

Pour chaque graine, la probabilité de ne pas germer est donc égale à q, avec $q = 1 - p$.

1. On note X le nombre de graines ayant germé. Donner la loi de X et préciser, pour tout $i \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}(X = i)$.

2. Dans les pots où la graine n'a pas germé, on plante une nouvelle graine.
On note Y le nombre de nouvelles graines ayant germé.
Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y sachant $(X = i)$ et préciser, pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j)$.

3. On note Z le nombre total de graines ayant germé. Ainsi, $Z = X + Y$.

- **a.** Préciser $Z(\Omega)$ et exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ à l'aide des variables aléatoires X et Y.
- **b.** En déduire, pour tout $k \in Z(\Omega)$, une expression sous forme de somme de la probabilité $\mathbf{P}(Z = k)$.

4. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, k]\!]$,

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$$

5.
- **a.** Montrer que $1 - p(1+q) = q^2$.
- **b.** Soit $k \in Z(\Omega)$. Développer $(1+q)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{-i}$.
- **c.** Montrer que, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} p^k q^{2n-i-k}$.
- **d.** Montrer que Z suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

6. Déterminer l'espérance de Z et en donner une interprétation.

Solution.

1. Si on numérote les pots de 1 à n et si on note, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k la variable aléatoire égale à 1 si la graine du pot k germe et 0 sinon alors, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Comme les germinations sont indépendantes, les variables X_k sont mutuellement indépendantes. Or, $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}}$.

2. Si $(X = i)$ alors on a replanté $n - i$ graines et, par le même raisonnement que précédemment, la loi de Y sachant $(X = i)$ est la loi binomiale de paramètres $n - i$ et p.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0,n]\!] \text{ et tout } j \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j) = \binom{n-i}{j} p^j q^{n-i-j}}$.

3. a. Le nombre de graines qui ont germé est compris entre 0 et n donc $\boxed{Z(\Omega) = [\![0,n]\!]}$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Comme $((X = i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}(Z = k) = (Z = k) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} (X = i)\right) &= \bigcup_{i=0}^{n} (X = i) \cap (Z = k) \\ &= \bigcup_{i=0}^{n} (X = i) \cap (X + Y = k) \\ &= \bigcup_{i=0}^{n} (X = i) \cap (i + Y = k) \\ &= \bigcup_{i=0}^{n} (X = i) \cap (Y = k - i)\end{aligned}$$

De plus, si $k < i$ alors $(Y = k - i) = \varnothing$ donc, finalement,

$$\boxed{(Z = k) = \bigcup_{i=0}^{k} (X = i) \cap (Y = k - i)}.$$

Comme cette union est disjointe (car les évènement $(X = i)$ sont deux à deux incompatibles), on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}((X = i) \cap (Y = k - i)) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} q^{n-i-(k-i)}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} p^k q^{2n-k-i}}.$$

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et $i \in [\![0, k]\!]$. Alors,

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-i-(k-i))!} \times \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}$$

donc

$$\boxed{\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}}.$$

5. a. Comme $p = 1-q$, $1-p(1+q) = 1-(1-q)(1+q) = 1-(1-q^2) = 1-1+q^2$ donc $\boxed{1-p(1+q) = q^2}$.

b. D'après la formule du binôme de Newton, $(1+q)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}1^i q^{k-i}$ donc

$$\boxed{(1+q)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{k-i}}.$$

On en déduit que $(1+q)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^k q^{-i}$ donc, par linéarité de la somme, $(1+q)^k = q^k \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{-i}$ et ainsi

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{-i} = \frac{(1+q)^k}{q^k}}.$$

c. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On déduit des questions **3.b.** et **4.**,

$$\boxed{\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^k q^{2n-k-i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}p^k q^{2n-k-i}}$$

d. Par linéarité de la somme, on en déduit que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z=k) = \binom{n}{k}p^k q^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{-i}$$

donc, d'après la question **5.b.**, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z=k) = \binom{n}{k}p^k q^{2n-k}\frac{(1+q)^k}{q^k} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k q^{2n-2k} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k \left(q^2\right)^{n-k}.$$

Dès lors, d'après la question **5.a.**,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \binom{n}{k} (p(1+q))^k \, (1 - p(1+q))^{n-k} \, .$$

On conclut donc que $\boxed{Z \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p(1+q)}$.

6. Dès lors, $\boxed{\mathbf{E}(Z) = np(1+q)}$. Cette espérance représente le nombre moyen de graines qui germent.

Sujet 22. Le loueur de voiture (O1)

Un concessionnaire dispose de 2 voitures qu'il peut louer chaque jour, pour un prix de 30€. On définit les variables aléatoires suivantes :

- X est le nombre de clients qui veulent lui louer une voiture ;
- Y est le nombre de voitures qu'il loue ;
- G est le chiffre d'affaire qu'il réalise sur la journée.

1. On suppose dans cette question que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

a. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

b. Déterminer l'espérance et la variance de G.

c. Calculer le chiffre d'affaire réalisé en moyenne par le concessionnaire sur 30 jours.

2. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$.

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Solution.

1. a. Par définition, $Y(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$. De plus, $\{Y = 0\} = \{X = 0\}$ donc $\mathbf{P}(Y = 0) = \dfrac{1}{6}$, $\{Y = 1\} = \{X = 1\}$ donc $\mathbf{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $\{Y = 2\} = \{X \geqslant 2\}$ donc, comme les évènements $\{X = 2\}$ et $\{X = 3\}$ sont incompatibles, $\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{12}$.

Ainsi, on peut résumer la loi de Y dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y = k)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{7}{12}$

.

Dès lors,

$$\mathbf{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{7}{12}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{17}{12}}$.

Enfin,

$$\mathbf{E}(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{7}{12} = \frac{31}{12}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{31}{12} - \left(\frac{17}{12}\right)^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(Y) = \dfrac{83}{144}}$.

b. Par définition, $G = 30Y$ donc, par linéarité de l'espérance $\mathbf{E}(G) = 30\mathbf{E}(Y) = 30 \times \dfrac{17}{12}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(G) = \dfrac{85}{2}}$.

Par propriété, $\mathbf{V}(G) = 30^2\mathbf{V}(G) = 900\mathbf{V}(G) = 900 \times \dfrac{83}{144}$ soit $\boxed{\mathbf{V}(G) = \dfrac{2075}{4}}$.

c. Si on note, pour tout $i \in [\![1, 30]\!]$, G_i le chiffre d'affaire réalisé le jour i alors le chiffre d'affaire total sur 30 jours est $T = G_1 + G_2 + \cdots + G_{30}$. Par linéarité de la moyenne, on en déduit que le chiffre d'affaire moyen sur 30 jours est $\mathbf{E}(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{30} \mathbf{E}(G_i)$. Or, chaque G_i a la même loi que G donc $\mathbf{E}(T) = 30\mathbf{E}(G)$ i.e. $\mathbf{E}(T) = 1275$. Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du concessionnaire sur 30 jours est 1275€}}$.

2. a. De même, $\mathbf{P}(Y=0)=\mathbf{P}(X=0)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$ et $\mathbf{P}(Y=1)=\mathbf{P}(X=1)=\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$. Enfin, $\mathbf{P}(Y=2)=1-\mathbf{P}(Y=0)-\mathbf{P}(Y=1)=\frac{57}{64}$.

Ainsi, on peut résumer la loi de Y par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y=k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{57}{64}$

.

Ainsi,

$$\mathbf{E}(Y)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{3}{32}+2\times\frac{57}{64}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y)=\frac{15}{8}}$.

De plus,

$$\mathbf{E}(Y^2)=0^2\times\frac{1}{64}+1^2\times\frac{3}{32}+2^2\times\frac{57}{64}=\frac{117}{32}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y)=\mathbf{E}(Y^2)-\mathbf{E}(Y)^2=\frac{117}{32}-\left(\frac{15}{8}\right)^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(Y)=\frac{9}{64}}$

b. On en déduit que $\mathbf{E}(G)=30\times\frac{15}{8}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(G)=\frac{225}{4}}$ et $\mathbf{V}(G)=900\times\frac{9}{64}$ soit $\boxed{\mathbf{V}(G)=\frac{2025}{16}}$.

c. Avec les mêmes notations que précédemment, $\mathbf{E}(T)=30\mathbf{E}(G)$ i.e. $\mathbf{E}(T)=\frac{3375}{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du concessionnaire sur 30 jours est 1687,50€}}$.

3. a. De même, $\mathbf{P}(Y=0)=\mathbf{P}(X=0)=\frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$ et $\mathbf{P}(Y=1)=\frac{2^1}{1!}\mathrm{e}^{-2}=2\mathrm{e}^{-2}$. Enfin, $\mathbf{P}(Y=2)=1-\mathbf{P}(Y=0)-\mathbf{P}(Y=1)=1-3\mathrm{e}^{-2}$.

Ainsi, on peut résumer la loi de Y par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y=k)$	e^{-2}	$2\mathrm{e}^{-2}$	$1-3\mathrm{e}^{-2}$

.

Ainsi,

$$\mathbf{E}(Y) = 0 \times \mathrm{e}^{-2} + 1 \times 2\mathrm{e}^{-2} + 2 \times (1 - 3\mathrm{e}^{-2})$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = 2 - 4\mathrm{e}^{-2}}$.

De plus,

$$\mathbf{E}(Y^2) = 0^2 \times \mathrm{e}^{-2} + 1^2 \times 2\mathrm{e}^{-2} + 2^2 \times (1 - 3\mathrm{e}^{-2}) = 4 - 10\mathrm{e}^{-2}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = 4 - 10\mathrm{e}^{-2} - \left(2 - 4\mathrm{e}^{-2}\right)^2 \\ &= 4 - 10\mathrm{e}^{-2} - (4 - 16\mathrm{e}^{-2} + 16e^{-4})\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{V}(Y) = 6\mathrm{e}^{-2} - 16\mathrm{e}^{-4}}$.

b. On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(G) = 30(2 - 4\mathrm{e}^{-2})}$ et $\boxed{\mathbf{V}(G) = 900(6\mathrm{e}^{-2} - 16\mathrm{e}^{-4})}$.

c. Avec les mêmes notations que précédemment, $\mathbf{E}(T) = 30\mathbf{E}(G) = 30(60 - 120\mathrm{e}^{-2})$. Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du concessionnaire sur 30 jours est environ 1312,79€}}$.

Sujet 23. Division cellulaire (O1)

Dans tout l'exercice, p désigne un réel appartenant à $]0\,;1[$.

Partie A. Étude d'une suite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - p + px^2$$

ainsi que la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}.$$

1. Étudier le sens de variations de la fonction f.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

3. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = \dfrac{1-p}{p}$.
Ranger ces deux solutions dans l'ordre croissant. *On discutera selon les valeurs de p.*

4. Montrer que si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors la suite (v_n) est croissante et converge vers un réel à déterminer.

5. Que se passe-t-il si $p > \dfrac{1}{2}$?

Partie B. Application

On considère des cellules pouvant

- soit se diviser en deux cellules filles, avec une probabilité égale à p ;
- soit mourir, avec une probabilité égale à $q = 1 - p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de cellules à la $n^{\text{ème}}$ génération.

On suppose que $X_0 = 1$ de façon certaine.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$.

a. Donner u_0 et u_1.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir, à partir du système complet d'événements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$, une relation entre u_n et u_{n+1}.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution.

Partie A. Étude d'une suite

1. La fonction f est une fonction polynomiale du second degré dont le coefficient dominant est $p > 0$ et qui atteint son minimum en $x_0 = \dfrac{0}{2p} = 0$. On en déduit donc que $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;0] \text{ et croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. $v_0 = 0 \in [0\,;1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(1)$. Or, $f(0) = 1 - p \geqslant 0$ car $p \leqslant 1$ et $f(1) = 1$ donc $0 \leqslant f(v_n) \leqslant 1$ i.e. $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) = x \iff 1 - p + px^2 = x \iff px^2 - x + 1 - p = 0$$

Le discriminant de $pX^2 - X + 1 - p = 0$ est $\Delta = (-1)^2 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2$. Ainsi, $pX^2 - X + 1 - p$ possède deux racines (non nécessairement distinctes) :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(1-2p)^2}}{2p} = \frac{1 - |1-2p|}{2p} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{(1-2p)^2}}{2p} = \frac{1 + |1-2p|}{2p}.$$

Si $1 - 2p \geqslant 0$, on obtient $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{1-p}{p}$ et si $1 - 2p \leqslant 0$, on obtient $x_1 = \dfrac{1-p}{p}$ et $x_2 = 1$.

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{f(x) = x \text{ si et seulement si } x = 1 \text{ ou } x = \dfrac{1-p}{p}}$.

Comme $x_2 - x_1 = \dfrac{|1-2p|}{p} \geqslant 0$, $x_2 \geqslant x_1$. Ainsi, si $1 - 2p \geqslant 0$ alors $\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1$ et si $1 - 2p \leqslant 0$ alors $\dfrac{1-p}{p} \leqslant 1$.

Autrement dit, $\boxed{\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1 \text{ si } p \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{1-p}{p} \leqslant 1 \text{ si } p \geqslant \dfrac{1}{2}}$.

4. Supposons que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1}$ ».

Initialisation. $v_0 = 0$ et $v_1 = 1 - p$ donc, comme $p \leqslant 1$, $v_1 \geqslant v_0$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(v_n) \leqslant f(v_{n+1})$ i.e. $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.

Dès lors, (v_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge vers une limite } \ell \leqslant 1}$.

Alors, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc, d'une part, $v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, d'autre part, par produit et somme, $1 - p + pv_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - p + p\ell^2$. Par unicité de la limite de (v_{n+1}), on en déduit que $\ell = 1 - p + \ell^2$ donc, d'après la question **3.**, $\ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{1-p}{p}$. Or, comme $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1$ donc, comme $\ell \leqslant 1$, $\boxed{\ell = 1}$.

5. Si $p > \dfrac{1}{2}$, (v_n) demeure croissante (car le raisonnement de la question précédente n'utilise pas le fait que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour montrer que (v_n) est croissante) donc, comme précédemment, (v_n) converge vers 1 ou vers $\dfrac{1-p}{p}$.

Montrons par récurrence que (v_n) est majorée par $\dfrac{1-p}{p}$.

Initialisation. $v_0 = 0 \leqslant \dfrac{1-p}{p}$ car $p \in]0\,;1[$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$. Alors, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(v_n) \leqslant f\left(\dfrac{1-p}{p}\right)$ i.e. $v_{n+1} \leqslant \dfrac{1-p}{p}$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$.

Dès lors, $\ell \leqslant \dfrac{1-p}{p} < 1$ donc $\boxed{\ell = \dfrac{1-p}{p}}$.

Partie B. Application

1. Comme l'évènement $(X_0 = 1)$ est un évènement certain, il y a initialement 1 seule cellule. Ainsi, $\boxed{X_1(\Omega) = \{0\,;2\},\ \mathbf{P}(X_1 = 0) = p \text{ et } \mathbf{P}(X_1 = 1) = p}$.

Dès lors, $\mathbf{E}(X_1) = 0 \times q + 2 \times p$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = 2p}$.

De plus, $\mathbf{E}(X_1^2) = 0^2 \times q + 2^2 \times p = 4p$ donc, par la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \mathbf{E}(X_1)^2 = 4p - (2p)^2 = 4p - 4p^2$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X) = 4p(1-p) = 4pq}$.

2. a. Comme $(X_0 = 1)$ est un évènement certain, $\boxed{u_0 = 0}$. De plus, on a vu précédemment que $\boxed{u_1 = q}$.

b. En utilisant la formule de probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2) \end{aligned}$$

Or, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 0) = 1$ et, s'il y a 2 cellules à la génération 1, la probabilité qu'il n'y en ait plus à la génération $n+1$ est la probabilité que la descendance de chacune de ces 2 cellules s'éteigne en au plus n générations. Or, pour chacun des deux cellules, la probabilité que leur descendance s'éteigne en au plus n générations est u_n donc, par indépendance, la probabilité qu'il n'y ait plus de cellules à la génération $n+1$ est u_n^2. Ainsi, $u_{n+1} = u_1 \times 1 + u_0 \times u_n^2 = q + pu_n^2$ soit $\boxed{u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2}$.

3. Par définition, $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. On déduit donc des résultats de la **Partie A** que

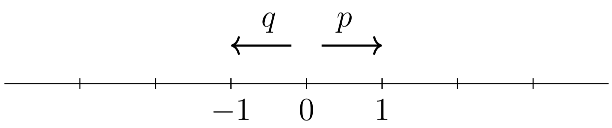
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-p}{p} & \text{si } p \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}}.$$

Sujet 24. Les cents pas (O1)

Un homme fait les cent pas.

Il se déplace sur un axe infini, gradué par pas de 1 de $-\infty$ à $+\infty$.

À chaque déplacement, il va vers la droite avec probabilité p ou vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$.



Initialement, l'homme est en 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de l'homme après n déplacements. En particulier, on a $X_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Y_n le nombre de pas vers la droite effectués après n déplacements.

1. Donner la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

2. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction de Y_n.

3. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

4. Déterminer la probabilité d'être revenu en 0 après n déplacements.

5. Déterminer la loi de X_n.

6. Dans cette question, on suppose que $p = \frac{1}{2}$ et $n = 2N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

a. Expliciter la loi de X_n dans ce cas.

b. Calculer $E(X_n)$ par deux méthodes :
— en utilisant le résultat de la question **3.** ;
— en utilisant la loi de X_n.

c. Exprimer de même $V(X_n)$ par deux méthodes, en déduire que :

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{2N}{N+k} = N4^{N-1}$$

Solution.

1. Les n déplacements constitue un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « L'homme se déplace vers la droite ». La variable aléatoire Y_n compte le nombre de succès donc $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$.

   Par propriété, $\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = np \text{ et } \mathbf{V}(Y_n) = npq}$.
2. L'homme fait n pas en tout dont Y_n vers la droite. Il fait donc $n - Y_n$ pas vers la gauche et sa position finale est donc $Y_n \times 1 + (n - Y_n) \times (-1)$ i.e. $\boxed{X_n = 2Y_n - n}$.
3. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(X_n) = 2\mathbf{E}(Y_n) - n = 2np - n$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = n(2p-1)}$.

   Par propriété de la variance, $\mathbf{V}(X_n) = 2^2\mathbf{V}(Y_n)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X_n) = 4npq}$.
4. Remarquons que

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(2Y_n - n = 0) = \mathbf{P}\left(Y_n = \frac{n}{2}\right).$$

   Or, Y_n est à valeurs entières donc si n est impair alors $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ donc $\mathbf{P}(X_n = 0) = 0$.

   De plus, si n est pair alors $\mathbf{P}(Y_n = \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{n-\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}}$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(X_n = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \binom{n}{\frac{n}{2}}(pq)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$.
5. Commençons par remarquer que $X_n(\Omega) = \{2k \mid k \in [\![-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]\!]\}$ si n est pair et $X_n(\Omega) = \{2k+1 \mid k \in [\![\frac{-n-1}{2}, \frac{n-1}{2}]\!]\}$ si n est impair. De plus,
   - si n est pair alors, pour tout $k \in [\![-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = 2k) = \mathbf{P}(2Y_n - n = 2k) = \mathbf{P}\left(Y_n = \frac{n}{2} + k\right) &= \binom{n}{\frac{n}{2}+k} p^{\frac{n}{2}+k} q^{\frac{n}{2}-k} \\ &= \binom{n}{\frac{n+2k}{2}} p^{\frac{n+2k}{2}} q^{\frac{n-2k}{2}} \end{aligned}$$

   - si n est impair alors, pour tout $k \in [\![\frac{-n-1}{2}, \frac{n-1}{2}]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = 2k+1) = \mathbf{P}(2Y_n - n = 2k+1) = \mathbf{P}\left(Y_n = \frac{n+1}{2} + k\right) &= \binom{n}{\frac{n+1}{2}+k} p^{\frac{n+1}{2}+k} q^{\frac{n-1}{2}-k} \\ &= \binom{n}{\frac{n+2k+1}{2}} p^{\frac{n+2k+1}{2}} q^{\frac{n-2k-1}{2}} \end{aligned}$$

   Ainsi, on peut remarquer que, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall j \in X_n(\Omega) \quad \mathbf{P}(X_n = j) = \binom{n}{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} q^{\frac{n-j}{2}}}.$$

6. a. Si $n = 2N$ alors n est pair donc $X_n(\Omega) = \{2k \mid k \in [\![-N, N]\!]\}$ et, pour tout $k \in [\![-N, N]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_n = 2k) = \binom{2N}{N+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} = \binom{2N}{N+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}.$$

b. D'après le résultat de la question **3.**, $\mathbf{E}(X_n) = n(2 \times \frac{1}{2} - 1)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = 0}$.

Par ailleurs, par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n) &= \sum_{k=-N}^{N} 2k\mathbf{P}(X_n = 2k) = \sum_{k=-N}^{N} 2k \times \binom{2N}{N+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-1}\left[\sum_{k=-N}^{-1} k\binom{2N}{N+k} + 0 + \sum_{k=1}^{N} k\binom{2N}{N+k}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-1}\left[\sum_{j=1}^{N}(-j)\binom{2N}{N-j} + \sum_{k=1}^{N} k\binom{2N}{N+k}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-1}\left[-\sum_{k=1}^{N} k\binom{2N}{N-k} + \sum_{k=1}^{N} k\binom{2N}{N+k}\right]
\end{aligned}$$

Or, par le principe de symétrie, pour tout $k \in [\![-N, N]\!]$,

$$\binom{2N}{N-k} = \binom{2N}{2N-(N-k)} = \binom{2N}{N+k}$$

donc finalement

$$\mathbf{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-1}\left[-\sum_{k=1}^{N} k\binom{2N}{N+k} + \sum_{k=1}^{N} k\binom{2N}{N+k}\right]$$

i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = 0}$.

c. D'après la question **3.**, $\mathbf{V}(X_n) = 4 \times 2N \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2N$. D'autre part, par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n^2) &= \sum_{k=-N}^{N} (2k)^2\mathbf{P}(X_n = 2k) = \sum_{k=-N}^{N} 4k^2 \times \binom{2N}{N+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \\
&= 4 \times \frac{1}{4^N}\left[\sum_{k=-N}^{-1} k^2\binom{2N}{N+k} + 0 + \sum_{k=1}^{N} k^2\binom{2N}{N+k}\right] \\
&= \frac{1}{4^{N-1}}\left[\sum_{j=1}^{N}(-j)^2\binom{2N}{N-j} + \sum_{k=1}^{N} k^2\binom{2N}{N+k}\right] \\
&= \frac{1}{4^{N-1}}\left[\sum_{k=1}^{N} k^2\binom{2N}{N+k} + \sum_{k=1}^{N} k^2\binom{2N}{N+k}\right] \\
&= \frac{2}{4^{N-1}}\sum_{k=1}^{N} k^2\binom{2N}{N+k}
\end{aligned}$$

Or, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}(X^2)$ donc

$$\frac{2}{4^{N-1}} \sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{2N}{N+k} = 2N$$

i.e.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{2N}{N+k} = N4^{N-1}}.$$

Sujet 25. Déplacement aléatoire sur un axe gradué (O1)

On déplace un objet sur un axe gradué de 0 à $+\infty$, selon le protocole suivant.
Initialement, l'objet est en 0.
À chaque tour, on lance un dé bien équilibré :
— si on obtient 5 ou 6, on avance l'objet d'une position ;
— sinon, on replace l'objet en 0.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de l'objet à l'issue n-ième tour.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance, sa variance.

2. Déterminer la loi de X_2, son espérance, sa variance.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{3}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbf{E}(X_n) - \frac{1}{2}$.

  a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

  b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

  c. Donner la limite de $\mathbf{E}(X_n)$ en $+\infty$.

Solution.

1. Commençons par remarquer que $X_1(\Omega) = \{0\,;1\}$. De plus, par équiprobabilité des faces, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ainsi, $\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{3}}$. Par suite, $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbf{V}(X_1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}}$.

2. Commençons par remarquer que $X_2(\Omega) = \{0;\,;1\,;2\}$.
Notons Y la variable aléatoire valant 1 si le second lancer de dés donne un chiffre supérieur ou égal à 5 et 0 sinon. Alors, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{3})$ donc

- $(X_2 = 0) = (Y \leqslant 0)$ donc $\mathbf{P}(X_2 = 0) = \frac{2}{3}$;
- $(X_2 = 1) = (X_1 = 0) \cap (Y = 1)$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9};$$

- $(X_2 = 2) = (X_1 = 1) \cap (Y = 1)$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Ainsi, $\mathbf{E}(X_2) = 0 \times \frac{2}{3} \times 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9}$ soit $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = \frac{4}{9}}$.
Enfin, par le théorème de transfert, $\mathbf{E}(X_2^2) = 0^2 \times \frac{2}{3} \times 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ donc, par la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(X_2) = \mathbf{E}(X_1^2) - \mathbf{E}(X_1)^2 = \frac{2}{3} - (\frac{4}{9})^2$ soit $\boxed{\mathbf{V}(X_2) = \frac{38}{81}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons Y_n la variable aléatoire égale à 1 si le n-ième lancer donne un résultat supérieur ou égal à 5 et 0 sinon. Là encore, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{3})$. De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(X_n = k) = (X_{n-1} = k - 1) \cap (Y_n = 1)$ donc, par indépendance des lancers, $\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(Y_n = 1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k - 1)$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{3}\mathbf{P}(X_{n-1} = k - 1)}$.

4. Avec les notations de la question précédente, $(X_n = 0) = (Y_n = 0)$ donc on conclut que $\boxed{\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(Y_n = 0) = \frac{2}{3}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3}\mathbf{P}(X_{n-1} = k - 1) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(j + 1)\mathbf{P}(X_{n-1} = j) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1} j\mathbf{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{P}(X_{n-1} = j).
\end{aligned}$$

Or, comme $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n - 1]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} j\mathbf{P}(X_{n-1} = j) = \mathbf{E}(X_{n-1})$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{P}(X_{n-1} = j) = 1$ donc on conclut que $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{3}}$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = \mathbf{E}(X_{n+1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_n) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_n) - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{E}(X_n) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}u_n.$$

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or, $u_0 = \mathbf{E}(X_0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbf{E}(X_n) - \frac{1}{2}$ donc $\mathbf{E}(X_n) = u_n + \frac{1}{2}$ et ainsi on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

c. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc, par produit et somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{2}}$.

Sujets de probabilités : variables aléatoires discrètes à support infini

Sujet 26. Traîne de la loi de Poisson (C1)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. a. Rappeler la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

b. Rappeler l'inégalité de Tchebychev et ses hypothèses.

c. Démontrer que $\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

d. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

2. Pour tout réel $t \geqslant 0$, si la série converge, on pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k$.

a. Vérifier que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

b. Exprimer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t)$ sous la forme d'une espérance.

c. Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses.

d. En déduire que, pour tout réel $t > 0$, $\mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}$.

e. Déterminer le minimum de la fonction $f : t \longmapsto t - 1 - 2\ln(t)$ sur $]0\,;+\infty[$.

f. Démontrer que, pour tous réels $t > 1$ et $x \geqslant 0$,

$$x \geqslant 2\lambda \Longleftrightarrow t^x \geqslant t^{2\lambda}.$$

g. En déduire $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

3. À l'aide de GeoGebra, comparer les deux majorations de $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda)$ obtenues dans les questions précédentes.

Solution.

1. a. Dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ signifie que $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$ et que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda}$.

b. L'inégalité de Bineaymé-Tchebychev stipule que si Y est une variable aléatoire admettant une variance alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

c. En appliquant cette inégalité à $Y = X$ (qui admet bien une variance) et $\varepsilon = \lambda > 0$, on obtient

$$\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda^2}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}}.$$

d. On remarque que si $X \geqslant 2\lambda$ alors $X - \lambda \geqslant \lambda$ donc $|X - \lambda| \geqslant \lambda$. Ainsi, $\{X \geqslant 2\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}$ donc, par croissance de la probabilité,

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \lambda)$$

et ainsi, grâce à la question précédente,

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}}.$$

2. a. Pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \geqslant k)t^k = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \times t^k = \frac{(\lambda t)^k}{k}\mathrm{e}^{-\lambda}$ donc, au facteur constant $\mathrm{e}^{-\lambda}$ près, la série $\sum \mathbf{P}(X \geqslant k)t^k$ est une série exponentielle. Elle est donc convergente est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)t^k = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda t}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } t \geqslant 0,\ G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$.

b. Soit un réel $t \geqslant 0$. Alors,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbf{P}(X = k)$$

donc, par le théorème de transfert, $\boxed{G_X(t) = \mathbf{E}(X^t)}$.

c. L'inégalité de Markov stipule que si Y est une variable aléatoire positive admettant une espérance alors, pour tout réel $a > 0$,

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

d. Soit un réel $t > 0$. D'après la question **2.b.**, la variable aléatoire $Y = t^X$ admet une espérance égale à $G_X(t)$. De plus, elle est positive donc, en lui appliquant l'inégalité de Markov avec $a = t^{2\lambda} > 0$, on obtient

$$\mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}.$$

Or, $t^{2\lambda} = \mathrm{e}^{2\lambda \ln(t)}$ donc

$$\frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-t)}}{\mathrm{e}^{2\lambda \ln(t)}} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}.$$

Ainsi, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout réel } t > 0,\ \mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}}$.

e. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $t > 0$,

$$f'(t) = 1 - 2 \times \frac{1}{t} = \frac{t-2}{t}.$$

Pour tout $t > 0$, le signe de $f'(t)$ est le signe de $t-2$ donc f est décroisante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$. Ainsi, f atteint son minimum en 2 et ce minimum vaut $\boxed{f(2) = 1 - 2\ln(2)}$.

f. Soit un réel $t > 1$ et un réel $x > 0$. Alors, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$t^x \geqslant t^{2\lambda} \iff \mathrm{e}^{x\ln(t)} \geqslant \mathrm{e}^{2\lambda\ln(t)} \iff x\ln(t) \geqslant 2\lambda\ln(t).$$

Or, comme $t > 1$, $\ln(t) > 0$ donc

$$\boxed{t^x \geqslant t^{2\lambda} \iff x \geqslant 2\lambda}.$$

g. En appliquant ce qui précède avec $t = 2 > 1$, on obtient que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$x \geqslant 2\lambda \iff 2^x \geqslant 2^{2\lambda}$$

Comme X est à valeurs positives, on en déduit que $\{X \geqslant 2\lambda\} = \{2^X \geqslant 2^{2\lambda}\}$ donc $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) = \mathbf{P}(2^X \geqslant 2^{2\lambda})$. Dès lors, d'après la question **2.d.**, $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda f(2)}$ i.e.

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(1-2\ln(2))}.$$

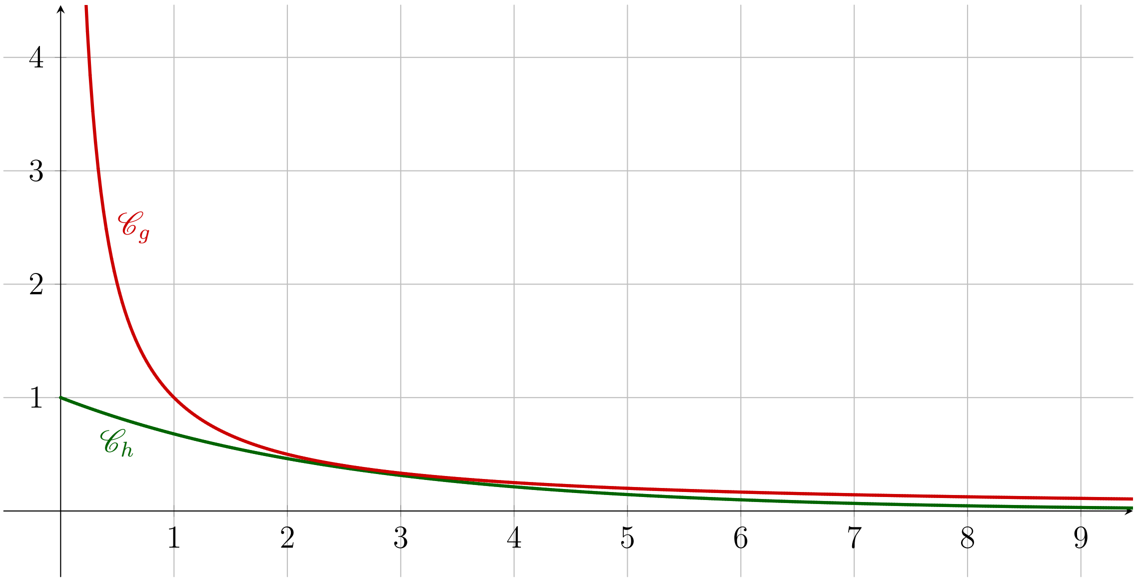
Or,

$$\mathrm{e}^{\lambda(1-2\ln(2))} = \mathrm{e}^{\lambda(1-\ln(4))} = \left(\mathrm{e}^{1-\ln(4)}\right)^\lambda = \left(\frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^{\ln(4)}}\right)^\lambda = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda}.$$

3. À l'aide de GeoGebra, on obtient les courbes suivantes pour les fonctions $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $h : x \longmapsto \left(\dfrac{e}{4}\right)^x$ définies sur $]0\,;+\infty[$. Comme $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_h$, on en déduit que, quelle que soit la valeur de λ, la seconde inégalité fournit une meilleure majoration que la première.



Sujet 27. Clinique vétérinaire pour chiens et chats (C7)

Dans une clinique vétérinaire, on note X le nombre de chats et Y le nombre de chiens présents lors d'une semaine. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\mu \geqslant 0$.

1. Rappeler la définition de la loi de Poisson.

2. Rappeler l'espérance de X. Démontrer la formule.

3. Rappeler la variance de X. Démontrer la formule.

4. On pose $Z = X + Y$.

- **a.** Déterminer l'espérance et la variance de Z.
- **b.** Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Z.
- **c.** Exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ en fonction de X et Y.
- **d.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer et simplifier l'expression $\dfrac{(\lambda + \mu)^k}{k!}$
- **e.** Démontrer que Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

5. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

On suppose dans la suite que $\lambda = 13$ et $\mu = 17$. La clinique est capable d'accueillir un maximum de 80 animaux.

- **a.** Majorer la probabilité de l'évènement $(Z \geqslant 80)$.
- **b.** La clinique devrait-elle investir pour augmenter sa capacité d'accueil ?

Solution.

1. On dit qu'une variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$ et si, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

2. Par théorème $\mathbf{E}(X) = \lambda$. Pour le démontrer, considérons un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k \times \frac{\lambda^k}{k \times (k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &\underset{j=k-1}{=} \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^{j+1}}{j!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda\end{aligned}$$

Ainsi, la série $n\mathbf{P}(X = n)$ converge et sa somme vaut λ donc X admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(X) = \lambda}$.

3. Par théorème $\mathbf{V}(X) = \lambda$. Pour le démontrer, considérons un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{\lambda^k}{k \times (k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}(k-1+1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\end{aligned}$$

Or, d'une part,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} &= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1) \times (k-2)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &\underset{j=k-2}{=} \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^{j+2}}{j!} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^j}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda^2\end{aligned}$$

et, d'autre part, d'après le calcul de la question précédente,

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{E}(X) = \lambda.$$

Ainsi, la série $\sum n^2\mathbf{P}(X = n)$ converge et sa somme vaut $\lambda^2 + \lambda$ donc, par le théorème de transfert, X^2 admet une espérance et $\mathbf{E}(X^2) = \lambda^2 - \lambda$.

Dès lors, par la formule de König-Huygens, X admet une variance et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(X) = \lambda}$.

Autre méthode. On peut commencer par calculer la variance de $X(X-1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times \frac{\lambda^k}{k(k-1)\times(k-2)!}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \underset{j=k-2}{=} \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^{j+2}}{j!}\\ &= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^j}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda^2\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum n(n-1)\mathbf{P}(X=n)$ converge et sa somme vaut λ^2. Par le théorème de transfert, on en déduit que $X(X-1)$ admet une espérance et $\mathbf{E}(X(X-1)) = \lambda^2$. Or, $X^2 = X(X-1)+X$ donc, comme $X(X-1)$ et X admettent une espérance, par linéarité, X^2 admet une espérance et $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) = \lambda^2+\lambda$. Ensuite, on conclut comme dans la première méthode à l'aide de la formule de König-Huygens.

4. a. Par linéarité, $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Z) = \lambda+\mu}$. De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(Z) = \lambda+\mu}$.

b. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N}}$.

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, comme $((X=i))_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}(Z=k) &= \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty}(X=i)\right)\cup(Z=k) = \bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(Z=k)]\\ &= \bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(X+Y=k)] = \bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(Y=k-X)]\\ &= \bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(Y=k-i)]\end{aligned}$$

De plus, si $i>k$ alors $k-i<0$ donc $(Y=k-i) = \varnothing$. Ainsi, on conclut que

$$\boxed{(Z=k) = \bigcup_{i=0}^{k}[(X=i)\cap(Y=k-i)]}.$$

d. Grâce à la formule du binôme de Newton,

$$\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

soit finalement

$$\boxed{\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}}.$$

e. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question **c.**,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k} [(X = i) \cap (Y = k - i)]\right).$$

Or, les évènements $(X = i)$ pour $i \in [\![0, k]\!]$ sont deux à deux disjoints donc

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}\left((X = i) \cap (Y = k - i)\right)$$

et, comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\mu} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda-\mu} = \mathrm{e}^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}.\end{aligned}$$

Ainsi, grâce au résultat de la question **d.**,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}$$

donc $\boxed{Z \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda + \mu}$.

5. a. D'après la question précédente, Z suit une loi de Poisson de paramètre $13 + 17 = 30$ donc $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{V}(Z) = 30$. En remarquant que

$$Z \geqslant 80 \Longrightarrow Z - 30 \geqslant 50 \Longrightarrow |Z - 30| \geqslant 50,$$

on peut affirmer que $(Z \geqslant 80) \subset (|Z - \mathbf{E}(Z)| \geqslant 50)$ donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,

$$\mathbf{P}(Z \geqslant 80) \leqslant \mathbf{P}(|Z - \mathbf{E}(Z)| \geqslant 50) \leqslant \frac{30}{50^2} = \frac{3}{250}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(Z \geqslant 80) \leqslant 0{,}012}$.

b. La probabilité que la capacité d'accueil de la clinique soit dépassée est

$$\mathbf{P}(Z > 80) \leqslant \mathbf{P}(Z \geqslant 80) \leqslant 0{,}012$$

donc $\boxed{\text{la clinique n'a pas intérêt à s'agrandir}}$.

Sujet 28. Tatouage de lapins (O1)

Un éleveur possède 100 lapins qui doivent se faire tatouer. Il choisit successivement des lapins au hasard : si le lapin est tatoué, on le repose dans le clapier ; sinon, on le tatoue et on le repose dans le clapier. On continue ainsi jusqu'à avoir tatoué tous les lapins.

On modélise la situation en assimilant chaque lapin à un jeton et le clapier à une urne, dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour tatouer tous les lapins.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note X_n le nombre de tirages effectués, une fois qu'on a tiré $n-1$ jetons différents, pour obtenir un n-ème jeton différent des précédents. Par exemple, si les tirages donnent :

$$3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 4, \ldots$$

alors $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3$, etc

Première partie

1. Donner la loi de X_1, ainsi que son espérance.

2. Donner la loi de X_2, ainsi que son espérance.

3. Soit un entier $n \in [\![1, 100]\!]$. Donner la loi de X_n, ainsi que son espérance.

4. Calculer l'espérance de X. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Deuxième partie

1. Vérifier que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{100} \frac{100}{j}.$$

2. Soit $j \in [\![2, 100]\!]$. Montrer que

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t.$$

3. En déduire que

$$\int_1^{101} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

puis donner un encadrement de $\mathbf{E}(X)$ à l'aide de la fonction ln.

Troisième partie

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{100} sont indépendantes.

1. Exprimer $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$, …, $\mathbf{V}(X_{100})$.

2. Déterminer alors la valeur de $\mathbf{V}(X)$. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Solution.

Première partie

1. La variable aléatoire est X_1 est constante égale à 1 puisqu'aucun jeton n'a été tiré avant le premier. Ainsi, $\boxed{\text{la loi de } X_1 \text{ est la loi certaine telle que } \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1}$. Son espérance est donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 1}$.

2. Une fois qu'un premier jeton k a été tiré, la succession de tirages qui suit constitue un schéma de Bernoulli (puisqu'il y a remise) en prenant comme succès l'évènement S : « ne pas tirer le jeton k ». La variable X_2 est alors égale au rang du premier succès donc, par propriété, elle suit $\boxed{\text{une loi géométrique de paramètre } \mathbf{P}(S) = \frac{99}{100}}$. On en déduit que son espérance est $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = \frac{100}{99}}$.

3. Une fois qu'on a tiré $n-1$ jetons différents, la succession de tirages qui suit constitue un schéma de Bernoulli (puisqu'il y a remise) en prenant comme succès l'évènement S : « ne pas tirer un jeton déjà tiré précédemment ». La variable X_n est alors égale au rang du premier succès donc elle suit $\boxed{\text{une loi géométrique de paramètre } \mathbf{P}(S) = \frac{100-(n-1)}{100} = \frac{101-n}{100}}$. On en déduit que son espérance est $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \frac{100}{101-n}}$.

4. Par définition $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} X_k$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{100} \mathbf{E}(X_n)$ donc

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{100} \frac{100}{101-n}}.$$

Deuxième partie

1. À l'aide du changement d'indice $j = 101 - n$, il vient

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{100} \frac{100}{j}}.$$

2. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc, pour tout $t \in [j\,;j+1]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{j}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{j}(j+1-j) = \frac{1}{j}.$$

De même, pour tout $t \in [j-1\,;j]$, $\dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{j}$ donc

$$\int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{j}(j-(j-1)) = \frac{1}{j}.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}.$$

3. En sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{j=2}^{100} \int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j} \leqslant \sum_{j=2}^{100} \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc, par la relation de Chasles,

$$\int_2^{101} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j} \leqslant \int_1^{100} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $t \in [1\,;2]$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{t} \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^2 1\,\mathrm{d}t = 1 \times (2-1) = 1.$$

On en déduit que

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_2^{101} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j}$$

i.e., par la relation de Chasles et le fait que $\dfrac{1}{1} = 1$,

$$\int_1^{101} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}.$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\int_1^{101} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}.$$

Or,

$$\int_1^{101} \frac{1}{t} = [\ln(t)]_1^{101} = \ln(101) - \ln(1) = \ln(101)$$

et

$$\int_1^{100} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{100} = \ln(100) - \ln(1) = \ln(100)$$

donc

$$\ln(101) \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \ln(100)$$

En multipliant cette double inégalité par 100, on conclut que

$$\boxed{100\ln(101) \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant 100 + 100\ln(100)}.$$

Troisième partie

1. On a vu dans la première partie que $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$ donc $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)$. Comme X_1, X_2, ..., X_{100} sont indépendantes, on en déduit que

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \sum_{k=1}^{100} \mathbf{V}(X_k)}.$$

2. Comme X_1 suit une loi certaine, $\mathbf{V}(X_1) = 0$. Ensuite, pour tout $k \in [\![2, 100]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{101-k}{100})$ donc

$$\mathbf{V}(X_k) = \frac{1 - \frac{101-k}{100}}{(\frac{101-k}{100})^2} = \frac{k-1}{100} \times \frac{100^2}{(101-k)^2} = \frac{100(k-1)}{(101-k)^2}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \sum_{k=2}^{100} \frac{100(k-1)}{(101-k)^2}}.$$

Sujet 29. Un jeu à 2 joueurs (O1)

Xavier et Yann participe à un jeu dont le principe est le suivant :

- les deux joueurs lancent chacun et de façon simultanée un dé (cubique, équilibré et dont les faces sont numérotées de 1 à 6) ;
- ils répètent l'opération jusqu'à ce que l'un d'eux obtienne un 6 ; si ce joueur est seul à obtenir un 6 à ce tour, il est alors déclaré gagnant ;
- le perdant continue alors à lancer son dé jusqu'à obtenir lui aussi un 6. Il devra verser au gagnant un montant en euros égal au nombre de lancers supplémentaires qu'il aura dû réaliser avant d'obtenir lui aussi un 6 ;
- dans le cas où les deux joueurs obtiennent un 6 lors du même tour, il n'y a ni gagnant ni perdant et le jeu s'arrête.

Par exemple, si Xavier obtient son premier 6 au 5$^{\text{e}}$ lancer et Yann obtient son premier 6 au 8$^{\text{e}}$ lancer alors Xavier est déclaré gagnant et Yann doit lui verser 3 €.

On définit les variables aléatoires suivantes :

- X désigne le nombre de lancers nécessaires à Xavier pour obtenir 6 ;
- Y désigne le nombre de lancers nécessaires à Yann pour obtenir 6 ;
- $Z = \min(X, Y)$;
- $T = \max(X, Y)$;
- G désigne le nombre d'euros attribués au gagnant.

1. Exprimer le gain G en fonction de Z et T.

2. Donner la loi de X et la loi de Y, leur espérance et leur variance.

3. **a.** Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z \geqslant n)$ en fonction des variables aléatoires X et Y.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(X \geqslant n)$ et en déduire la probabilité $\mathbf{P}(Z \geqslant n)$.

c. Déterminer la loi de Z.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Comparer, d'une part, les évènements $(Z = n) \cap (T = n)$ et $(X = n) \cap (Y = n)$ et, d'autre part, les évènements $(Z = n) \cup (T = n)$ et $(X = n) \cup (Y = n)$.

b. Exprimer $\mathbf{P}\left[(Z = n) \cup (T = n)\right]$ de deux façons différentes.
En déduire $\mathbf{P}(T = n)$.

c. Calculer $\mathbf{E}(T)$.

5. Déterminer, en euros, le gain moyen du gagnant.

Solution.

1. La variable Z représente le nombre de lancers effectués par le gagnant et T le nombre de lancers effectués par le perdant donc $\boxed{G = T - Z}$.

2. Les variables X et Y correspondent au rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli, en prenant comme succès « Obtenir 6 ».

Dès lors, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent des lois géométriques de paramètre } \frac{1}{6}}$.

Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 6 \text{ et } \mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = \frac{1-\frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2} = 30}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(Z \geqslant n)$ est réalisé si et seulement si $(X \geqslant n)$ et $(Y \geqslant n)$ sont réalisés donc $\boxed{(Z \geqslant n) = (X \geqslant n) \cap (Y \geqslant n)}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geqslant n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \underset{j=k-n}{=} \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j+n-1} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{1-\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$.

Comme Y suit la même loi que X, on a également $\mathbf{P}(Y \geqslant n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

Dès lors, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(Z \geqslant n) = \mathbf{P}((X \geqslant n) \cap (Y \geqslant n)) = \mathbf{P}(X \geqslant n)\mathbf{P}(Y \geqslant n) = \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]^2$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(Z \geqslant n) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $(Z = n) = (Z \geqslant n) \setminus (Z \geqslant n+1)$ et que $(Z \geqslant n+1) \subset (Z \geqslant n)$, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(Z \geqslant n) - \mathbf{P}(Z \geqslant n+1) &= \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} - \left(\frac{25}{36}\right)^{n} \\ &= \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{25}{36}\right) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \frac{11}{36}\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{11}{36}\right)$.

4. a. Par définition, l'une des deux variables Z ou T vaut X et l'autre vaut Y donc $\boxed{(Z = n) \cap (T = n) = (X = n) \cap (Y = n)}$ et $\boxed{(Z = n) \cup (T = n) = (X = n) \cup (Y = n)}$.

b. D'une part,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((Z=n)\cup\mathbf{P}(T=n)) &= \mathbf{P}(Z=n)+\mathbf{P}(T=n)-\mathbf{P}((Z=n)\cap(T=n))\\ &= \mathbf{P}(Z=n)+\mathbf{P}(T=n)-\mathbf{P}((X=n)\cap(Y=n))\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((Z=n)\cup\mathbf{P}(T=n)) &= \mathbf{P}((X=n)\cup(Y=n))\\ &= \mathbf{P}(X=n)+\mathbf{P}(Y=n)-\mathbf{P}((X=n)\cap(Y=n))\\ &= 2\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}((X=n)\cap(Y=n))\end{aligned}$$

car X et Y ont même loi. Ainsi, $\mathbf{P}(Z=n)+\mathbf{P}(T=n)=2\mathbf{P}(X=n)$ donc

$$\mathbf{P}(T=n)=2\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Z=n)=2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}-\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\frac{11}{36}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(T=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{11}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}}.$$

c. On peut remarquer que $Z+T=X+Y$ donc $T=X+Y-Z$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{E}(T)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)-\mathbf{E}(Z)=2\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(Z)=2\times 6-\frac{36}{11}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(T)=\dfrac{96}{11}}$.

5. Comme $G=T-Z$, par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(G)=\mathbf{E}(T)-\mathbf{E}(Z)=\frac{96}{11}-\frac{36}{11}=\frac{60}{11}$$

donc $\boxed{\text{le gain moyen de gagnant est } \dfrac{60}{11}\approx 5{,}45 \text{ euros}}$.

Sujet 30. Empilement de dés (O1)

1. On souhaite empiler, les uns sur les autres, des dés cubiques et de même taille. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, lorsque $k-1$ dés ont déjà été empilés, la probabilité que le k-ième dé ne fasse pas écrouler l'édifice lors de sa pose est de $\frac{1}{k}$. On note N le nombre de dés empilés avant que l'édifice ne s'écroule (on ne comptera pas le dernier dé, responsable de la chute de l'édifice).

a. Déterminer l'univers image de N que l'on notera $N(\Omega)$.

b. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note

A_i : « Lors de sa pose, le i-ème dé empilé n'a pas fait s'écrouler l'édifice. »

Pour tout $k \in N(\Omega)$, écrire l'évènement $(N = k)$ à partir des évènements A_i.

c. Déterminer la loi de N et vérifier qu'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) = 1$$

.

d. Montrer que $N+1$ admet une espérance et déterminer sa valeur.

e. En déduire que N admet une espérance et déterminer sa valeur.

2. On dispose de 4 dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 4. Les faces de chacun de ces 4 dés sont numérotées de 1 à 6. On lance les 4 dés simultanément. On reprend les dés avec lesquels on n'a pas obtenu 6 que l'on relance simultanément, et ainsi de suite jusqu'à avoir quatre 6 sur la table. On note T le nombre lancers effectués. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on note T_i le nombre de lancers effectués pour obtenir la face 6 avec le dé numéro i.

a. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, déterminer la loi de T_i et donner (si elles existent) son espérance et sa variance.

b. Exprimer T en fonction de T_1, T_2, T_3 et T_4.

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{P}(T \leqslant k)$.

d. En déduire la loi de T.

Solution.

1. a. Il faut poser au moins un dé sur un autre pour que l'édifice s'écroule donc $\boxed{N(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\boxed{(N = k) = A1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}}$.

c. D'après la formule des probabilités composées, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N = k) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k}(\overline{A_{k+1}})\\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{k!} \times \frac{k+1-1}{k+1}\end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(N = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en faisant apparaître une somme téléscopique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(n = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) = 1}$.

d. Par le théorème de transfert, $N + 1$ admet un espérance si et seulement si la série $\sum(k+1)\mathbf{P}(N = k)$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\mathbf{P}(N = k) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)k}{(k+1)k(k-1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{N + 1 \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(N + 1) = e}$.

e. Comme $N = (N + 1) - 1$, par linéarité de l'espérance, N admet une espérance est $\mathbf{E}(N) = \mathbf{E}(N + 1) - 1$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(N) = e - 1}$.

2. a. Soit $i \in [\![1, 4]\!]$. La succession de lancers du dé numéro i constitue un schéma de Bernoulli (éventuellement infini) en prenant comme succès « Obtenir 6 ». Ainsi, la variable T_i qui donne le rang du premier succès pour le dé numéro i suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Par théorème, $\mathbf{E}(T_i) = \frac{1}{\frac{1}{6}}$ soit $\boxed{\mathbf{E}(T_i) = 6}$ et $\mathbf{V}(T_i) = \frac{1-\frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2} = \frac{5}{6} \times 6^2$ soit $\boxed{\mathbf{V}(T_i) = 30}$.

b. La variable aléatoire T est le nombre de lancers nécessaires pour que les 4 dés donnent 6 donc $\boxed{T = \max(T_1, T_2, T_3, T_4)}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(T \leqslant k) = (\max(T_1, T_2, T_3, T_4) \leqslant k) = (T_1 \leqslant k) \cap (T_2 \leqslant k) \cap (T_3 \leqslant k) \cap (T_4 \leqslant k)$$

donc, comme T_1, T_2, T_3 et T_4 sont mutuellement indépendantes et ont la même loi

$$\mathbf{P}(T \leqslant k) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant k)\mathbf{P}(T_2 \leqslant k)\mathbf{P}(T_3 \leqslant k)\mathbf{P}(T_4 \leqslant k) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant k)^4.$$

Or,

$$\mathbf{P}(T_1 \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6} \underset{n=j-1}{=} \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n} = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{P}(T \leqslant k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^4}$.

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(T \leqslant k) - \mathbf{P}(T \leqslant k - 1)$$

donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{P}(T = k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^4 - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right]^4}.$$

Sujet 31. Capture d'esturgeons femelles (O1)

Soit $p \in]0\,;1[$.
Un étang contient des esturgeons, dont une proportion p de femelles.
Un biologiste y pêche dans le but d'obtenir une femelle.
S'il obtient un mâle, il le rejette à l'eau et recommence.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que le biologiste pêche jusqu'à obtenir une femelle.
On définit la variable aléatoire X égale au rang de la tentative qui apporte une femelle.

1. Donner $X(\Omega)$.

2. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

3. Démontrer la valeur de $\mathbf{E}(X)$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que le biologiste s'arrête soit lorsqu'il a obtenu une femelle, soit lorsqu'il a effectué N tentatives (N étant un entier naturel non nul fixé).
On définit la variable aléatoire X_N par :

- $X_N = k$ si la $k^{\text{ème}}$ tentative donne une femelle ;
- $X_N = 0$ si aucune femelle n'est obtenue à l'issue des N tentatives.

1. Donner $X_N(\Omega)$.

2. Calculer $\mathbf{P}(X_N = k)$ pour tout $k \in X_N(\Omega)$.

3. Déterminer, en fonction de p, la plus petite valeur de N pour que la probabilité d'obtenir une femelle soit supérieure ou égale à 0,9.

4. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} x^k$?
En dérivant l'égalité précédente, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} = \frac{1 + x^N(Nx - N - 1)}{(1-x)^2}$$

5. Calculer $\mathbf{E}(X_N)$.

6. Déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \mathbf{E}(X_N)$. Que reconnaît-on ?

7. Soit Y_N la variable aléatoire égale au nombre total d'esturgeons pêchés.
Donner la loi de probabilité de Y_N et calculer $\mathbf{E}(Y_N)$.

Solution.

Partie A

1. Par définition, $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

2. La variable X représente le premier succès dans un schéma de Bernoulli (en prenant comme succès « pêcher un esturgeon femelle ») donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)}$.

Par propriété, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{n} k(1-p)^{k-1}.$$

Or, comme $0 < p < 1$, $0 < 1 - p < 1$ donc, en reconnaissant une somme partielle de série géométrique dérivée convergente,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

donc X admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}}$.

Partie B

1. Par définition, $\boxed{X_N(\Omega) = [\![1, N]\!]}$.

2. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, notons A_i : « la pêcheur attrape un esturgeon femelle à la $i^{\text{ème}}$ tentative ». Alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(X_N = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

donc, par la formule de probabilités composées,

$$\mathbf{P}(X_N = k) = \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) \cdots \mathbf{P}\left(\overline{A_{k-1}} \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right)\mathbf{P}\left(A_k \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) = (1-p)^{k-1}p.$$

De plus, $\mathbf{P}(X_N = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_N = k)$ donc, comme $1 - p \neq 1$,

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{N} (1-p)^{k-1}p = 1 - p\sum_{j=0}^{N-1} (1-p)^j = 1 - p \times \frac{1-(1-p)^N}{1-(1-p)} = (1-p)^N.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, N]\!],\ \mathbf{P}(X_N = k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}p & \text{si } k \in [\![1, N]\!] \\ (1-p)^N & \text{si } k = 0 \end{cases}}$.

3. La probabilité d'obtenir une femelle est $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}p$ et

$$\sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}p \geqslant 0{,}9 \iff 1-\sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}p \leqslant 0{,}1 \iff (1-p)^N \leqslant 0{,}1 \iff N\ln(1-p) \leqslant \ln(0{,}1)$$

par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$. De plus, comme $0 < 1-p < 1$, $\ln(1-p) < 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}p \geqslant 0{,}9 \iff N \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(1-p)}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la valeur cherchée est le plus petit entier } N \text{ supérieur ou égal à } \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(1-p)}}$.

4. Pour tout réel $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$.
En dérivant par rapport à x, on en déduit que, pour tout réel $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} kx^{k-1} &= \frac{-(N+1)x^N(1-x)-(1-x^{N+1})(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(N+1)x^N+(N+1)x^{N+1}+1-x^{N+1}}{(1-x)^2}\\ &\frac{-(N+1)x^N+NX^{N+1}+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

donc, comme le terme de la somme est nul pour $k=0$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} = \frac{1+x^N(Nx-N-1)}{(1-x)^2}}.$$

5. Par définition,

$$\mathbf{E}(X_N) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbf{P}(X_N = k) = \sum_{k=1}^{N} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$$

donc, comme $1-p \neq 0$, d'après la question précédente,

$$\mathbf{E}(X_N) = p \times \frac{1+(1-p)^N(N(1-p)-N-1)}{(1-(1-p))^2} = p \times \frac{1+(1-p)^N(-Np-1)}{p^2}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(X_N) = \frac{1-(Np+1)(1-p)^N}{p}}$.

6. On peut réécrire $\mathbf{E}(X_N) = \dfrac{1-pN(1-p)^N-(1-p)^N}{p}$. Or, comme $0 < 1-p < 1$, $(1-p)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et, par croissances comparées, $N(1-p)^N = N\mathrm{e}^{\ln(1-p)N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $\ln(1-p) < 0$. Ainsi, par somme de limites, $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{E}(X_N) = \frac{1}{p}$.

On retrouve ainsi l'espérance de X (qui correspond, en quelque sorte, au cas $N = +\infty$).

7. Par définition, $Y_N(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

Si $k < N$ alors $(Y_N = k)$ est réalisé si et seulement si $(X_N = k)$ donc $\mathbf{P}(Y_n = k) = \mathbf{P}(X_N = k) = (1-p)^{k-1}p$.

De plus, $(Y_N = N)$ si et seulement si $(X_N = N)$ ou $(X_N = 0)$ donc $\mathbf{P}(Y_N = N) = \mathbf{P}((X_N = N) \cup (X_N = 0))$ et, comme cette union est disjointe,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_N = N) &= \mathbf{P}(X_N = N) + \mathbf{P}(X_N = 0) = (1-p)^{N-1}p + (1-p)^N \\ &= (1-p)^{N-1}(p + (1-p) = (1-p)^{N-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, N]\!],\ \mathbf{P}(Y_N = k) = \begin{cases}(1-p)^{k-1}p & \text{si } k \in [\![1, N-1]\!] \\ (1-p)^{N-1} & \text{si } k = N\end{cases}}$.

On en déduit, en utilisant le résultat de la question **4.** avec $N-1$ au lieu de N, que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_N) &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}(Y_N = k) = \sum_{k=1}^{N-1} k(1-p)^{k-1}p + N(1-p)^{N-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{N-1} k(1-p)^{k-1} + N(1-p)^{N-1} \\ &= p \times \frac{1 + (1-p)^{N-1}((N-1)(1-p) - (N-1) - 1)}{(1-(1-p))^2} + N(1-p)^{N-1} \\ &= \frac{1 + (1-p)^{N-1}(-(N-1)p - 1 + Np)}{p}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(Y_N) = \dfrac{1 - (1-p)^N}{p}}$.

Sujet 32. Loi du second succès (O1)

Première partie

Une épreuve comporte deux issues : succès ou échec.
La probabilité du succès est notée p, avec $p \in]0\,;1[$.
La probabilité de l'échec est notée $q = 1 - p$.
On répète cette épreuve de façon indépendante jusqu'à ce qu'on obtienne deux succès.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant le deuxième succès.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note R_i l'événement « l'épreuve numéro i est un succès ».

1. Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$, $\mathbf{P}(X = 3)$, $\mathbf{P}(X = 4)$.

2. Préciser $X(\Omega)$ et calculer $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

3. Calculer la probabilité de l'événement A : « il ne se produit pas de deuxième succès ».

Deuxième partie

Un ticket de métro coûte 2 €.
En cas de fraude, la première amende est de 40 € et la seconde est de 80 €.
À chaque trajet, la probabilité pour un usager d'être contrôlé est égale à p.
Tom décide de compter le nombre de trajets qu'il effectue. La variable aléatoire T désigne le numéro du trajet où il est contrôlé pour la deuxième fois.

1. Donner la loi de T. Calculer son espérance.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T > n) = (1 - p)^{n-1}\,[(n - 1)p + 1]$.

3. On suppose que $p = 10^{-3}$. Calculer $\mathbf{P}(T > 60)$. Interpréter le résultat.

Solution.
Première partie

1. Comme $(X = 2) = R_1 \cap R_2$ et comme les évènements R_1 et R_2 sont indépendantes, $\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2)$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X = 2) = p^2}$.

Comme $(X = 3) = (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)$, comme cette union est disjointe et comme R_1, R_2 et R_3 sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = 3) &= \mathbf{P}(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) + \mathbf{P}(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)\\ &= \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(\overline{R_2})\mathbf{P}(R_3) + \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}(R_2)\mathbf{P}(R_3) = pqp + qpp\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X = 3) = 2p^2q}$.

Enfin, on a de même

$$(X = 4) = (R_1 \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \cap R_4) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap R_4) \cup (\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4)$$

donc, comme l'union est disjointe et les évènements R_1, R_2, R_3 et R_4 sont indépendants, $\mathbf{P}(X_4) = pq^2p + qpqp + q^2p^2$ i.e. $\mathbf{P}(X = 4) = 3p^2q^2$.

2. Il faut et il suffit d'avoir au moins 2 expérience pour pouvoir avoir 2 succès donc $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.
Soit un entier $k \geqslant 2$. Notons Y la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors des $k-1$ premières expériences. Comme les répétitions sont indépendantes, Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(k-1, p)$. Or, $(X = k) = (Y = 1) \cap R_k$ donc, comme les évènements $(Y = 1)$ et R_k sont indépendants (puisque le résultat de la k-ième épreuve est indépendant des $k-1$ épreuves précédentes),

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = 1)\mathbf{P}(R_k) = \binom{k-1}{1} p^1 q^{k-2} \times p$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X = k) = (k-1)p^2q^{k-2}}$.

3. Le contraite de A est « il existe un entier $k \geqslant 2$ tel qu'on obtient un second succès à la k-ième épreuve » donc $\overline{A} = \bigcup\limits_{k=2}^{+\infty} (X = k)$. Or, les évènements $(X = k)$ pour $k \geqslant 2$ sont deux à deux incompatibles donc

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)p^2q^{k-2} = p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)q^{k-2} \underset{j=k-1}{=} p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1}.$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée convergente (car $q \in [0\,;1[$) donc

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} = p^2 \times \frac{1}{p^2} = 1.$$

Par suite, $\boxed{\mathbf{P}(A) = 0 \text{ i.e. } A \text{ est un évènement négligeable}}$.

Deuxième partie

1. D'après les résultats de la **Première partie** (et en supposant que les contrôles sont indépendants), $T(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\boxed{\mathbf{P}(T = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}}.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors,

$$\sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)p^2(1-p)^{k-2} = p^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2}.$$

On reconnaît une somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde convergente (car $1 - p \in [0\,;1[$) donc

$$\sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(X = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p^2 \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}.$$

Ainsi, T admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{2}{p}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)p^2(1-p)^{k-2} = p^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} \\
&\underset{j=k-n-1}{=} p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (j+n)(1-p)^{j+n-1} \\
&= p^2(1-p)^n \sum_{j=0}^{+\infty} (j+n)(1-p)^{j-1} \\
&= p^2(1-p)^n \left[\sum_{j=0}^{+\infty} j(1-p)^{j-1} + n \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j-1} \right] \\
& p^2(1-p)^n \left[\frac{1}{(1-(1-p))^2} + n(1-p)^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \right] \\
&= p^2(1-p)^n \left[\frac{1}{p^2} + n(1-p)^{-1} \times \frac{1}{1-(1-p)} \right] \\
&= p^2(1-p)^n \left[\frac{1}{p^2} + \frac{n}{p(1-p)} \right] \\
&= p^2(1-p)^{-n} \times \frac{1-p+np}{p^2(1-p)}
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(T > n) = (1-p)^{n-1}\,[1 + (n-1)p]}$

<u>Autre méthode</u>. Notons Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles au cours des n premiers trajets. Alors, comme précédemment, Y suit une loi binomiale de

paramètres n et p. Or, $(T > n) = (Y = 0) \cup (Y = 1)$ donc, comme cette union est disjointe,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T > n) = \mathbf{P}(Y = 0) + \mathbf{P}(Y = 1) &= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1-p)^{n-1}\left[1 - p + np\right]\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(T > n) = (1-p)^{n-1}\left[1 + (n-1)p\right]}$.

3. Si $p = 10^{-3}$ et $n = 60$ alors

$$\mathbf{P}(T > 60) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{59} \left(1 + \frac{59}{1000}\right) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{59} \times \frac{1059}{1000} \approx 0{,}998.$$

Ainsi, la probabilité que Tom ne soit contrôlé qu'une seul fois en 60 trajets est environ 0,998. Or, si Tom paye son ticket à chaque trajet, cela lui revient à 120 € alors que s'il ne paye pas, la probabilité qu'il n'ait qu'une seul amende et qu'il paie donc 40 € est très proche de 1. Ainsi, il a donc intérêt à frauder !

Sujet 33. Tirage avec ajout de boule noire (O1)

Une urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire.
On effectue des tirages selon le protocole suivant :
— si on obtient une boule noire, on arrête ;
— si on obtient une boule blanche, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule noire.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement « on obtient une boule blanche au k-ième tirage » ;
- N_k l'événement « on obtient une boule noire au k-ième tirage ».

On note T le numéro du tirage qui amène une boule noire.

1. Donner $T(\Omega)$.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$. Si l'on n'a pas obtenu de boule noire lors $n-1$ premiers tirages, quel est le contenu de l'urne au moment du n-ième tirage ?

3. Donner, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$.

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$.

5. Déterminer la loi de T.

6. **a.** Écrire le polynôme X^2 comme combinaison linéaire de $X(X+1)$, $X+1$ et 1.
b. Écrire le polynôme X^3 comme combinaison linéaire de $(X-1)X(X+1)$, $X+1$ et 1.

7. **a.** En utilisant la question **6.a.**, calculer $\mathbf{E}(T)$.
b. En utilisant la question **6.b.**, calculer $\mathbf{V}(T)$.

8. **a.** On note $Y = T+1$. En utilisant la variable aléatoire Y, proposer une autre méthode de calcul de $\mathbf{E}(T)$.
b. On note $Z = (T+1)(T-1)$. En utilisant la variable aléatoire Z, proposer une autre méthode de calcul de $\mathbf{E}\left(T^2\right)$.

Solution.

1. On peut tirer une boule noire à n'importe quel tirage à partir du premier donc $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

2. Si les $n-1$ premiers tirages ont amené des boules blanches, on a ajouté dans l'urne $n-1$ boules noires dont, au moment du n-ième tirage l'urne contient $2+n-1 = n+1$ boules : $\boxed{\text{1 blanche et } n \text{ noires}}$.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$. Si l'évènement $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ est réalisé, on effectue un n-ième tirage et la composition de l'urne est celle déterminée dans la question précédente. Ainsi, par équiprobabilité des tirages, $\boxed{\mathbf{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{n+1}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\cdots \mathbf{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \frac{1}{n+1}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \frac{1}{(n+1)!}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $(T = n) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n$ donc

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1})\mathbf{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(N_n) = \frac{1}{n!} \times \frac{n}{n+1}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(T = n) = \frac{n}{(n+1)!}}$.

6. **a.** Comme $X(X+1) = X^2 + X$, on peut écrire $\boxed{X^2 = X(X+1) - (X+1) + 1}$.

b. Comme $(X-1)X(X+1) = X(X-1)(X+1) = X(X^2-1) = X^3 - X$, on peut écrire $\boxed{X^3 = (X-1)X(X+1) + (X+1) - 1}$.

7. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(T = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1) - (k+1) + 1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1\right) + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 1 + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} - 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} e - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, T admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(T) = e - 1}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}(T=k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)k(k+1)+(k+1)-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 - \left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} - 2 \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e+1
\end{aligned}$$

Ainsi, T^2 admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(T^2) = e+1}$.

Par la formule de könig-Huygens, on en déduit que T admet une variance et que

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{E}(t^2) - \mathbf{E}(T)^2 = e+1-(e-1)^2 = e+1-(e^2-2e+1)$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(T) = e(3-e)}$.

8. a. Par définition $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\mathbf{P}(Y=k) = \mathbf{P}(T+1=k) = \mathbf{P}(T=k-1) = \frac{k-1}{k!}.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors,

$$\sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e.$$

Ainsi, Y admet une espérance et $\mathbf{E}(Y) = e$. Or, par linéarité, $\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(Y) - 1$ donc $\mathbf{E}(T) = e-1$.

b. Par le théorème de transfert, Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum (k+1)(k-1)\mathbf{P}(T=k)$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-1)\mathbf{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)k(k-1)}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$$

donc Z admet une espérance et $\mathbf{E}(Z) = e$. Or, $Z = T^2 - 1$ donc $T^2 = Z+1$ et ainsi, par linéarité, $\boxed{\mathbf{E}(T^2) = \mathbf{E}(Z) + 1 = e+1}$.

Sujet 34. Capture d'un couple d'esturgeons (O1)

Un biologiste pêche des esturgeons.

Il souhaite pêcher un esturgeon mâle et un esturgeon femelle pour les placer dans un aquarium afin qu'ils se reproduisent.

Pour cela, il effectue successivement différentes tentatives. On suppose qu'à chaque tentative, le biologiste a une probabilité $p \in]0\,;1[$ de pêcher un esturgeon.

On suppose que les proportion de mâles et de femelles sont identiques.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tentatives nécessaire pour pêcher le premier esturgeon (mâle ou femelle).

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tentatives **supplémentaires** nécessaires pour pêcher un esturgeon de sexe opposé.

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de X puis donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

3. On pose $Z = X + Y$.

a. Donner une interprétation de la variable aléatoire Z.

b. Déterminer $Z(\Omega)$.

c. Calculer $\mathbf{P}(Z = 2)$ et $\mathbf{P}(Z = 3)$.

d. Pour tout $n \in Z(\Omega)$, exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction de X et Y.

e. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{k-1}$.

f. En déduire la loi de Z.

Solution.

1. Par définition, le loi X est la loi du premier succès dans un schéma de Bernoulli donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)}$. On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}}$.

2. Pour une tentative, notons E : « le biologiste pêche un esturgeon », M : « le biologiste pêche un mâle » et M : « le biologiste pêche une femelle ». Comme les proportions de mâles et de femelles sont identiques, $\mathbf{P}(M \mid E) = \mathbf{P}(M \mid F) = \frac{1}{2}$. On en déduit que $\mathbf{P}(E \cap M) = \mathbf{P}(E)\mathbf{P}(M \mid E) = \frac{p}{2}$ et $\mathbf{P}(E \cap F) = \mathbf{P}(E)\mathbf{P}(F \mid E) = \frac{p}{2}$.
Une fois que le biologiste a pêché le premier esturgeon, il lui faut recommencer ses tentatives jusqu'à pêcher un esturgeon du sexe opposé. La loi de la variable Y qui compte le nombre de tentatives nécessaires est donc la loi du premier succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2p}$. Ainsi, $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{p}{2})}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{2}{p}}$ et $\boxed{\mathbf{V}(Y) = \frac{1-\frac{p}{2}}{(\frac{p}{2})^2} = \frac{4-2p}{p^2}}$.

3. a. La variable aléatoire Z représente le nombre de tentatives nécessaires au biologiste pour pêcher deux esturgeons de sexes différents.

b. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.

c. Comme $(Z = 2) = (X = 1) \cap (Y = 1)$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(Z = 2) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1) = p \times \frac{p}{2}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(Z = 2) = \frac{p^2}{2}}$.
De même, $(Z = 3) = (X = 1, Y = 2) \cup (X = 2, Y = 1)$ donc, comme cette union est disjointe,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = 3) &= \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 2) + \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 1) \\
&= p \times \left(1 - \frac{p}{2}\right)\frac{p}{2} + (1-p)p \times \frac{p}{2} \\
&= \frac{p^2}{2}\left(1 - \frac{p}{2} + 1 - p\right)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(Z = 3) = \frac{p^2(4-3p)}{4}}$.

d. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors, $\boxed{(Z = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (X = k) \cap (Y = n-k)}$.

e. Soit un entier $n \geqslant 2$.

Comme $p \neq 0$, $1-p \neq 1-\frac{p}{2}$ donc $\dfrac{1-p}{1-\frac{p}{2}} \neq 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{j} = \frac{1-\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{n-1}}{1-\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{n-1}}{\frac{1-\frac{p}{2}-(1-p)}{1-\frac{p}{2}}} = \frac{1-\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{n-1}}{\frac{\frac{p}{2}}{1-\frac{p}{2}}}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{k-1} = \frac{1-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}\left[1-\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{n-1}\right]}.$$

f. Soit un entier $n \geqslant 2$. D'après le résultat de la question **d.**

$$\mathbf{P}(Z=n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}(X=k)\cap(Y=n-k)\right).$$

Comme cette union est disjointe,

$$\mathbf{P}(Z=n) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}(X=k, Y=n-k)$$

et, comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=n) &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=n-k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}p \times \left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-k-1} \times \frac{p}{2}\\
&= \frac{p^2}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{k-1}\\
&= \frac{p^2}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-2} \times \frac{1-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}\left[1-\left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{n-1}\right]\\
&= p\left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-1} \times \frac{(1-\frac{p}{2})^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{(1-\frac{p}{2})^{n-1}}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Z=n) = p\left[\left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-1}-(1-p)^{n-1}\right]}.$$

Sujets de probabilités : variables aléatoires à densité

Sujet 35. Le jeu des ampoules (C3)

Lors d'un jeu télévisé, 400 ampoules sont allumées dans une pièce.

Un candidat ouvre la porte de la pièce, à l'instant x de son choix ($x \in \mathbb{R}_+$).

Le gain du candidat est égal au nombre d'ampoules encore allumées lorsqu'il ouvre la porte, multiplié par le temps x.

On suppose que les durées de vie des ampoules sont indépendantes les unes des autres, et que la durée de vie de chaque ampoule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On note T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

- **a.** Rappeler la densité de T et son espérance.
- **b.** Calculer la variance de T.
- **c.** Montrer que pour tous réels s et t strictement positifs.

$$\mathbf{P}(T > s + t \mid T > s) = \mathbf{P}(T > t)$$

2. On note A le nombre d'ampoules encore allumées à l'instant x.

Donner la loi de A ainsi que son espérance et sa variance.

3. On note G le gain du candidat.

- **a.** Exprimer G en fonction de x et de A. En déduire $\mathbf{E}(G)$ en fonction de x.
- **b.** Déterminer la valeur x_m de x pour laquelle l'espérance du gain est maximale.

4. Dans cette question, on suppose que $x = x_m$.

- **a.** Justifier que l'on peut approximer la loi de A par une loi normale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Dans cette question, la probabilité que le gain dépasse 1000 euros est égale à 0,001. Déterminer une valeur approchée de λ.

  On donne $\Phi(3{,}0902) \approx 0{,}999$, *où* Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

Solution.

1. a. La densité de T est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

On a alors $\boxed{\mathbf{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}}$.

b. Par le théorème de transfert, la variable T^2 admet une espérance si et seulement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit un réel $A > 0$. Les fonctions $u : t \longmapsto t^2$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^A t^2 \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[t^2 \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\Big]_0^A - \int_0^A 2t \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = -A^2\mathrm{e}^{-\lambda A} + 2\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, par croissance comparée, comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^2 \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$. De plus, comme T admet une espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$,

$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^A t(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^A t f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(T).$$

On en déduit donc que

$$\int_0^A t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 + 2\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(T) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ainsi, T^2 admet une espérance et $\mathbf{E}(T^2) = \dfrac{2}{\lambda}$. Par la formule de König-Huygens, on en déduit que T admet une variance et que

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{E}(T^2) - \mathbf{E}(T)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{V}(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$.

c. Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T > x) = 1 - \mathbf{P}(T \leqslant x) &= 1 - \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \Big[-\mathrm{e}^{\lambda t}\Big]_0^x \\ &= 1 - \Big(-\mathrm{e}^{-\lambda x} - (-\mathrm{e}^0)\Big) = 1 + \mathrm{e}^{-\lambda x} - 1 = \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Par définition,

$$\mathbf{P}(T > s+t \mid T > s) = \frac{\mathbf{P}(\{T > s+t\} \cap \{T > s\})}{\mathbf{P}(T > s)}.$$

Or, comme $t > 0$, $\{T > s+t\} \subset \{T > s\}$ donc $\{T > s+t\} \cap \{T > s\} = \{T > s+t\}$ et ainsi

$$\mathbf{P}(T > s+t \mid T > s) = \frac{\mathbf{P}(T > s+t)}{\mathbf{P}(T > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)+\lambda s} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(T > s+t \mid T > s) = \mathbf{P}(T > t)}.$$

Cela traduit que la loi exponentielle est sans mémoire i.e. que la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie de t heures supplémentaires sachant qu'elle a déjà fonctionné s heures est la même que la probabilité que l'ampoule ait initialement une durée de vie de t heures.

2. Numérotons les ampoules de 1 à 400 et notons, pour tout $k \in [\![1, 400]\!]$, X_k la variable aléatoire de Bernoulli dont le succès est « l'ampoule k est encore allumée à l'instant x ». Alors, le paramètre de X_k est $\mathbf{P}(T > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Comme les durées de vie des ampoules sont supposées indépendantes, les variables aléatoires X_k sont indépendantes. Or, $A = \sum_{k=1}^{400} X_k$ donc $\boxed{A \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 400 \text{ et } p = \mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(A) = 400\mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ et } \mathbf{V}(A) = 400\mathrm{e}^{-\lambda x}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})}$.

3. a. Par définition $\boxed{G = xA}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(G) = x\mathbf{E}(A)$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(G) = 400x\mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

b. Considérons la fonction $g : x \longmapsto 400x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = 400\mathrm{e}^{-\lambda x} + 400x(-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}) = 400(1 - \lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Or, pour tout réel x, $400\mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $1 - \lambda x$. On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[0\,; \frac{1}{\lambda}\right]$ et $g'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[\frac{1}{\lambda}\,; +\infty\right[$. Ainsi, g est croissante sur $\left[0\,; \frac{1}{\lambda}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\lambda}\,; +\infty\right[$. On en déduit que g atteint son maximum en $x_m = \frac{1}{\lambda}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(G) \text{ est maximale en } x_m = \frac{1}{\lambda}}$.

4. On suppose que $x = x_m = \frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda x = 1$.

a. Comme $n = 400 \geqslant 30$, $np = 400\mathrm{e}^{-1} \approx 147 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 400(1-\mathrm{e}^{-1}) \approx 252 \geqslant 5$, par le théorème de de Moivre-Laplace, on sait que la loi de $B = \dfrac{A - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}$ peut être approximée par une loi normale centrée réduite donc la loi de A peut être approximée par une loi normale d'espérance $400\mathrm{e}^{-1}$ et de variance $400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})$.

b. L'énoncé précise que $\mathbf{P}(G > 1000) = 0{,}001$. Or,

$$\begin{aligned} G > 1000 \iff \frac{1}{\lambda}A > 1000 \iff A > 1000\lambda \\ \iff \frac{A - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} > \frac{1000 - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} \\ B > \frac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{P}\left(B > \dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}\right) = 0{,}001$ donc, en passant au complémentaire, $\mathbf{P}\left(B \leqslant \dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}\right) = 0{,}999$. Or, comme B suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout réel x, $\mathbf{P}(B \leqslant x) \approx \Phi(x)$. Ainsi, $\Phi\left(\dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}\right) \approx 0{,}999$. Or, Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective et l'énoncé précise que $\Phi(3{,}0902) \approx 0{,}999$ donc $\dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} \approx 3{,}0902$.

On en déduit que $\lambda \approx \dfrac{3{,}0902\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})} + 400\mathrm{e}^{-1}}{1000}$ soit $\boxed{\lambda \approx 0{,}177}$.

Sujet 36. Parc d'imprimantes dans une usine (C8)

1. On considère la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par $H(x) = 1 - 10x^9 + 9x^{10}$.

a. Étudier les variations de H sur $[0\,;1]$.

b. Montrer que H réalise une bijection de $[0\,;1]$ vers un ensemble à déterminer.

c. Avec $\varepsilon = 0{,}025$, déterminer graphiquement a et b tels que $H(a) = 1 - \varepsilon$ et $H(b) = \varepsilon$. *(On pourra utiliser GeoGebra)*

d. Déterminer t_1 et t_2 tels que $H(\mathrm{e}^{-t_1}) = \varepsilon$ et $H(\mathrm{e}^{-t_2}) = 1 - \varepsilon$.

2. Dix imprimantes équipent une usine. Cette usine est fonctionnelle si au moins 9 de ces machines fonctionnent.

Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on appelle D_k la variable aléatoire donnant le temps de fonctionnement, en année, de la k-ème imprimante.

Les 10 variables aléatoires D_k sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle.

La durée moyenne de fonctionnement d'une imprimante est de 5 ans.

a. Déterminer la fonction de répartition de la loi exponentielle.

b. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, la probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins t années.

3. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note N_t la variable aléatoire donnant le nombre d'imprimantes qui fonctionnent au temps t.
Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier $n \in [\![0, 10]\!]$,

$$\mathbf{P}(N_t = n) = \binom{10}{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^n \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10-n}.$$

4. Soit D la variable aléatoire donnant le nombre d'années de fonctionnement de l'usine.

a. Déterminer la fonction de répartition de D.

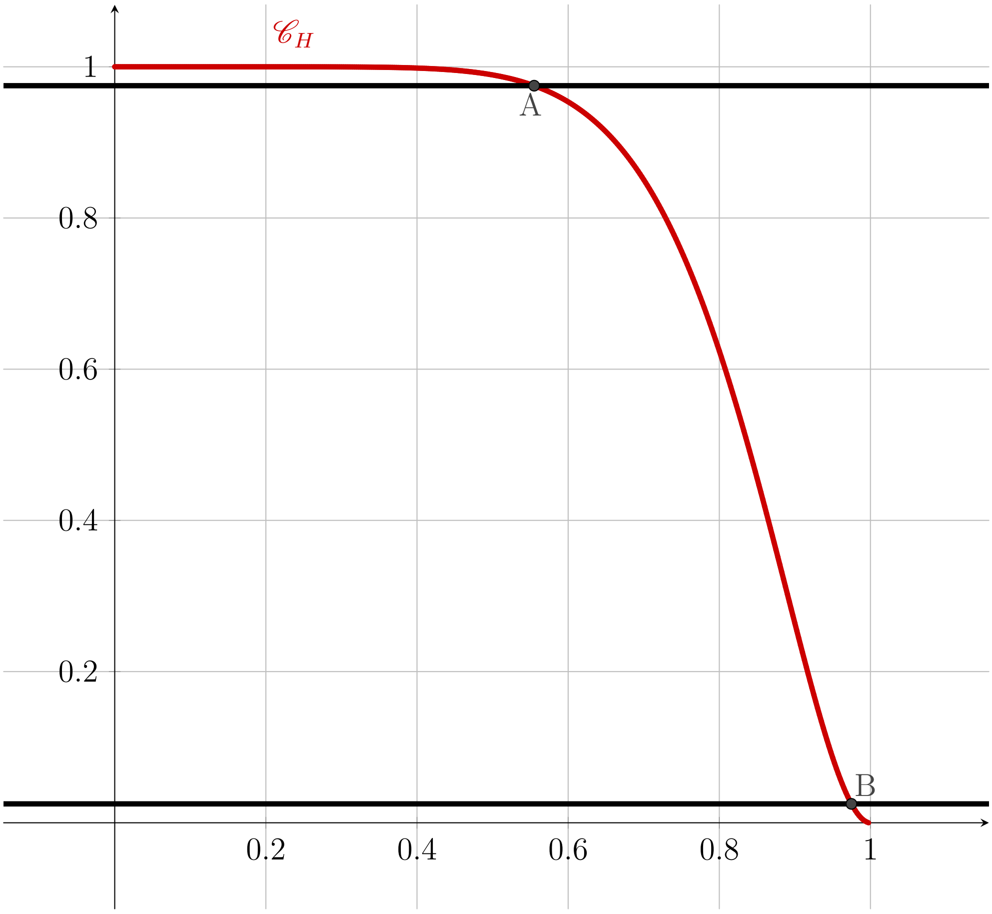
b. Déterminer un intervalle de temps $I = [u\,;v]$ tel que $\mathbf{P}(D \in I) = 0{,}95$.

Solution.

1. **a.** La fonction H est un polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,;1]$ et, pour tout $x \in [0\,;1]$,
$$H'(x) = -90x^8 + 90x^9 = 90x^8(x-1).$$
Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $x^8 \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ donc $H'(x) \leqslant 0$. De plus, H' ne s'annule qu'en 0 et 1 donc $\boxed{H \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;1]}$.

   b. La fonction H est continue (car elle est dérivable) et strictement décroissante sur $[0\,;1]$. De plus, $H(0) = 1$ et $H(1) = 0$ donc, par le théorème de la bijection continue, $\boxed{H \text{ réalise une bijection de } [0\,;1] \text{ dans lui-même}}$.

   c. On trace, à l'aide de GeoGebra, la courbe de H et les droites d'équation $y = 0{,}025$ et $y = 0{,}975$.



Les points d'intersection A et B ont pour abscisses respectives environ 0,555 et 0,975 donc $\boxed{a \approx 0{,}555 \text{ et } b \approx 0{,}975}$.

   d. Comme H est bijective,
$$H(\mathrm{e}^{-t}) = 0{,}025 \iff \mathrm{e}^{-t} = b \iff -t = \ln(b) \iff t = -\ln(b).$$
Ainsi, $\boxed{t_1 = -\ln(b) \approx 0{,}025}$.

De la même façon, $\boxed{t_2 = -\ln(a) \approx 0{,}589}$.

2. a. Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout réel x,

- si $x < 0$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = 0$;
- si $x \geqslant 0$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est définie par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}.$$

b. Soit un réel $t \geqslant 0$. La probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins t années est

$$\mathbf{P}(D_1 \geqslant t) = 1 - \mathbf{P}(D_1 < t) = 1 - F_{D_1}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

(la deuxième égalité découlant du fait que D_1 est une variable aléatoire à densité donc $\mathbf{P}(D_1 < t) = \mathbf{P}(D_1 \leqslant t)$).

La durée de vie moyenne d'une imprimante est 5 ans donc $\mathbf{E}(D_1) = 5$ i.e. $\frac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = \frac{1}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins } t \text{ années est } \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}}$.

3. Soit $t \geqslant 0$. Notons X_k la variable aléatoire valant 1 si l'imprimante k fonctionne au temps t et 0 sinon. Ainsi, X_k est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$. De plus, $N_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} X_k$ et les variables aléatoires X_k sont indépendantes car les durées de vies D_k sont indépendantes. Ainsi, N_t suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

On conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in [\![0, 10]\!] \quad \mathbf{P}(N_t = n) = \binom{10}{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^n \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10-n}}.$$

4. a. Par définition, pour tout réel $t < 0$, $\mathbf{P}(D \leqslant t) = 0$. De plus, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D \leqslant t) &= \mathbf{P}(N_t < 9) = 1 - \mathbf{P}(N_t = 9) - \mathbf{P}(N_t = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{9}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right) - \binom{10}{10}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \\ &= 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right) - \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \\ &= 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 + 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} - \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \\ &= 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 + 9\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_D de D est définie par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 + 9\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

5. Comme D est une variable aléatoire à densité, pour tous réels a et b,

$$\mathbf{P}(D \in [u\,;v]) = \mathbf{P}(D \leqslant v) - \mathbf{P}(D < u) = \mathbf{P}(D \leqslant v) - \mathbf{P}(D \leqslant u) = F_D(v) - F_D(u).$$

Or, pour tout $t \geqslant 0$, $-t \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-t} \in [0\,;1]$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $F_D(t) = H(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}})$. On déduit alors de la question **1.** que

$$\mathbf{P}(D \in [5t_1\,;5t_2]) = H(\mathrm{e}^{-t_2}) - H(\mathrm{e}^{-t_1}) = 1 - 0{,}025 - 0{,}025 = 0{,}95.$$

Ainsi, l'intervalle $\boxed{I = [5t_1\,;5t_2] \approx [0{,}125\,;2{,}945] \text{ convient}}$.

Sujet 37. Montage de panneaux solaires (O2)

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : une variable aléatoire X est une variable à densité si et seulement si sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points. De plus, dans ce cas, on peut obtenir une densité de X en dérivant la fonction F en tout point où elle est dérivable et en lui donnant la valeur arbitraire 0 en tout point où F n'est pas dérivable.

Soit un nombre réel $\lambda > 0$.

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a. Donner une densité de Z, notée f_Z, ainsi que son espérance (sous la forme d'une intégrale, puis donner sa valeur sans calcul).

b. Donner le moment d'ordre 2 de Z, c'est-à-dire $\mathbf{E}(Z^2)$.

2. Soit f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

3. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes T_1 et T_2 admettant toutes deux la fonction f comme densité de probabilité.

a. Déterminer leur fonction de répartition F.

b. Montrer que T_1 et T_2 admettent une espérance et la calculer.

On considère différents systèmes de montage de panneaux solaires. On se limite aux systèmes comportant deux panneaux. On admet que T_1 modélise la durée du vie du premier panneau et T_2 la durée de vie du second.

4. Le premier système, noté S, tombe en panne lorsque l'un de ses deux éléments tombe en panne. On dit que le système S est monté en série. On note U l'instant où le système S tombe en panne.

a. Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(U > k)$ en fonction de T_1 et T_2.

b. Déterminer la fonction de répartition F_U de U puis une densité f_U de U.

5. Le second système, noté S', tombe en panne lorsque ses deux éléments tombent en panne. On dit que le système S' est monté en parallèle. On note V l'instant où le système S' tombe en panne.

a. Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(V \leqslant k)$ en fonction de T_1 et T_2.

b. Déterminer la fonction de répartition F_V de V puis une densité f_V de V.

Solution.

1. a. Par définition, une densité de Z est la fonction f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

Comme f_Z est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, l'espérance de Z est

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t}.$$

Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{\lambda}}$.

b. Soit $A > 0$. Alors,

$$\int_0^A t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \lambda t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t^2$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : t \longmapsto 2t$ et $v' : t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^A t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A - \int_0^A 2t \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = -A^2 \mathrm{e}^{-\lambda A} + 2\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, Comme $\lambda > 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{A \to +\infty} A^2 \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$ et, d'après les résultats de la question **1.**,

$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^A t f_Z(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ainsi, par somme de limite, $\displaystyle\int_0^A t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{2}{\lambda^2}$ donc, par le théorème de transfert, Z admet un moment d'ordre 2 et $\boxed{\mathbf{E}(Z^2) = \frac{2}{\lambda^2}}$.

2. La fonction f est nulle sur $]-\infty\,;0[$ et continue sur $[0\,;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in\,]-\infty\,;0[$, $f(t) = 0 \geqslant 0$ et, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t) = \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} \geqslant 0$ car $t \geqslant 0$ et exp est à valeurs positives. Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda \int_0^{+\infty} \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \mathbf{E}(Z) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}$.

3. a. Soit un réel x. Si $x < 0$ alors

$$F(x) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Si $x \geqslant 0$ alors

$$F(x) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant x) = \int_0^x \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t \times \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^x t \times \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x 1 \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= -x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

donc $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Ainsi, F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}.$$

b. Comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$, les variables T_1 et T_2 admettent une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or,

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\mathbf{E}(Z^2).$$

Ainsi, d'après le résultat de la question **1.b.**, cette intégrale converge et vaut $\lambda \times \dfrac{2}{\lambda^2} = \dfrac{2}{\lambda}$ donc T_1 et T_2 admette une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(T_1) = \mathbf{E}(T_2) = \dfrac{2}{\lambda}}$.

4. a. L'évènement $(U > k)$ signifie que le système fonctionne au-delà de l'instant k donc que les deux panneaux fonctionnent au-delà de l'instant k.

Ainsi, $\boxed{(U > k) = (T_1 > k) \cap (T_2 > k)}$.

b. Comme les variables aléatoires T_1 et T_2 donc indépendantes, on en déduit que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}F_U(x) &= \mathbf{P}(U \leqslant x) = 1 - \mathbf{P}(U > x) = 1 - \mathbf{P}((T_1 > x) \cap (T_2 > x)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(T_1 > x)\mathbf{P}(T_2 > x) = 1 - (1 - \mathbf{P}(T_1 \leqslant x))(1 - \mathbf{P}(T_2 \leqslant x)) \\ &= 1 - (1 - F(x))(1 - F(x)) = 1 - (1 - 2F(x) + F(x)^2) \\ &= 1 - 1 + 2F(x) - F(x)^2\end{aligned}$$

soit finalement, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_U(x) = 2F(x) - F(x)^2}$.

La fonction F_U est continue sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car F l'est également) donc U est une variable aléatoire à densité f_U et, pour tout $t \neq 0$, $f_U(t) = F_U'(t)$.

Ainsi, pour tout réel $t < 0$, $f_U(t) = 2F'(t) - 2F'(t)F(t) = 0$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} f_U(t) &= 2F'(t) - 2F'(t)F(t) = 2f(t) - 2f(t)F(t) \\ &= 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} - 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\ &= 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\ &= 2\lambda^2 t(1 + \lambda t)\mathrm{e}^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

Ainsi, une densité f_U de U est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda^2 t(1 + \lambda t)\mathrm{e}^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

5. a. L'évènement $(V \leqslant k)$ signifie que le système tombe en panne au plus tard à l'instant k donc que les deux panneaux fonctionnent sont en panne à l'instant k.

Ainsi, $\boxed{(V \leqslant k) = (T_1 \leqslant k) \cap (T_2 \leqslant k)}$.

b. Comme les variables aléatoires T_1 et T_2 donc indépendantes, on en déduit que, pour tout réel x,

$$F_V(x) = \mathbf{P}(V \leqslant x) = \mathbf{P}((T_1 \leqslant x) \cap (T_2 \leqslant x)) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant x)\mathbf{P}(T_2 \leqslant x)$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_V(x) = F(x)^2}$.

La fonction F_V est continue sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car F l'est également) donc V est une variable aléatoire à densité f_V et, pour tout $t \neq 0$, $f_V(t) = F_V'(t)$.

Ainsi, pour tout réel $t < 0$, $f_V(t) = 2F'(t)F(t) = 0$ et, pour tout $t > 0$,

$$f_V(t) = 2F'(t)F(t) = 2f(t) - 2f(t)F(t) = 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}).$$

Ainsi, une densité f_V de V est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

Sujet 38. La course à pied (O2)

Lors d'une course nocturne, un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de coureurs passent la ligne d'arrivée entre minuit et une heure du matin. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on modélise l'heure d'arrivée du coureur numéro i par une variable aléatoire U_i de loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$. On suppose que toutes les variables aléatoires U_i sont mutuellement indépendantes. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_{U_i} la fonction de répartition de U_i et f_{U_i} une fonction densité de U_i.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner l'expression d'une fonction de densité de U_i et l'espérance de U_i.

2. Calculer la probabilité qu'un coureur arrive entre 00h20 et 00h30.

3. On définit pour $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire T_k égale au temps du k-ième coureur le plus rapide. On note F_k la fonction de répartition de T_k.

a. Soit $t \in [0\,;1]$. Exprimer l'évènement $(T_1 > t)$ à l'aide des variables aléatoires U_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t)$.

b. Que vaut $F_1(t)$ lorsque $t > 1$? lorsque $t < 0$? lorsque $t \in [0\,;1]$?

c. En déduire l'expression d'une fonction de densité de T_1.

d. Lorsqu'il y a 12 coureurs en lice, calculer l'espérance de T_1.

4. Pour tout réel $t \in [0\,;1]$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de coureurs arrivés dans l'intervalle de temps $[0\,;t]$. Dans toute cette question, on considère un réel $t \in [0\,;1]$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$.

a. Reconnaître la loi de N_t.

b. Exprimer l'évènement $(T_k \leqslant t)$ en fonction de N_t et de k.

c. Justifier que $\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$.

d. Montrer que $F_k(t) = 1 - F_{n-k+1}(1-t)$.

e. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathbf{E}(T_k) = \displaystyle\int_0^1 (1 - F_k(x))\,\mathrm{d}x$.

Solution.

1. Une densité de U_i est la fonction f_{U_i} définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{U_i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Par propriété, $\boxed{\mathbf{E}(U_i) = \dfrac{1}{2}}$.

2. Comme 20 min $= \frac{1}{3}$ h et 30 min $= \frac{1}{2}$ h, la probabilité que le coureur i arrive entre 0h20 et 0h30 est

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} \leqslant U_i \leqslant \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité qu'un coureur arrive entre 0h20 et 0h30 est } \dfrac{1}{6}}$.

3. a. L'évènement $(T_1 > t)$ est réalisé si le coureur le plus rapide arrive après l'instant t, ce qui signifie que tous les coureur arrivent après l'instant t. Ainsi,

$$\boxed{(T_1 > t) = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i > t)}.$$

Comme les variables U_i sont mutuellement indépendantes, on en déduit que

$$\mathbf{P}(T_1 > t) = \mathbf{P}(U_1 > t)\mathbf{P}(U_2 > t) \cdots \mathbf{P}(U_n > t).$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(U_i > t) = \int_t^1 1 \,\mathrm{d}x = 1 - t$$

donc $\mathbf{P}(T_1 > 1) = (1-t)^n$. Comme $(T_1 \leqslant t) = \overline{(T_1 > t)}$, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{P}(T_1 \leqslant t) = 1 - (1-t)^n.}$$

b. Si $t > 1$, l'évènement $(T_1 \leqslant t)$ est un évènement certain donc $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t) = 1$ i.e. $\boxed{F_1(t) = 1}$.
Si $t < 0$, l'évènement $(T_1 \leqslant t)$ est un évènement impossible donc $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t) = 0$ i.e. $\boxed{F_1(t) = 0}$.
Si $t \in [0\,;1]$, d'après la question précédente, $\mathbf{P}(T_1 < t) = 1 - (1-t)^n$ donc $\boxed{F_1(t) = 1 - (1-t)^n}$.

c. Pour tout $t \in \,]-\infty\,;0[$, $F_1'(t) = 0$, pour tout $t \in \,]1\,;+\infty[$, $F_1'(t) = 0$ et, pour tout $t \in \,]0\,;1[$, $F_1'(t) = n(1-t)^{n-1}$ donc une densité de T_1 est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

d. Comme g est nulle en-dehors du segment $[0\,;1]$, T_1 admet une espérance et

$$\mathbf{E}(T_1) = \int_0^1 tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 12t(1-t)^{11}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -(1-t)^{12}$. Ce sont des polynômes donc elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto 12(1-t)^{11}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$\mathbf{E}(T_1) = \left[-t(1-t)^{12}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-(1-t)^{12})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{12}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{13}}{13}\right]_0^1$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(T_1) = \dfrac{1}{13}}$.

4. a. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire égale à 1 si le coureur k arrive dans l'intervalle de temps $[0\,;1]$ et 0 sinon. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(U_k \leqslant t) = 1 - \mathbf{P}(U_k > t) = t$. Comme les variables U_k sont mutuellement indépendantes, il en est de même des variables X_k donc, comme $N_t = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on conclut que $\boxed{N_t \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } t}$.

b. L'évènement $(T_k \leqslant t)$ est réalisé si les k premiers coureurs sont arrivés dans l'intervalle de temps $[0\,;t]$ donc $\boxed{(T_k \leqslant t) = (N_t \geqslant k)}$.

c. On en déduit que

$$\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \mathbf{P}(N_t \geqslant k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k}^{n} (N_t = i)\right)$$

donc, comme les évènements $(N_t = i)$ sont deux à deux incompatibles,

$$\boxed{\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}}.$$

d. Ainsi,

$$\begin{aligned} F_k(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} &\underset{j=n-i}{=} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{n-j} t^{n-j} (1-t)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} t^{n-j}(1-t)^j = 1 - \sum_{j=n-k+1}^{n} \binom{n}{j} (1-t)^j (1-(1-t)) t^{n-j}. \end{aligned}$$

Or, l'expression trouvée dans la question précédente est valable pour tout $t \in [0\,;1]$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc, comme $1 - t \in [0\,;1]$ et $n - k + 1 \in [\![1, n]\!]$, on conclut que

$$\boxed{F_k(t) = 1 - F_{n-k+1}(1-t)}.$$

e. Comme T_k est à valeurs dans $[0\,;1]$, sa densité est nulle en-dehors de cet intervalle. Ainsi, comme F_k est une primitive d'une densité de T_k,

$$\mathbf{E}(T_k) = \int_0^1 x F_k'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère les fonctions $u : x \longmapsto x$ et F_k qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ (car F_k est un polynôme) donc, en intégrant par parties,

$$\mathbf{E}(T_k) = [xF_k(x)]_0^1 - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x = F_k(1) - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, l'évènement $(T_k \leqslant 1)$ est un évènement certain donc $F_k(1) = 1$ et ainsi

$$\mathbf{E}(T_k) = 1 - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x$$

et, par linéarité de l'intégrale, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{E}(T_k) = \int_0^1 (1 - F_k(x))\,\mathrm{d}x}.$$

Sujet 39. Étude de la croissance d'une plante (O2)

La taille X d'une plante suit, en conditions naturelles, une loi uniforme sur l'intervalle $[3\,;8]$. Dans une pépinière, à la fin de la croissance naturelle de la plante :

— si sa taille est inférieure ou égale à 4, on lui met un engrais qui fait doubler sa taille ;
— si sa taille est supérieure à 4, on ne fait rien.

On note Y la variable aléatoire correspondant à la taille finale de la plante.

1. Donner une densité f_X de X, ainsi que la fonction de répartition F_X de X.

2. Exprimer Y en fonction de X, puis donner l'ensemble des valeurs prises par Y.

3. Pour tout réel t, calculer $P\left[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)\right]$ et $P\left[(Y \leqslant t) \cap (X > 4)\right]$. *On discutera selon les valeurs du réel t.*

4. En déduire que la fonction de répartition F_Y de Y est donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4 \\ \frac{t-4}{5} & \text{si } 4 \leqslant t < 6 \\ \frac{3t-14}{10} & \text{si } 6 \leqslant t \leqslant 8 \\ 1 & \text{si } t > 8 \end{cases}.$$

5. Démontrer que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

6. En admettant que Y est une variable aléatoire à densité, en donner une densité f_Y.

7. Calculer l'espérance de Y.

Solution.

1. Par définition, une densité de X est f_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [3\,;8] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition F_X de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Si $t < 3$ alors, pour tout $(X \leqslant t)$ est une évènement impossible donc $F_X(t) = 0$.
Si $t \in [3\,;8]$ alors

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{5}\right]_3^t = \frac{t-3}{5}$$

Si $t > 8$ alors $(X \leqslant t)$ est une évènement certain donc $F_X(t) = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ \frac{t-3}{5} & \text{si } t \in [3\,;8] \\ 1 & \text{si } t > 8. \end{cases}}$.

2. Si $X \leqslant 4$ alors $Y = 2X$ et si $X > 4$ alors $Y = X$. Dans le premier cas, Y prend les valeurs entre 6 et 8 et, dans le second cas, les valeurs entre 4 (exclu) et 8 donc $\boxed{Y(\Omega) =]4\,;8]}$.

3. On remarque que $(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4) = (2X \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)$.
Si $t < 6$ alors $(2X \leqslant t) = \varnothing$ car $X \geqslant 3$ donc $\mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] = 0$.
Si $t > 8$ alors $(2X \leqslant t) \cap (X \leqslant 4) = (X \leqslant 4)$ donc $\mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] = \mathbf{P}(X \leqslant 4) = \frac{1}{5}$.
Si $6 \leqslant t \leqslant 8$ alors $(2X \leqslant t) \cap (X \leqslant 4) = (2X \leqslant t) = (X \leqslant \frac{t}{2})$ donc, dans ce cas-là, $\mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] = \mathbf{P}(X \leqslant \frac{t}{2}) = \frac{t-6}{10}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ \mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] = \begin{cases} 0 & \text{si} t < 6 \\ \frac{t-6}{10} & \text{si } 6 \leqslant t \leqslant 8 \\ \frac{1}{5} & \text{si } t > 8 \end{cases}}$.

On remarque que $(Y \leqslant t) \cap (X > 4) = (X \leqslant t) \cap (X > 4)$.
Si $t < 4$ alors $(X \leqslant t) \cap (X > 4) = \varnothing$ donc $\mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X > 4)] = 0$.
Si $4 \leqslant t \leqslant 8$ alors $(X \leqslant t) \cap (X > 4) = (4 < X \leqslant 4)$ donc $\mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] = F_X(t) - F_X(4) = \frac{t-3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{t-4}{5}$.
Si $t > 8$ alors $(X < t) \cap (X > 4) = (4 < X \leqslant 8) = F_X(8) - F_X(4) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ \mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] = \begin{cases} 0 & \text{si} t < 4 \\ \frac{t-4}{5} & \text{si } 4 \leqslant t \leqslant 8 \\ \frac{4}{5} & \text{si } t > 8 \end{cases}}$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme les évènements $(X \leqslant 4)$ et $(X > 4)$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilité totales,

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leqslant t) = \mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)] + \mathbf{P}[(Y \leqslant t) \cap (X > 4)].$$

Ainsi, grâce au résultat de la question précédente,
• si $t < 4$, $F_Y(t) = 0 + 0 = 0$;
• si $4 \leqslant t < 6$, $F_Y(t) = \frac{t-4}{5} + 0 = \frac{t-4}{5}$;
• si $6 \leqslant t \leqslant 8$, $F_Y(t) = \frac{t-6}{10} + \frac{t-4}{5} = \frac{3t-14}{10}$;
• si $t > 8$, $F_Y(t) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4 \\ \frac{t-4}{5} & \text{si } 4 \leqslant t < 6 \\ \frac{3t-14}{10} & \text{si } 6 \leqslant t \leqslant 8 \\ 1 & \text{si } t > 8 \end{cases}}$.

5. La fonction F_Y est clairement continue sur chaque intervalle $]-\infty\,;4[$, $[4\,;6[$, $[6\,;8[$ et $[8\,;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{t\to4^-} F_Y(t) = \lim\limits_{t\to4} 0 = 0 = F_Y(4)$, ce qui assure que F_Y est continue en 4.

De même, $\lim\limits_{t\to6^-} F_Y(t) = \lim\limits_{t\to6} \frac{t-4}{5} = \frac{2}{5} = F_Y(6)$, ce qui assure que F_Y est continue en 6.

Enfin, $\lim\limits_{t\to8^-} F_Y(t) = \lim\limits_{t\to8} \frac{3t-14}{10} = \frac{10}{10} = 1 = F_Y(8)$, ce qui assure que F_Y est continue en 8.

Ainsi, on conclut que $\boxed{F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

6. Une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y partout où elle est dérivable (et en prenant des valeurs arbitraires ailleurs) donc une densité de Y est la fonction f_Y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 4 \leqslant t < 6 \\ \frac{3}{10} & \text{si } 6 \leqslant t < 8 \\ 0 & \text{si } t > 8 \end{cases}}.$$

7. Comme f_Y est nulle en dehors du segment $[4\,;8]$, Y est une espérance et

$$\mathbf{E}(Y) = \int_4^8 t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_4^6 \frac{t}{5}\,\mathrm{d}t + \int_6^8 \frac{3t}{10}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{10}\right]_4^6 + \left[\frac{3t^2}{20}\right]_6^8 = \frac{36}{10} - \frac{16}{10} + \frac{3\times64}{20} - \frac{3\times36}{20}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{31}{5}}$.

Sujets de probabilités : couples de variables aléatoires

Sujet 40. Rangs d'apparition des deux premières boules noires (C3)

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.

Partie A. Tirage sans remise

Dans cette partie, on effectue des tirages sans remise.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. Donner $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.

2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

4. Déterminer les lois marginales de X_1 et de X_2.

5. On définit la variable aléatoire $Y = 6 - X_2$. Montrer que Y a la même loi que X_1.

6. Donner une relation entre $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.

7. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et en déduire $\mathbf{E}(X_2)$.

Partie B. Tirage avec remise

Dans cette partie, on effectue des tirages avec remise.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et Y_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. On considère le programme suivant, écrit en langage Python.

```python
from random import *

p = 2/5
nb_tirages = 1
while random() > p:
  nb_tirages += 1
print(nb_tirages)
```

Que renvoie ce programme ?

2. Donner la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

3. Donner $Y_2(\Omega)$.

4. Déterminer la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2).

5. En déduire la loi de Y_2.

6. On définit la variable aléatoire $Z = Y_2 - Y_1$. Montrer que Z a la même loi que Y_1.

7. Donner une relation entre $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.

8. En déduire l'espérance de Y_2.

Solution.

Partie A. Tirage sans remise

1. Comme il n'y a pas remise, $X_1(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et $X_2(\Omega) = [\![2,5]\!]$.

2. Comme $X_1 < X_2$, $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) = \varnothing$ donc, $\mathbf{P}((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = 0$. Or, par la formule de probabilités composées, $\mathbf{P}(X_1 = 2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$ et $\mathbf{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$ donc $\mathbf{P}(X_1 = 2)\mathbf{P}(X_2 = 2) \neq 0$. Ainsi, $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3. Comme on l'a dit, si $i \geqslant j$, $\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = 0$. Ensuite, pour tout $(i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![2,5]\!]$, la probabilité de l'évènement $(X_1 = i, X_2 = j)$ est la probabilité que, dans une permutation des 5 boules, il y ait une boule noire au i-ème tirage et au j-ième tirage. Or, il y a $5! = 120$ permutations et il y a $2! \times 3! = 12$ façons de répartir les boules pour que la i-ème et la j-ième soient noires ($2\,!$ façons de placer les deux boules noires aux rangs i et j et $3!$ façons de placer les boules blanches dans les 3 rangs restants). Par équiprobabilité, on en déduit que $\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$.

Ainsi, la loi conjointe de (X_1, X_2) est donnée par

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![2,5]\!] \quad \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

4. On peut utiliser une tableau pour déterminer les lois marginales :

X_2 \ X_1	1	2	3	4	Loi de X_2
2	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
Loi de X_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

5. Comme $X_2(\Omega) = [\![2,5]\!]$, $Y(\Omega) = [\![6-5, 6-2]\!] = [\![1,4]\!] = X_1(\Omega)$. De plus, d'après le tableau ci-dessus,

- $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 5) = \dfrac{2}{5} = \mathbf{P}(X_1 = 1)$
- $\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 4) = \dfrac{3}{10} = \mathbf{P}(X_1 = 2)$
- $\mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 3) = \mathbf{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{5} = \mathbf{P}(X_1 = 3)$
- $\mathbf{P}(Y = 4) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 4) = \mathbf{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{10} = \mathbf{P}(X_1 = 4)$

Ainsi, $\boxed{Y \text{ a la même loi de } X_1}$.

6. On en déduit que $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(6 - X_2)$ donc, par linéarité de l'espérance, $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 6 - \mathbf{E}(X_2)}$.

7. Par définition, $\mathbf{E}(X_1) = 1 \times \dfrac{2}{5} + 2 \times \dfrac{3}{10} + 3 \times \dfrac{1}{5} + 4 \times \dfrac{1}{10}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 2}$. Comme $\mathbf{E}(X_1) = 6 - \mathbf{E}(X_2)$, on en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = 4}$.

Partie B. Tirage avec remise

1. Ce programme simule la variable aléatoire Y_1 i.e. il renvoie le nombre (aléatoire) de tirages nécessaires pour obtenir la première boule noire.

2. La variable Y_1 donne le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli (puisqu'il y a remise) donc $\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{5}\right)}$. Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(Y_1) = \dfrac{5}{2}}$ et $\mathbf{V}(Y_1) = \dfrac{1 - \frac{2}{5}}{(\frac{2}{5})^2} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{25}{4}$ donc $\boxed{\mathbf{V}(Y_1) = \dfrac{15}{4}}$.

3. La deuxième boule noire arrive au minimum au deuxième tirage donc $\boxed{Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.

4. Comme précédemment, si $(i, j) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)$ est un couple tel que $i \geqslant j$ alors $\mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = 0$.

Soit $(i, j) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)$ tel que $i < j$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k : « obtenir une boule noire au k-ième tirage ». Alors,

$$(Y_1 = i, Y_2 = j) = \overline{N_1} \cap \cdots \cap \overline{N_{i-1}} \cap N_i \cap \overline{N_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{N_{j-1}} \cap N_j$$

donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{j-i-1} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1+j-i-1} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2}.$$

Ainsi, la loi conjointe de (Y_1, Y_2) est donnée par

$$\boxed{\forall (i, j) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega) \quad \mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = \begin{cases} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

5. Comme $(\{Y_1 = i\})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, on déduit de la formule des probabilités totales que

$$\forall j \in Y_2(\Omega) \quad \mathbf{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2} = (j - 1) \times \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2}$$

car les termes sommés ne dépendent pas de i.

Ainsi, la loi de Y_2 est donnée par :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\} \quad \mathbf{P}(Y_2 = j) = \frac{4(j-1)}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2}}.$$

6. Comme $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, comme $(\{Y_1 = i\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, on déduit de la formule de probabilités totales que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k, Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_2 - Y_1 = k, Y_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_2 - i = k, Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_2 = i + k, Y_1 = i) \\
&\underset{i+k>i}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{i+k-2} = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{i} \\
&\underset{p=i-1}{=} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{p+1} = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \times \frac{3}{5}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{p} \\
&\underset{0\leqslant\frac{3}{5}<1}{=} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

soit finalement $\mathbf{P}(Z = k) = \dfrac{2}{5}\left(1 - \dfrac{2}{5}\right)^{k-1}$ i.e. $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{5}\right)$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{Z \text{ a la même loi que } Y_1}$.

7. On en déduit que $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y_2 - Y_1)$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_2) - \mathbf{E}(Y_2)$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(Y_2) = 2\mathbf{E}(Y_1)}$.

8. On conclut donc que $\mathbf{E}(Y_2) = 2 \times \dfrac{5}{2}$ i.e $\boxed{\mathbf{E}(Y_2) = 5}$.

Sujet 41. Lancers simultanés de n dés (C8)

On lance simultanément n dés bien équilibrés.

À l'étape 1, on note X_1 le nombre de dés ayant donné 6, puis on les exclut et on recommence avec les dés restants, en excluant à chaque étape les dés ayant donné 6.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

- X_i le nombre de dés ayant donné 6 à l'étape i ;
- Y_i le nombre total de dés ayant donné 6 après l'étape i.

1. Premières propriétés

a. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

b. Donner une relation entre Y_1 et X_1.

c. Donner une relation entre Y_2, X_1 et X_2.

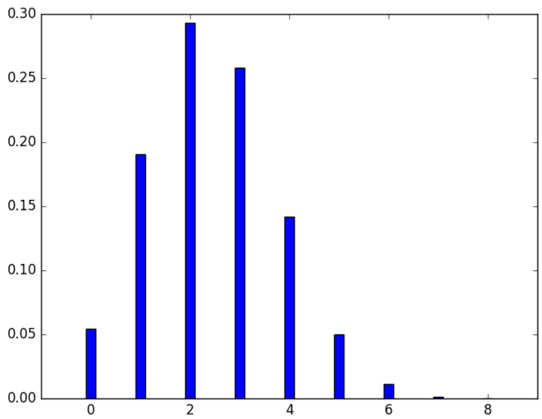
d. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = k$.

e. Montrer que, pour tous entiers k, i et n tels que $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$,

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

2. Loi de Y_2

a. On considère le diagramme suivant, donnant la loi de Y_2 pour $n = 8$.



À l'aide de ce diagramme, estimer $\mathbf{E}(Y_2)$ et émettre une hypothèse sur la loi de Y_2 et ses paramètres.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y_2 = i) = \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}\left((Y_1 = k) \cap (X_2 = i - k)\right).$$

c. En déduire que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y_2 = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{11}{36}\right)^i \left(\frac{25}{36}\right)^{n-i}.$$

d. Donner alors la loi de Y_2.

e. Retrouver le résultat conjecturé pour $\mathbf{E}(Y_2)$ dans le cas où $n = 8$.

3. Loi de Y_j

Démontrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_j suit une loi binomiale de paramètres n et p_j où p_j est un réel appartenant à $]0\,;1[$.

On procédera par récurrence, en s'inspirant de la démarche de la question 2). On précisera une relation de récurrence entre p_j *et* p_{j+1}.

Solution.

1. a. Le lancer des n dés constitue un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « obtenir un 6 ». Ainsi, la variable aléatoire X_1 qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}(n, \frac{1}{6})}$.

Par propriété, on a donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \frac{n}{6} \text{ et } \mathbf{V}(X_1) = \frac{5n}{36}}$.

b. Par définition, $\boxed{Y_1 = X_1}$.

c. Par définition, $\boxed{Y_2 = X_1 + X_2}$.

d. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si $X_1 = k$ est réalisé alors, à la seconde étape, on lance $n-k$ dés et, pour la même raison que dans la question, le nombre de 6 obtenu suit une loi binomiale de paramètre $n-k$ et $\frac{1}{6}$. Ainsi, la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = k$ est la loi $\mathscr{B}(n-k, \frac{1}{6})$.

e. Soit k, i et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$. Alors,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-k-(i-k))!} \\ &= \frac{n!}{k!} \times \frac{1}{(i-k)!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!} \times \frac{1}{k!(i-k)!} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!}\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}}$.

2. a. On peut conjecture à l'allure du diagramme que $\mathbf{E}(Y_2) \approx 2{,}5$ et que Y_2 suit une loi binomiale de paramètres 8 et (environ) $\frac{2{,}5}{8} = \frac{5}{16}$.

b. Comme $((Y_1 = k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_2 = i) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_1 = k) \cap (Y_2 = i)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_1 = k) \cap (Y_1 + X_2 = i)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_1 = k) \cap (k + X_2 = i)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_1 = k) \cap (X_2 = i - k))\end{aligned}$$

De plus, si $k > i$ alors $i - k < 0$ donc $(X_2 = i - k) = \varnothing$ et, dans ce cas, on a donc $\mathbf{P}((Y_1 = k) \cap (X_2 = i - k)) = 0$. Dès lors,

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_2 = i) = \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}((Y_1 = k) \cap (X_2 = i - k))}.$$

c. On en déduit que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y_2 = i) = \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}(Y_1 = k)\mathbf{P}(X_2 = i-k \mid Y_1 = k) = \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}(X_1 = k)\mathbf{P}(X_2 = i-k \mid X_1 = k).$$

Or, on a vu que la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $X_1 = k$ est la loi $\mathscr{B}(n-k, \frac{1}{6})$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y_2 = i) &= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \times \binom{n-k}{i-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-(i-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-i-k} \qquad \text{d'après } \mathbf{1.e.} \\
&= \binom{n}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} 1^k \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k} \\
&= \binom{n}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2i} \left(1 + \frac{5}{6}\right)^i \qquad \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= \binom{n}{i} \left(\frac{11}{36}\right)^i \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{n-i}
\end{aligned}$$

soit finalement,

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_2 = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{11}{36}\right)^i \left(\frac{25}{36}\right)^{n-i}}.$$

d. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y_2) = \binom{n}{i} \left(\frac{11}{36}\right)^i \left(1 - \frac{11}{36}\right)^{n-i}$$

donc $\boxed{Y_2 \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{11}{36}}$.

e. Ainsi, si $n = 8$, $\mathbf{E}(Y_2) = \frac{11 \times 8}{36} = \frac{22}{9}$ ce qui est assez proche de la valeur conjecturée puisque $\frac{22}{9} \approx 2{,}4$.

3. Considérons, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{H}(j)$ « il existe $p_j \in \,]0\,;1[$ tel que Y_j suive une loi binomiale de paramètre n et p_j ».

• **Initialisation.** Comme $Y_1 = X_1$ suit une loi binomiale de paramètre n et $p_1 = \frac{1}{6}$, $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}(j)$ est vraie.

En utilisant le formule de probabilités totales avec le système complet d'évènements $((Y_j = k))_{k\in[\![0,n]\!]}$, on obtient, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_{j+1} = i) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_j = k) \cap (Y_{j+1} = i)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_j = k) \cap (Y_j + X_{j+1} = i))\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_j = k) \cap (k + X_{j+1} = i)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}((Y_j = k) \cap (X_{j+1} = i - k))\end{aligned}$$

De plus, si $k > i$ alors $i - k < 0$ donc $(X_{j+1} = i - k) = \varnothing$ et, dans ce cas, on a donc $\mathbf{P}((Y_j = k) \cap (X_{j+1} = i - k)) = 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_{j+1} = i) &= \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}((Y_j = k) \cap (X_{j+1} = i - k))\\ &= \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}((Y_j = k)\mathbf{P}(X_{j+1} = i - k \mid Y_j = k).\end{aligned}$$

Or, comme précédemment, la loi conditionnelle de X_{j+1} sachant $(Y_j = k)$ est la loi binomiale de paramètre $n - k$ et $\frac{1}{6}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_{j+1} = i) &= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k} \times \binom{n-k}{i-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-(i-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k} 6^k\\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} (1-p_j)^n \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \left(\frac{6p_j}{1-p_j}\right)^k 1^{i-k}\\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} (1-p_j)^n \left(\frac{6p_j}{1-p_j} + 1\right)^i\\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} (1-p_j)^n \left(\frac{5p_j + 1}{1-p_j}\right)^i\\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{5p_j+1}{6}\right)^{i} \left(\frac{5(1-p_j)}{6}\right)^{n-i}\\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{5p_j+1}{6}\right)^{i} \left(1 - \frac{5p_j+1}{6}\right)^{n-i}\end{aligned}$$

Ainsi, Y_{j+1} suit une loi binomiale de paramètres n et $p_{j+1} = \frac{5p_j+1}{6}$ (qui appartient à $]0\,;1[$ car $p_j \in]0\,;1[$) donc $\mathcal{H}(j + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, il existe $p_j \in]0\,;1[$, tel que $Y_j \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_j)$. De plus, (p_j) est définie par $p_1 = \frac{1}{6}$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $p_{j+1} = \frac{5p_j+1}{6}$.

Sujet 42. Tirages avec ajout d'une boule blanche (O2)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On effectue des tirages successifs de la manière suivante :

1. si on tire une boule blanche, on la replace dans l'urne et on rajoute une boule blanche,

2. si on tire une boule noire, on la replace dans l'urne mais on ne rajoute rien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages.

1. **a.** Donner la loi de X_1.

b. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2.

c. Déterminer la loi du couple (X_2, X_3) et en déduire la loi de X_3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner l'univers image de X_n.

b. Conjecturer la valeur de $\mathbf{P}(X_n = n)$.

c. Montrer que $(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)$.

d. Après n tirages n'ayant amené que des boules noires, donner le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires de l'urne.
En déduire $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$.

e. Calculer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$. En déduire une expression de $\mathbf{P}(X_n = 0)$ en fonction de n.

f. Après n tirages ayant amené k boules blanches, où $1 \leqslant k \leqslant n$, donner le nombre de boules et le nombre de boules blanches de l'urne.

g. En déduire, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k + 1)$.

h. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = k + 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = k + 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = k)$.
Démontrer ensuite la conjecture de la question **2.b.**.

Solution.

1. a. Au premier tirage, on tire soit une boule blanche soit une boule de façon équiprobable donc $\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$.

b. Au bout de 2 tirages, on a tiré 0, 1 ou 2 boules blanches donc $X_2(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$.

- $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0$ car $X_2 \geqslant X_1$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 2) = 0$ car $X_2 \leqslant X_1 + 1$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$;

On en déduit le tableau suivant donnant la loi conjointe de (X_1, X_2) et celle de X_2 :

X_2 \ X_1	0	1	Loi de X_2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Loi de X_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

c. De même, $X_3(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}$ et si $j \notin \{i, i+1\}$, $\mathbf{P}(X_2 = i, X_3 = j) = 0$. De plus,

- $\mathbf{P}(X_2 = 0, X_3 = 0) = \mathbf{P}(X_2 = 0)\mathbf{P}_{(X_2=0)}(X_3 = 0) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 0, X_3 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 0)\mathbf{P}_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 1)\mathbf{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 1) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{36}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 1, X_3 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 1)\mathbf{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{18}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 2, X_3 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 2)\mathbf{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 2, X_3 = 3) = \mathbf{P}(X_2 = 2)\mathbf{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 3) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$;

On en déduit le tableau suivant donnant la loi conjointe de (X_2, X_3) et celle de X_3 :

X_3 \ X_2	0	1	2	Loi de X_3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{36}$	0	$\frac{19}{72}$
2	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{13}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Loi de X_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Au bout de n tirages, on a tiré entre 0 et n boules blanches donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

b. On a vu que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(X_3 = 3) = \dfrac{1}{4}$.

$\boxed{\text{On peut conjecturer que } \mathbf{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n+1}}$.

c. Étant donné que $X_{n+1} \geqslant X_n \geqslant 0$, si $X_{n+1} = 0$ alors $X_n = 0$. Autrement dit, on a l'inclusion $(X_{n+1} = 0) \subset (X_n = 0)$ donc $\boxed{(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)}$.

d. Si les n premiers tirages n'ont amené que des boules noires, la composition de l'urne n'a pas changé donc $\boxed{\text{il a toujours 1 boule blanche et 1 boule noire}}$.

On en déduit que $\boxed{\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2}}$.

e. Comme $(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}(X_n = 0)\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 0).$$

Ainsi, la suite $(\mathbf{P}(X_k = 0))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. De plus, $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

f. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages, alors on a ajouté k boules blanches : $\boxed{\text{il y a donc } k+2 \text{ boules dont } k+1 \text{ sont blanches}}$.

g. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On déduit de la question précédente que $\boxed{\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \dfrac{k+1}{k+2}}$.

h. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'évènement $(X_{n+1} = k+1)$ est réalisé si $X_n = k+1$ et on tire une boule noire au $(n+1)$-ème tirage ou si $X_n = k$ et on tire une boule blanche au $(n+1)$-ème tirage. On en déduit que

$$(X_{n+1} = k+1) = [(X_n = k+1) \cap (X_{n+1} = k+1)] \cup [(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k+1)]$$

donc, comme cette union est disjointe,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1}=k+1) &= \mathbf{P}((X_n=k+1)\cap(X_{n+1}=k+1)) + \mathbf{P}((X_n=k)\cap(X_{n+1}=k+1)) \\
&= \mathbf{P}(X_n=k+1)\mathbf{P}_{(X_n=k+1)}(X_{n+1}=k+1) \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathbf{P}(X_n=k)\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1) \\
&= \mathbf{P}(X_n=k+1)\times\frac{1}{k+3} + \mathbf{P}(X_n=k)\times\frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1}=k+1) = \frac{1}{k+3}\mathbf{P}(X_n=k+1) + \frac{k+1}{k+2}\mathbf{P}(X_n=k)}.$$

Considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$; « $\mathbf{P}(X_n=n)=\dfrac{1}{n+1}$ ».

Initialisation. Comme $\mathbf{P}(X_0=0)=1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, d'après le résultat précédent

$$\mathbf{P}(X_{n+1}=n+1) = \frac{1}{n+3}\mathbf{P}(X_n=n+1) + \frac{n+1}{n+2}\mathbf{P}(X_n=n).$$

Or, $X_n\leq n$ donc $(X_n=n+1)=\varnothing$ donc

$$\mathbf{P}(X_{n+1}=n+1) = \frac{1}{n+3}\times 0 + \frac{n+1}{n+2}\times\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathbf{P}(X_n=n)=\frac{1}{n+1}}.$$

Sujet 43. Probabilité que $X + Y = Z$ (O2)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 0 à 3.
On effectue trois tirages successifs avec remise.
On note X, Y et Z les variables aléatoires égales au résultat de chacun de ces tirages.
On note p la probabilité de l'évènement $(X + Y = Z)$.

1. Donner les lois de X, Y et Z ainsi que leur espérance et leur variance.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Préciser sa covariance.

3. En déduire la loi de la variable aléatoire $X + Y$. Préciser son espérance et sa variance.

4. En déduire la valeur de p.

5. *Application*
Un forain propose un jeu de loterie avec trois roues identiques, chacune divisée équitablement en quatre cadrans numérotés de 0 à 3.
Le joueur mise 1 euro et fait tourner deux roues, le forain fait tourner la troisième roue.
Le joueur gagne si la somme de ses deux numéros est égale au numéro obtenu par le forain. Il remporte alors la somme de a euros.

a. Exprimer en fonction de a l'espérance de gain du joueur.

b. Pour quelle valeur de a le jeu est-il équitable ? On rappelle que le jeu est équitable lorsque l'espérance du gain est égale à 0.
En déduire pour quelles valeurs de a le jeu est rentable pour le forain.

c. Le joueur décide de rejouer jusqu'à ce qu'il gagne une partie.
En moyenne, combien de parties devra-t-il faire ?

Solution.

1. Comme il y a remise, X, Y et Z suivent toutes une loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$.
Leur espérance est donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} k \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} k = \frac{1}{4} \times \frac{3\times 4}{2} = \frac{3}{2}$.
Pour la variance, calculons d'abord l'espérance de X^2 :

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} k^2 = \frac{1}{4} \times \frac{3\times 4\times 7}{6} = \frac{7}{2}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

2. Comme il y a remise, les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc, $\boxed{\text{pour tout } (i,j) \in [\![0,3]\!]^2,\ \mathbf{P}(X=i, Y=j) = \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=j) = \frac{1}{16}}$.
De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y) = 0}$.

3. Commençons par remarquer que $(X+Y)(\Omega) = [\![0,6]\!]$.
Soit $k \in [\![0,6]\!]$. Alors, comme $((X=i))_{i\in[\![0,3]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(X=i, X+Y=k) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(X=i, Y=k-i).$$

Remarquons que si $k-i<0$ ou si $k-i>3$, $(Y=k-i)=\varnothing$ et, dans ce cas, $\mathbf{P}(X=i, Y=k-i) = 0$ donc

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(X=i, X+Y=k) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(X=i, Y=k-i).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=0) &= \mathbf{P}(X=0,Y=0) = \frac{1}{16}\\
\mathbf{P}(X+Y=1) &= \mathbf{P}(X=1,Y=0)+\mathbf{P}(X=0,Y=1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\\
\mathbf{P}(X+Y=2) &= \mathbf{P}(X=2,Y=0)+\mathbf{P}(X=1,Y=1)+\mathbf{P}(X=0,Y=2) = \frac{3}{16}\\
\mathbf{P}(X+Y=3) &= \mathbf{P}(X=3,Y=0)+\mathbf{P}(X=2,Y=1)+\mathbf{P}(X=1,Y=2)+\mathbf{P}(X=0,Y=3)\\
&= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}\\
\mathbf{P}(X+Y=4) &= \mathbf{P}(X=3,Y=1)+\mathbf{P}(X=2,Y=2)+\mathbf{P}(X=1,Y=3) = \frac{3}{16}\\
\mathbf{P}(X+Y=5) &= \mathbf{P}(X=2,Y=3)+\mathbf{P}(X=3,Y=2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\\
\mathbf{P}(X+Y=6) &= \mathbf{P}(X=3,Y=3) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut résumer la loi de $X+Y$ dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X+Y)=3}$ et, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X+Y)=\frac{5}{2}}$.

4. Comme $((Z=k))_{k\in[\![0,3]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X+Y=Z) = \sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(X+Y=Z,Z=k) = \sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(X+Y=k,Z=k).$$

Comme il y a remise, les tirages sont indépendants donc les variables aléatoires $X+Y$ et Z sont indépendantes et ainsi

$$\mathbf{P}(X+Y=Z) = \sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(X+Y=k)\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(X+Y=k)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\right)$$

soit $\boxed{p=\frac{5}{32}}$.

5. a. Notons X le numéro obtenu sur la première roue, Y celui obtenu sur la seconde roue et Z celui obtenue sur la troisième roue. Alors, X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$. Par la question précédente, la probabilité que le joueur gagne est $p = \dfrac{5}{32}$ et, par conséquent, la probabilité que le joueur perde est $1 - p = \dfrac{27}{32}$. Ainsi, la variable aléatoire G égale au gain du joueur prend les valeurs -1 et $a - 1$ avec les probabilités $\mathbf{P}(G = -1) = \dfrac{27}{32}$ et $\mathbf{P}(G = a - 1) = \dfrac{5}{32}$. Ainsi, l'espérance de gain du joueur est

$$\mathbf{E}(G) = -1 \times \frac{27}{32} + (a - 1) \times \frac{5}{32}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(G) = \dfrac{5a}{32} - 1}$.

b. Sachant que

$$\mathbf{E}(G) = 0 \Longleftrightarrow \frac{5a}{32} = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{32}{5},$$

$\boxed{\text{le jeu est équitable si et seulement si } a = 6{,}4}$.

Il s'ensuit que $\boxed{\text{le jeu est rentable pour le forain si } a < 6{,}4}$.

c. Notons T le nombre de parties jouées pour gagner une partie. Alors, T est le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « gagner une partie ». Ainsi, T suit une loi géométrique de paramètre p et donc le nombre moyen de parties faites par le joueur est $\boxed{\mathbf{E}(T) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{32}{5}}$.

Sujet 44. Loi conjointe du min et du max I (O2)

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5.

On tire deux boules successivement sans remise.

On note X_1 la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et X_2 la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

On définit de plus les variables aléatoires $Y = \min(X_1, X_2)$ et $Z = \max(X_1, X_2)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.

2. Soit $i \in [\![1, 5]\!]$. Donner la loi conditionnelle de X_2 sachant que $X_1 = i$.

3. Déterminer la loi conjointe du couple (Y, Z).

4. Donner la loi de Y et la loi de Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

6. Déterminer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(Z)$.

7. Déterminer $\mathbf{Cov}(Y, Z)$.

Solution.

1. Par équiprobabilité des tirages, $\boxed{X_1 \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1,5]\!]}$. L'espérance de X_1 est donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \frac{1+5}{2} = 3}$.

2. Si l'évènement $(X = i)$ est réalisé, il reste dans l'urne les 4 boules autre que i et par équiprobabilité des tirages, chacune à une probabilité $\frac{1}{4}$ d'être tirée.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![1,5]\!],\ \mathbf{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

3. Notons que $Y(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et $Z(\Omega) = [\![2,5]\!]$. Soit $(i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![2,45]\!]$.
   • Comme $Y < Z$, si $i \geqslant j$, $\mathbf{P}(Y = i, Z = j) = 0$.
   • Supposons $i < j$. Alors, $(Y = i, Z = j) = (X_1 = i, X_2 = j) \cup (X_1 = j, X_2 = j)$ donc, comme ces deux évènements sont incompatibles,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = i, Z = j) = \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) + \mathbf{P}(X_1 = j, X_2 = j)\\ \mathbf{P}(X_1 = i)\mathbf{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) + \mathbf{P}(X_1 = j)\mathbf{P}(X_2 = i \mid X_1 = j)\\ = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\\ = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![2,5]\!],\ \mathbf{P}(Y = i, Z = j) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}}$.

4. Comme $((Z = j))_{j \in [\![2,5]\!]}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{j=2}^{5} \mathbf{P}(Y = i, Z = j) = \sum_{j=i+1}^{5} \frac{1}{10} = \frac{5 - (i+1) + 1}{10}$$

   donc, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1,4]\!],\ \mathbf{P}(Y = i) = \frac{5-i}{10}}$.

   De même, $((Y = i))_{i \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'évènements donc, d'après la formule de probabilités totales, pour tout $j \in [\![2,5]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z = j) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(Y = i, Z = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{10} = \frac{j - 1 - 1 + 1}{10}$$

   donc, $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![2,5]\!],\ \mathbf{P}(Z = j) = \frac{j-1}{10}}$.

5. Étant donné que $\mathbf{P}(Y = 2, Z = 2) = 0$ et $\mathbf{P}(Y = 2)\mathbf{P}(Z = 2) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100} \neq 0$, $\boxed{\text{les variables aléatoires } Y \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

6. Par définition,

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=1}^{4} i \times \frac{5-i}{10} = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} + \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = \frac{20}{10}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(Y) = 2}$.
De même,

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{j=2}^{5} j \times \frac{j-1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} + \frac{20}{10} = \frac{40}{10}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(Z) = 4}$.

7. Par le théorème de transfert pour le produit,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=2}^{5} ij\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{4} i \sum_{j=i+1}^{5} \frac{j}{10} = \sum_{i=1}^{4} \frac{i}{10} \sum_{j=i+1}^{5} j \\ &= \sum_{i=1}^{4} \frac{i}{10}\left(\sum_{j=1}^{5} j - \sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i}{10} \times \left(\frac{5\times 6}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \frac{i(30 - i(i+1))}{20} = \frac{14}{10} + \frac{24}{10} + \frac{27}{10} + \frac{20}{10} = \frac{85}{10} = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

donc, par la formule de König-Huygens

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{17}{2} - 2 \times 4$$

soit $\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}}$.

Sujet 45. Loi conjointe du min et du max II (O2)

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5.

On tire deux boules simultanément.

On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

1. **a.** Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
   b. Donner la loi conjointe de X et de Y.
   c. Donner la loi de X et la loi de Y.
   d. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   e. Déterminer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
   f. Déterminer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
2. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois qu'on tire deux boules successivement et avec remise.

Solution.

1. a. Comme les deux boules sont distinctes, $\boxed{X(\Omega) = [\![1, 4]\!] \text{ et } Y(\Omega) = [\![2, 5]\!]}$.

b. Le nombre de tirages possibles est $\binom{5}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$. Soit $(i, j) \in [\![1, 4]\!] \times [\![2, 5]\!]$.
Si $i \geqslant j$ alors $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = 0$ car $X < Y$.
Si $i < j$ alors $(X = i, Y = j)$ est réalisé si et seulement si on a tiré la boule i et la boule j donc, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{10}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } (i, j) \in [\![1, 4]\!] \times [\![2, 5]\!],\ \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

c. Comme $((Y = j))_{j\in[\![2,5]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales, pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$,

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j=2}^{5} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=i+1}^{5} \frac{1}{10} = \frac{5 - (i + 1) + 1}{10} \text{ i.e. } \boxed{\mathbf{P}(X = i) = \frac{5 - i}{10}}.$$

De même, $((X = i))_{i\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales, pour tout $j \in [\![2, 5]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{10} = \frac{j - 1 - 1 + 1}{10} \text{ i.e. } \boxed{\mathbf{P}(Y = j) = \frac{j - 1}{10}}.$$

d. Étant donné que $\mathbf{P}(X = 2, Y = 2) = 0$ et $\mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 2) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100} \neq 0$, $\boxed{\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

e. Par définition,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} i\mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{4} i \times \frac{5 - i}{10} = \frac{4 + 6 + 6 + 4}{10} \text{ i.e. } \boxed{\mathbf{E}(X) = 2}$$

et

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=2}^{5} j\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{j=2}^{5} j \times \frac{j - 1}{10} = \frac{2 + 6 + 12 + 20}{10} \text{ i.e. } \boxed{\mathbf{E}(X) = 4}.$$

f. Par le théorème de transfert pour le produit,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=2}^{5} ij\mathbf{P}(X=i,Y=j) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}\frac{ij}{10}\\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4} i\sum_{j=i+1}^{5} j = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4} i\left(\sum_{j=1}^{5} j - \sum_{j=1}^{i} j\right)\\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4} i\left(\frac{5\times 6}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4}\left(15i - \frac{i^2(i+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{10}(14+24+27+20) = \frac{85}{10} = \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{17}{2} - 2\times 4$$

soit $\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}}$.

2. a. Comme il y a remise, $\boxed{X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,5]\!]}$.

b. Le nombre de tirages possibles est $5^2 = 25$. Soit $(i,j) \in [\![1,5]\!]^2$.
Si $i > j$ alors $\mathbf{P}(X=i,Y=j) = 0$ car $X \leqslant Y$.
Si $i = j$ alors $(X=i,Y=j)$ est réalisé si et seulement si on a tiré la boule i puis à nouveau la boule i donc, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(X=i,Y=i) = \frac{1}{25}$.
Si $i < j$ alors $(X=i,Y=j)$ est réalisé si et seulement si on a tiré la boule i puis la boule j ou la boule j puis la boule i donc, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(X=i,Y=j) = \frac{2}{25}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,5]\!]^2,\ \mathbf{P}(X=i,Y=j) = \begin{cases} \frac{2}{25} & \text{si } i<j \\ \frac{1}{25} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i>j \end{cases}}$.

c. Comme $((Y=j))_{j\in[\![1,5]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales, pour tout $i \in [\![1,5]\!]$,

$$\mathbf{P}(X=i) = \sum_{j=1}^{5}\mathbf{P}(X=i,Y=j) = \frac{1}{25} + \sum_{j=i+1}^{5}\frac{2}{25} = \frac{1}{25} + \frac{2(5-(i+1)+1)}{25}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X=i) = \frac{11-2i}{25}}$.
De même, $((X=i))_{i\in[\![1,5]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales, pour tout $j \in [\![1,5]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{5}\mathbf{P}(X=i,Y=j) = \frac{1}{25} + \sum_{i=1}^{j-1}\frac{2}{25} = \frac{1}{25} + \frac{2(j-1-1+1)}{25}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(Y=j)=\frac{2j-1}{25}}$.

d. Étant donné que $\mathbf{P}(X=2,Y=1)=0$ et $\mathbf{P}(X=2)\mathbf{P}(Y=1)=\frac{7}{25}\times\frac{1}{25}=\frac{7}{625}\neq 0$, $\boxed{\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

e. Par définition,

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{i=1}^{5} i\mathbf{P}(X=i)=\sum_{i=1}^{5} i\times\frac{11-2i}{25}=\frac{9+14+15+12+5}{25} \text{ i.e. } \boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{11}{5}}$$

et

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{j=1}^{5} j\mathbf{P}(Y=j)=\sum_{j=1}^{5} j\times\frac{2j-1}{25}=\frac{1+6+15+28+45}{25} \text{ i.e. } \boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{19}{5}}.$$

f. Par le théorème de transfert pour le produit,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY)&=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} ij\mathbf{P}(X=i,Y=j)=\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{i^2}{25}+\sum_{j=i+1}^{5}\frac{2ij}{25}\right)\\
&=\frac{1}{25}\left(\sum_{i=1}^{5} i^2+2\sum_{i=1}^{5} i\sum_{j=i+1}^{5} j\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{5\times 6\times 11}{6}+2\sum_{i=1}^{5} i\left(\sum_{j=1}^{5} j-\sum_{j=1}^{i} j\right)\right)\\
&=\frac{1}{25}\left(55+2\sum_{i=1}^{5} i\left(\frac{5\times 6}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{25}\left(55+2\sum_{i=1}^{5}\left(15i-\frac{i^2(i+1)}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{25}(55+28+48+54+40)=\frac{225}{25}=9
\end{aligned}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)=9-\frac{11}{5}\times\frac{19}{5}$$

soit $\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y)=\frac{16}{25}}$.

Sujets mixtes algèbre/analyse

Sujet 46. Résolution d'un système différentiel I (C5)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Justifier que A est diagonalisable et expliciter une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. *On veillera à ce que les coefficients de P soient des entiers.*

3. Calculer P^{-1}.

4. Soit x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $x(0) = 11$, $y(0) = 7$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = -10x(t) + 18y(t) \\ y'(t) = -6x(t) + 11y(t) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une équation différentielle vérifiée par a et une équation différentielle vérifiée par b.

b. Déterminer, pour tout réel t, $a(t)$ et $b(t)$.

c. En déduire, pour tout réel t, $x(t)$ et $y(t)$.

5. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 9\mathrm{e}^{2t}$.

a. Écrire en Python une fonction qui calcule $f(t)$ où t est un réel passé en argument de la fonction.

b. Calculer $f(0{,}5)$ et $f(1)$.

c. Montrer que l'équation $f(t) = 30$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

d. En utilisant l'outil informatique, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution.

1. **Méthode 1 : par le calcul**

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -10-\lambda & 18 \\ -6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (-10-\lambda)(11-\lambda)-(-6)\times 18 \\ &= -110+10\lambda-11\lambda+\lambda^2+108 \\ &= \lambda^2-\lambda-2\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme X^2-X-2 est $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-2)=9>0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 1} = 2$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{-1\,;2\}}$.

   Méthode 2 : à l'aide de Python

   Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.matrix([[-10, 18], [-6, 11]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([-1.,  2.]),
matrix([[-0.89442719, -0.83205029],
[-0.4472136 , -0.5547002 ]]))
```

on obtient que $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{-1\,;2\}}$.

2. La matrice A est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet 2 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.
   Pour déterminer P, on cherche une base de vecteurs propres de A.
   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $V=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$.

$$AV=-V \iff \begin{cases} -10x+18y=-x \\ -6x+11y=-y \end{cases} \iff \begin{cases} 18y=9x \\ 12y=6x \end{cases} \iff x=2y$$

Ainsi, $V_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

$$AV = 2V \iff \begin{cases} -10x + 18y = 2x \\ -6x + 11y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 18y = 12x \\ 9y = 6x \end{cases} \iff y = \frac{2}{3}x$$

. Ainsi, $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

On en déduit que $\boxed{\text{si } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ alors } A = PDP^{-1}}$.

3. Comme $\det(P) = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

4. a. Pour tout réel t,

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) - 3y(t) \\ -x(t) + 2y(t) \end{pmatrix}$$

donc $a(t) = 2x(t) - 3y(t)$ et $b(t) = -x(t) + 2y(t)$. On en déduit que a et b sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme combinaisons linéaires de fonctions dérivables et, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} a'(t) = 2x'(t) - 3y'(t) &= 2(-10x(t) + 18y(t)) - 3(-6x(t) + 11y(t)) \\ &= -2x'(t) + 3y'(t) = -a'(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b'(t) = -x'(t) + 2y'(t) &= -(-10x(t) + 18y(t)) + 2(-6x(t) + 11y(t)) \\ &= -2x'(t) + 4y'(t) = 2b'(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{a \text{ est solution de } (E_1) : z' + z = 0 \text{ et } b \text{ est solution de } (E_2) : z' - 2z = 0}$.

b. On en déduit qu'il existe une constante réelle C_1 telle que, pour tout réel t, $a(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t}$. Or, $a(0) = 2x(0) - 3y(0) = 1$ donc $1 = C_1 \mathrm{e}^0 = C_1$ et ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ a(t) = \mathrm{e}^{-t}}$.

De même, il existe une constante réelle C_2 telle que, pour tout réel t, $b(t) = C_2 \mathrm{e}^{2t}$. Or, $b(0) = -x(0) + 2y(0) = 3$ donc $3 = C_2 \mathrm{e}^0 = C_2$ et ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ b(t) = 3\mathrm{e}^{2t}}$.

c. Pour tout réel t, $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(t) + 3b(t) \\ a(t) + 2b(t) \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 9\mathrm{e}^{2t} \text{ et } y(t) = \mathrm{e}^{-t} + 6\mathrm{e}^{2t}}$.

5. a. La fonction suivante convient :

```
from math import exp

def fonction_f(t):
  return 2*exp(-t) + 9*exp(2*t)
```

b. Par définition, $\boxed{f(0{,}5) = 2\mathrm{e}^{-0{,}5} + 9e \text{ et } f(1) = 2\mathrm{e}^{-1} + 9\mathrm{e}^2}$. À l'aide de la fonction précédente, on trouve $\boxed{f(0{,}5) \approx 25{,}68 \text{ et } f(1) \approx 67{,}24}$.

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composées et combinaisons linéaires de fonctions dérivables et, pour tout réel t, $f'(t) = -2\mathrm{e}^{-t} + 18\mathrm{e}^{2t}$. De plus, pour tout $t \geqslant 0$, $-t \leqslant 0$ donc, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$ et ainsi $-2\mathrm{e}^{-t} \geqslant -2$. De même, pour tout $t \geqslant 0$, $2t \leqslant 0$ donc, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2t} \geqslant 1$ et ainsi $18\mathrm{e}^{2t} \geqslant 18$. Dès lors, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) \geqslant -2 + 18 = 16$ donc $f'(t) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

On en déduit que f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ donc, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right)$.

De plus, d'après la question précédente, $30 \in f\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right)$ car $f(0{,}5) < 30$ et $f(1) > 30$ donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right] \text{ tel que } f(\alpha) = 30}$.

d. En programmant l'algorithme de dichotomie suivant :

```
u = 0.5
v = 1
while (v-u > 0.001):
  m=(u+v)/2
  if fonction_f(m) > 30:
    v = m
  else:
    u = m
print(m)
```

on obtient $\boxed{\alpha \approx 0{,}583}$.

Sujet 47. Équation différentielle et dérivée n-ième (O3)

1. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : y'' = 5y' - \frac{25}{4}y.$$

Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $f : t \longmapsto (at + b)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ème de f.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t,

$$f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}.$$

Dans l'hérédité, on mettra en évidence les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}.$$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n et de a.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n b_n$.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$$

de deux manières différentes et en déduire une expression de u_n.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n, a et b.

4. On propose de retrouver le résultat précédent par une méthode matricielle.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer une matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{4}BX_n$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de B, n et X_0.

d. Montrer que $B = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Exprimer T en fonction de I_2 et de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f. Calculer N^2 et en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, T^n en fonction de n.

g. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n en fonction de n.

Solution.

1. L'équation (E) est équivalente à $y'' - 5y' + \dfrac{25}{4}y = 0$ qui est une équation homogène du second ordre.

L'équation caractéristique associée est $(C) : x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + \dfrac{25}{4}$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{25}{4} = 0$ donc (C) possède une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{-5}{2 \times 1} = \dfrac{5}{2}$.

Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto (At+B)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t, $f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$ ».

Initialisation. Par définition, $f^{(0)} = f$ donc, en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$, pour tout réel t, $f^{(0)}(t) = (a_0 t + b_0)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t, $f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$. La fonction $f^{(n)}$ est donc dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel t,

$$f^{(n+1)}(t) = a_n \mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + (a_n t + b_n) \times \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} = \left(\frac{5}{2}a_n + a_n + \frac{5}{2}b_n\right)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}.$$

Ainsi, en posant $a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n$ et $b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n$, pour tout réel t, $f^{(n+1)}(t) = (a_{n+1}t + b_{n+1})\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, <u>pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t, $f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$</u>.

De plus, on a montré que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}.$$

b. Ainsi, la suite (a_n) est une suite géométrique de premier terme a et de raison $\dfrac{5}{2}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = a\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} b_{n+1} &= \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \left(a_n + \frac{5}{2} b_n\right) \\
&= \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \times a \left(\frac{5}{2}\right)^{n} + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \times \frac{5}{2} b_n \\
&= \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right)^{n} \times a + \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n} b_n \\
&= \frac{2}{5} \times 1^n \times a + 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n} b_n \\
&= \frac{2}{5} a + u_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5} a}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - b_0 = u_n - b.$$

D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} - a_k = \dfrac{2}{5} a$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{5} a = n \times \frac{2}{5} a = \frac{2}{5} a n.$$

Ainsi, on en déduit que $u_n - b = \dfrac{2}{5} a n$ donc $u_n = \dfrac{2}{5} a_n + b$.

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{5} a n + b}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n} b_n$ donc $b_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n} u_n$ et ainsi, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n} \left(\dfrac{2}{5} a n + b\right) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n-1} \times \dfrac{5}{2} \left(\dfrac{2}{5} a n + b\right)$ i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \left(a n + \frac{5}{2} b\right)}.$$

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{5}{2} b_{n+1} = \frac{5}{2} a_n + \frac{5}{2} b_{n+1}.$$

Or, $b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2} b_n$ donc $a_n = b_{n+1} - \dfrac{5}{2} b_n$. Ainsi,

$$b_{n+2} = \frac{5}{2} \left(b_{n+1} - \frac{5}{2} b_n\right) + \frac{5}{2} b_n = \frac{5}{2} b_{n+1} - \frac{25}{4} b_n + \frac{5}{2} b_{n+1} = 5 b_{n+1} - \frac{25}{4} b_n.$$

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = 5 b_{n+1} - \frac{25}{4} b_n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ 5b_{n+1} - \dfrac{25}{4}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{25}{4} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -25 & 20 \end{pmatrix} X_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -25 & 20 \end{pmatrix} \text{ est telle que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \frac{1}{4} B X_n}$.

c. La suite (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison $\dfrac{1}{4}B$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(\frac{1}{4}B\right)^n X_0}$.

d. Comme $\det(P) = 2 \times 1 - 5 \times 0 = 2 \neq 0$, P est bien inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -50 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -50 & 40 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{PTP^{-1} = B}$.

e. On observe que $T = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{T = 10I_2 + 2N}$.

f. On vérifie que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{N^2 = 0_2}$.

On en déduit que

$$T^2 = (10I_2 + 2N)(10I_2 + 2N) = 10^2 I_2^2 + 20I_2N + 20NI_2 + 4N^2 = 10^2 I_2 + 40N$$

et

$$T^3 = T^2T = (10^2I_2 + 40N)(10I_2 + 2N) = 10^3 I_2^2 + 200I_2N + 400NI_2 + 80N^2 = 10^3I_2 + 600N$$

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $T^n = 10^n I_2 + 2n10^{n-1}N$ ».

Initialisation. D'une part, $T^0 = I_2$ et, d'autre part, $10^0 I_2 + 2 \times 0 \times 10^{-1} N = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^nT = (10^nI_2 + 2n10^{n-1}N)(10I_2 + 2N) \\ &= 10^{n+1}I_2^2 + 2 \times 10^n I_2 N + 2n10^n NI_2 + 4n10^{n-1}N^2 \\ &= 10^{n+1}I_2 + 2(n+1)10^n N \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 10^n I_2 + 2n10^{n-1}N$.

Remarque. On peut aussi obtenir les résultats en utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices. ATTENTION, cependant, on ne peut développer $(A+B)^n$ à l'aide du binôme de Newton que si les matrices A et B commutent. Ici, c'est le cas puisque $I_2N = NI_2 = N$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T^n = (10I_2 + 2N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (10I_2)^k (2N)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k I_2^k \times 2^{n-k} N^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k 2^{n-k} N^{n-k}. \end{aligned}$$

Or, si $n-k \geqslant 2$ i.e. si $k \leqslant n-2$, $N^{n-k} = 0_2$ donc

$$T^n = \sum_{k=n-1}^{n} \binom{n}{k} 10^k 2^{n-k} N^{n-k} = \binom{n}{n-1} 10^{n-1} 2^1 N^1 + \binom{n}{n} 10^n 2^0 N^0 = n10^{n-1} \times 2N + 1 \times 10^n I_2.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 10^n I_2 + 2n10^{n-1}N$.

On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 10^n & 2n10^{n-1} \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10 & 2n \\ 0 & 10 \end{pmatrix}}.$

g. Comme $B = PTP^{-1}$, par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PT^nP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{10^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2n \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{10^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10-10n & 4n \\ -50 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 20-20n & 8n \\ -50n & 20n-20 \end{pmatrix} = 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10-10n & 4n \\ -25n & 10n-10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \left(\frac{1}{4}B\right)^n X_0 = \frac{1}{4^n} B^n X_0 = \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10-10n & 4n \\ -25n & 10n-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Or, $b_0 = b$ et $b_1 = a_0 + \frac{5}{2}b_0 = a + \frac{5}{2}b$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10-10n & 4n \\ -25n & 10n-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a + \frac{5}{2}b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \begin{pmatrix} (10-10n)b + 4n\left(a + \frac{5}{2}b\right) \\ -25nb + (10n-10)\left(a + \frac{5}{2}b\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, on déduit de la première ligne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \left[(10 - 10n)b + 4n \left(a + \frac{5}{2} b \right) \right] \\
&= \left(\frac{1}{4} \times 10 \right)^{n-1} \times \frac{1}{4} (10b - 10nb + 4na + 10nb) \\
&= \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{5}{2} b + na \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve bien que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} \left(an + \frac{5}{2} b \right)}$.

Sujet 48. Étude d'une réaction chimique (O3)

Le sujet traite d'une réaction chimique avec plusieurs réactifs.

Initialement, la concentration en benzène est de 0,2 mol.L^{-1}, la concentration en produit 1 est 0 mol.L^{-1} et la concentration en produit 2 est 0 mol.L^{-1}.

On note C la concentration en benzène.

- Si $\ln(C)$ est une fonction affine du temps t alors on dit que la réaction est d'ordre 1.
- Si $\dfrac{1}{C}$ est une fonction affine du temps t alors on dit que la réaction est d'ordre 2.

1. On observe les valeurs suivantes de C en fonction de t.

t	0	10	20	50	100	200	300
C	0,2	0,179	0,161	0,115	0,0666	0,0222	0,007

Déterminer l'ordre de cette réaction chimique.

2. On appelle maintenant x la concentration en benzène, y la concentration en produit 1 et z celle en produit 2, fonctions du temps t.
Ces fonctions vérifient, pour tout réel $t \geqslant 0$, le système

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = -K_1 x(t)\ (E_1) \\ y'(t) = -K_2 y(t) + K_1 x(t)\ (E_2) \\ z'(t) = -K_2 z(t)\ (E_3) \end{cases} .$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles distinctes et strictement positives.
Déterminer les solutions de (E_1).

3. Proposer une valeur de K_1 en accord avec les valeurs expérimentales.

Une première version (analyse)

4. a. Montrer que y vérifie une équation différentielle notée (E_4).

b. Résoudre (E_4). On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\mathrm{e}^{-K_1 t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

5. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}$ et $g(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1} f(t)$.

À quoi correspond la fonction g ?

6. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

Une seconde version (algèbre linéaire)

7. a. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

Écrire le système (S) sous la forme matricielle $X'(t) = AX(t)\ \ (E)$.

b. Donner ensuite une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

c. On pose, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X_1(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_1'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$.
Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, la forme générale de $X_1(t)$.

d. En déduire, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X(t)$.

Solution.

1.

t	0	10	20	50	100	200	300
C	0,2	0,179	0,161	0,115	0,0666	0,0222	0,007
$\ln(C)$	$-1{,}61$	$-1{,}72$	$-1{,}83$	$-2{,}16$	$-2{,}71$	$-3{,}81$	$-4{,}96$
$\frac{1}{C}$	5	5,59	6,21	8,70	15,02	45,05	142,86

On constate que, lorsque t augmente de $10k$, les valeurs de $\ln(C)$ diminue de $0{,}11k$ donc $\ln(C)$ est une fonction linéaire de t (et ce n'est pas le cas pour $\frac{1}{C}$).
Ainsi, $\boxed{\text{la réaction est d'ordre 1}}$.

2. L'équation (E_1) est équivalente à $x'(t) + K_1 x(t) = 0$ donc, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_1) sur $[0\,;+\infty[$ est $\boxed{\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-K_1 t} \mid A \in \mathbb{R}\}}$.

3. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $x(t) = A\mathrm{e}^{-K_1 t}$. De plus, $x(0) = 0{,}2$ donc $A = 0{,}2$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln(x(t)) = \ln(0{,}2) - K_1 t$ donc $-K_1$ est le coefficient de directeur de la fonction de la fonction affine $t \longmapsto \ln(x(t))$. Or, d'après la question **1.**, ce coefficient directeur est environ égale à $-\dfrac{0{,}11}{10} = -0{,}011$. Ainsi, $\boxed{K_1 \approx 0{,}011}$.

4. a. La fonction y vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$, $(E_4) : y'(t) + K_2 y(t) = 0{,}2K_1\mathrm{e}^{-K_1 t}$.

b. L'équation homogène associée à (E_4) est $(H) : y' + K_2 y = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) sur $[0\,;+\infty[$ est $\{t \longmapsto B\mathrm{e}^{-K_2 t} \mid B \in \mathbb{R}\}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : t \longmapsto a\mathrm{e}^{-K_1 t}$. Alors, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$h'(t) + K_2 h(t) = -aK_1\mathrm{e}^{-K_1 t} + aK_2\mathrm{e}^{-K_1 t} = a(K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-K_1 t}$$

donc, pour que h soit solution de (E_4), il suffit que $a(K_2 - K_1) = 0{,}2K_1$ i.e. $a = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}$.
Ainsi, $h : t \longmapsto \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\mathrm{e}^{-K_1 t}$ est une solution particulière de (E_4).
On conclut que l'ensemble de solutions des (E_4) sur $[0\,;+\infty[$ est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \frac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\mathrm{e}^{-K_1 t} + B\mathrm{e}^{-K_2 t} \;\middle|\; B \in \mathbb{R}\right\}.}$$

5. Ainsi, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel t, $y(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\mathrm{e}^{-K_1 t} + B\mathrm{e}^{-K_2 t}$. De plus, $y(0) = 0$ donc $\dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1} + B = 0$ i.e. $B = -\dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\left(\mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}\right)$ donc $\boxed{g = y}$.

6. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composées de fonctions dérivables et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = -K_1\mathrm{e}^{-K_1 t} + K_2\mathrm{e}^{-K_2 t} = \mathrm{e}^{-K_2 t}\left(K_2 - K_1\mathrm{e}^{(K_2 - K_1)t}\right).$$

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-K_1 t} > 0$ donc, comme $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$,

$$f'(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow K_2 - K_1\mathrm{e}^{(K_2-K_1)t} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{(K_2-K_1)t} \leqslant \frac{K_2}{K_1} \Longleftrightarrow (K_2-K_1)t \leqslant \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right).$$

On en déduit que si $K_1 < K_2$ alors

$$f'(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \leqslant \frac{1}{K_2-K_1}\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$$

et, si $K_1 > K_2$ alors

$$f'(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \geqslant \frac{1}{K_2-K_1}\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right).$$

Posons $t_0 = \dfrac{1}{K_2-K_1}\ln\left(\dfrac{K_2}{K_1}\right)$. Notons que, si $K_1 < K_2$, $K_2 - K_1 > 0$ et $\ln\left(\dfrac{K_2}{K_1}\right) > 0$ donc $t_0 > 0$ et, si $K_1 < K_2$, $K_2 - K_1 < 0$ et $\ln\left(\dfrac{K_2}{K_1}\right) < 0$ donc $t_0 > 0$. Ainsi, dans tous les cas $t_0 > 0$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{si } K_1 < K_2,\ f \text{ est croissante sur } [0\,;t_0] \text{ et décroissante sur } [t_0\,;+\infty[}$ et, $\boxed{\text{si } K_1 > K_2,\ f \text{ est décroissante sur } [0\,;t_0] \text{ et croissante sur } [t_0\,;+\infty[}$.

7. a. L'écriture matricielle du système (S) est, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X'(t) = AX(t)$ où

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 & 0 \\ K_1 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 \end{pmatrix}}.$$

b. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-K_1\,;-K_2\}$.

Déterminons les sous-espaces propres. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors, comme $K_1 \neq K_2$,

$$AX = -K_1X \Longleftrightarrow \begin{cases} -K_1a = -K_1a \\ K_1a - K_2b = -K_1b \\ -K_2c = -K_1c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} K_1a = (K_2-K_1)b \\ (K_1-K_2)c = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{K_1}{K_2-K_1}a \\ c = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre $-K_1$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} K_2-K_1 \\ K_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même,

$$AX = -K_2X \iff \begin{cases} -K_1a = -K_2a \\ K_1a - K_2b = -K_2b \\ -K_2c = -K_2c \end{cases} \iff \begin{cases} (K_2 - K_1)a = 0 \\ K_1a = 0 \end{cases}$$
$$\iff a = 0.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre $-K_2$ est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est $1 + 2 = 3$ donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ en posant

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} K_2 - K_1 & 0 & 0 \\ K_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

c. Pour tout réel t, $X'(t) = AX(t) = (PDP^{-1})X(t)$ donc, en multipliant à gauche par P^{-1}, $P^{-1}X'(t) = D(P^{-1}X(t))$ i.e. $X_1'(t) = DX_1(t)$. Ainsi,

$$\begin{cases} x_1'(t) = -K_1x_1(t) \\ y_1'(t) = -K_2y_1(y) \\ z_1'(t) = -K_2z_1(t) \end{cases}$$

donc il existe des constantes α, β et γ telles que, pour tout réel t, $x_1(t) = \alpha e^{-K_1t}$, $y_1(t) = \beta e^{-K_2t}$ et $z_1(t) = \gamma e^{-K_2t}$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\boxed{X_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-K_1t} \\ \beta e^{-K_2t} \\ \gamma e^{-K_2t} \end{pmatrix}}.$$

d. Dès lors, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$X(t) = PX_1(t) = \begin{pmatrix} K_2 - K_1 & 0 & 0 \\ K_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-K_1t} \\ \beta e^{-K_2t} \\ \gamma e^{-K_2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(K_2 - K_1)e^{-K_1t} \\ \alpha K_1e^{-K_1t} + \beta e^{-K_2t} \\ \gamma e^{-K_2t} \end{pmatrix}$$

De plus, $X(0) = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} \alpha(K_2 - K_1) = 0{,}2 \\ \alpha K_1 + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \begin{cases} \alpha = \frac{0{,}2}{K_2-K_1} \\ \beta = -\frac{0{,}2K_1}{K_2-K_1} \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on conclut que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} 0{,}2\mathrm{e}^{-K_1 t} \\ \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\left(\mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}\right) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Sujet 49. Élevage de lapins et suite de Fibonacci (O3)

On s'intéresse au nombre de couples de lapins dans un élevage.

En janvier (mois 0), un couple de lapereaux est réuni.

En février, ce couple devient mature. Le mois suivant, il donne naissance à un couple de lapereaux.

La suite du développement suit les règles suivantes :

- un couple mature donne naissance à un couple de lapereaux tous les mois ;
- en revanche, un couple de lapereaux doit attendre un mois avant d'atteindre sa maturité et, adulte, se mettre à procréer tous les mois.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n le nombre de couples de lapins le n-ème mois.

1. Montrer que $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$ (mois de mars) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

2. **a.** À l'aide du logiciel de votre choix (Python, Excel ou la calculatrice), écrire une fonction permettant de calculer f_n, n étant passé en argument.

b. Donner les 8 premiers termes de la suite (f_n).

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. À l'aide du logiciel de votre choix, donner une conjecture sur le lien existant, pour tout entier $n \geqslant 2$, entre A^n, f_n, f_{n-1} et f_{n-2}.

Démontrer cette conjecture.

b. Sachant que, pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$.

Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre A, X_{n+1} et X_n.

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n avec la méthode de votre choix. On pourra introduire $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_n, A, n et X_0. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de couples de lapins le n-ème mois en fonction de n.

7. Donner un équivalent de f_n. En déduire la limite du rapport $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

Solution.

1. En janvier, il y a un seul couple de lapereaux donc $\boxed{f_0 = 1}$. En février, ce couple devient mature mais ne s'est pas encore reproduit donc $\boxed{f_1 = 0}$. En mars, il se reproduit en donnant naissance à un couple de lapereaux donc il y a 2 couples en mars soit $\boxed{f_2 = 2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Au mois $n+2$, le nombre de couples de lapins est égal au nombre de couples de lapins présents au mois $n+1$ auxquels s'ajoutent autant de couples de lapereaux que de couples de lapins matures. Or, le nombre de couples présents au mois $n+1$ est f_{n+1} et le nombre de couples matures est le nombre de couples présents deux mois avant i.e. f_n. Ainsi, $\boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n}$.

2. a. En Python, on écrit la fonction suivante :

```
def lapin(n):
  f = 1
  g = 1
    for i in range(n):
      f, g = g, f+g
  return f
```

b. En utilisant l'instruction

```
for n in range(8):
  print(lapin(n))
```

On obtient $\boxed{f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3,\ f_4 = 5,\ f_5 = 8,\ f_6 = 13 \text{ et } f_7 = 21}$.

3. a. En utilisant le script suivant :

```
import numpy as np

A=np.matrix([[1,1],[1,0]])
B=A
for k in range(1,6):
  B=B*A
  print(B)
```

On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_5 & f_4 \\ f_4 & f_3 \end{pmatrix}$ et $A^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_6 & f_5 \\ f_5 & f_4 \end{pmatrix}$.

On peut donc conjecturer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$.

Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. On a vu que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} & f_n \\ f_{n-1} + f_{n-2} & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Or, d'après la question **1.**, $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ et $f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$ donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \quad A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\det(A^{n+1}) = \det(AA^n) = \det(A)\det(A^n) = (1 \times 0 - 1 \times 1)\det(A^n) = -\det(A^n).$$

Ainsi, la suite $(\det(A^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -1 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = \det(A^0)(-1)^n$. Or, $\det(A^0) = \det(I_2) = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = (-1)^n$. En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $\det(A^{n+1}) = (-1)^{n+1}$ et, comme $n \geqslant 1$, $n+1 \geqslant 2$ donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^{n+1}) = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$ et on conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$.

5. La matrice A est une matrice symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc celui-ci possède 2 racines réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Déterminer des vecteurs propres associés. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$AX = \psi X \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x - x \\ \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}x \\ y = \dfrac{2(1+\sqrt{5})}{1^2-\sqrt{5}^2}x \end{cases}$$
$$\iff y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x = -\varphi x$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ψ.

$$AX = \varphi X \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x - x \\ \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}x \\ y = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-\sqrt{5}^2}x \end{cases}$$
$$\iff y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x = -\psi x$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\psi \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre φ.
En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varphi & -\psi \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$, on a donc $A = PDP^{-1}$.
Dès lors, par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Or, D est diagonale donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} \psi^n & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix}$. De plus,

$$\det(P) = -\psi + \varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

donc $P^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & -1 \\ \varphi & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varphi & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^n & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & -1 \\ \varphi & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varphi & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\psi^{n+1} & -\psi^n \\ \varphi^{n+1} & \varphi^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} & \varphi^n - \psi^n \\ \varphi\psi^{n+1} - \psi\varphi^{n+1} & \psi\varphi^n - \psi\varphi^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En remarquant que $\psi\varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1^2 - \sqrt{5}^2}{4} = -1$, on en déduit que

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} & \varphi^n - \psi^n \\ (\varphi\psi)\psi^n - (\varphi\psi)\varphi^n & (\varphi\psi)\psi^{n-1} - (\varphi\psi)\varphi^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} & \varphi^n - \psi^n \\ \varphi^n - \psi^n & \varphi^{n-1} - \psi^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} & \varphi^n - \psi^n \\ \varphi^n - \psi^n & \varphi^{n-1} - \psi^{n-1} \end{pmatrix}}$$

6. On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc (X_n) est une suite géométrique de matrices de raison A donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$.

Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} & \varphi^n - \psi^n \\ \varphi^n - \psi^n & \varphi^{n-1} - \psi^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} + \varphi^n - \psi^n \\ \varphi^n - \psi^n + \varphi^{n-1} - \psi^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n + \varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1}(\varphi+1) - \psi^{n-1}(\psi+1)}{\sqrt{5}}.$$

Or, comme ψ et φ sont racines du polynôme $X^2 - X - 1 = 0$, on a $\psi^2 - \psi - 1 = 0$ et $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ donc $\psi^2 = \psi + 1$ et $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dès lors, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}}.$$

Remarque. On a suivi l'énoncé mais en fait on pouvait faire bien plus court en remarquant que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} & \varphi^n - \psi^n \\ \varphi^n - \psi^n & \varphi^{n-1} - \psi^{n-1} \end{pmatrix}$$

donc, en égalant les termes d'indices 1 et 1 des deux matrices, on vient que, pour tout $n \geqslant 2$, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})$. De plus, cette égalité est encore vraie, pour $n = 0$, car $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_0$ et, pour $n = 1$, car $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - \psi^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi + 1 - (\psi + 1)) = f_0 = f_1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

7. Comme $\varphi \approx 1{,}6$, $\varphi > 1$ et, comme $\psi \approx -0{,}6$, $\psi \in [-1\,;1]$, $\varphi^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{f_n}{\frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}} = 1 - \dfrac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On conclut que

$$\boxed{f_n \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}}.$$

Dès lors, $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \sim \dfrac{\frac{\varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}} \sim \varphi$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi}$.

Sujet 50. Étude d'une population d'individus hermaphrodites (O3)

On considère une population d'individus hermaphrodites.

On note a_0 la proportion de mâles dans la population de départ et b_0 la proportion de femelles. Chaque individu a une probabilité $\frac{1}{4}$ de changer de sexe une fois par an. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la proportion de mâles dans la population à la fin de l'année n et b_n la proportion de femelles dans la population à la fin de l'année n .

Partie 1

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Que peut-on dire de la suite $(a_n + b_n)$?

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = a_n - \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions explicites de a_n et b_n en fonction de n.

5. Quelles sont les limites des deux suites (a_n) et (b_n) ?

Partie 2

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

On pose, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre X_{n+1}, M et X_n.

2. Montrer que 1 est une valeur propre de M et déterminer un vecteur propre de M associé à cette valeur propre.

3. Trouver une valeur propre x de M telle que $0 < x < 1$.

4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

6. Retrouver les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution.

Partie 1

1. Chaque année, $\frac{3}{4}$ des individus mâles restent mâles et $\frac{1}{4}$ des femmes deviennent mâles donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n}$.
De même, chaque année, $\frac{3}{4}$ des individus femelles restent femelles et $\frac{1}{4}$ des mâles deviennent femelles donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n = a_n + b_n$ donc la suite $\boxed{(a_n + b_n) \text{ est constante}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$t_{n+1} = a_{n+1} - \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Or, comme $(a_n + b_n)$ est constante, $a_n + b_n = a_0 + b_0$ donc $b_n = a_0 + b_0 - a_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}(a_0 + b_0 - a_n) - \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{4}a_n + \frac{a_0 + b_0}{4} - \frac{1}{4}a_n - \frac{a_0 + b_0}{2} \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{a_0 + b_0}{4} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{a_0 + b_0}{2}\right) = \frac{1}{2}t_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(t_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, $t_0 = a_0 - \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a_0 - b_0}{2}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{a_0 - b_0}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{a_0 + b_0}{2} + t_n$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{a_0 + b_0}{2} + \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}}.$$

De plus, on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_0 + b_0 - a_n$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \frac{a_0 + b_0}{2} - \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}}.$$

5. Comme $2 > 1$, $\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$ donc, par quotient et somme,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{a_0 + b_0}{2}}.$$

Partie 2

1. Par définition,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

2. On peut constater que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, comme le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, on en déduit que $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } M \text{ et que } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en est un vecteur propre associé}}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{16} = \frac{9}{16} - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{16} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}.$$

Comme 1 est valeur propre de M, 1 est racine du trinôme $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$ donc celui-ci se factorise par $X - 1$. On vérifie alors que $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = (X - 1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$ donc on conclut que $\boxed{x = \frac{1}{2} \text{ est une autre valeur propre de } M}$.

Autre solution. On pouvait également utiliser Python :

```python
import numpy as np

M = np.matrix([[3/4,1/4], [1/4,3/4]])
print(np.linalg.eig(M))
```

qui affiche

```
(array([1. , 0.5]),
matrix([[ 0.70710678, -0.70710678],
[ 0.70710678,  0.70710678]]))
```

on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1\,;\frac{1}{2}\}}$.

4. On a vu que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. De plus, le résultat donné par Python semble indiquer de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\frac{1}{2}$. Vérifions-le :

$$M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui confirme que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. La suite $\left(\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right)$ est une suite géométrique de matrices de raison D donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n = PDP^{-1}X_n$ donc, en multipliant par P^{-1} à gauche, $P^{-1}X_{n+1} = DP^{-1}X_n$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1}X_n$. Alors, d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Or, comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \frac{v_0}{2^n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ et $v_n = \frac{v_0}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. Or, par définition,

$$X_n = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n - v_n \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - v_n$ et $b_n = u_n + v_n$. Ainsi, par sommes de limites, (a_n) et (b_n) tendent vers u_0.

Enfin, $\det(P) = 2$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 - b_0 \end{pmatrix}$$

et ainsi $u_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. On retrouve donc que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{a_0 + b_0}{2}}.$$

Sujet 51. Résolution d'un système différentiel II (O3)

Partie I. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit a un nombre réel. On considère y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = ay$$

1. On considère la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = \mathrm{e}^{-at}y(t)$.
Montrer que z est une fonction constante.

2. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $y(t)$.

Partie II. Système différentiel linéaire du premier ordre

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On considère u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} u' = u + v \\ v' = -2u + 4v \end{cases} .$$

1. On note $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$. Écrire le système (S) sous forme matricielle.

2. **a.** Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n(t, A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}.$$

a. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ en fonction de t.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les suites $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites.

c. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $E(t, A)$ définie par

$$E(t, A) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices $E(t, A)$ et $E(-t, A)$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

5. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t, A) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

a. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1(t)$ et $v_1(t)$.

b. Montrer que, pour tout réel t, $u_1'(t) = v_1'(t) = 0$.

6. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel t,

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t, A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et en déduire, pour tout réel t, les expressions de $u(t)$ et $v(t)$.

Solution.

Partie I. Équation différentielle linéaire du premier ordre

1. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit de fonctions dérivables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = -a\mathrm{e}^{-at}y(t) + \mathrm{e}^{-at}y'(t) = \mathrm{e}^{-at}(y'(t) - ay(t)) = 0$$

donc, comme $\mathbb{R}$ est une intervalle, $\boxed{z \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

2. Posons $C = z(0)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = C$ donc $\mathrm{e}^{-at}y(t) = C$ et ainsi $\boxed{y(t) = C\mathrm{e}^{at}}$.

Partie II. Système différentiel linéaire du premier ordre

1. L'écriture matricielle de (S) est $Y' = AY$.

2. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & 4-\lambda\end{pmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\times 1 = 0\\ &\iff 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = 0\\ &\iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc celui-ci possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \qquad \textbf{et} \qquad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3.$$

Ainsi, $\mathbf{Sp}(A) = \{2\,;3\}$ donc, comme A est une matrice carrée d'ordre 2 ayant deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Déterminons $E_2(A)$:

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases}x + y = 2x\\ -2x + 4y = 2y\end{cases} \iff y = x$$

donc $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

Déterminons $E_3(A)$:

$$X \in E_3(A) \iff AX = 3X \iff \begin{cases}x + y = 3x\\ -2x + 4y = 3y\end{cases} \iff y = 2x$$

donc $E_3(A) = \left\{\begin{pmatrix}x\\ 2x\end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\right)$.

On conclut que $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = 1$ donc $P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n \\ -3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 \times 3^n & 2 \times 3^n - 2^n \end{pmatrix}}.$$

3. a. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} E_n(t, A) &= \sum_{k=0}^{b} \frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 3^k - 2^k \\ 2^{k+1} - 2 \times 3^k & 2 \times 3^k - 2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(2^{k+1}-3^k)}{k!} & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(3^k-2^k)}{k!} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(2^{k+1}-2\times 3^k)}{k!} & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(2\times 3^k-2^k)}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k-(3t)^k}{k!} & \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k-(2t)^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k-2\times(3t)^k}{k!} & \sum_{k=0}^{n} \frac{2(3t)^k-(2t)^k)}{k!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} & b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \\ c_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} & d_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \end{array}}.$$

b. Toutes les sommes qui apparaissent sont des sommes partielles de séries exponentielles donc les suites $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) = \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t} & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) = 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \end{array}}.$$

c. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{E(t, A) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}}.$$

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors,

$$E(t,A)E(-t,A) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & 2e^{-3t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 2e^{-t} - 2e^{t} + 1 + 2e^{t} - 2 - 2 + 2e^{-t} & 2e^{-t} - 2 - 1 + e^{t} + 2 - e^{t} - 2e^{-t} + 1 \\ 4 - 2e^{-t} - 4e^{t} + 2 + 4e^{t} - 4 - 2 + 2e^{-t} & 2e^{-t} - 2 - 2 + 2e^{t} + 4 - 2e^{t} - 2e^{-t} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $E(t,A)E(-t,A) = I_2$.

Ainsi, $\boxed{E(t,A) \text{ est inversible et } E(t,A)^{-1} = E(-t,A)}$.

5. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & 2e^{-3t} - e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + (e^{-3t} - e^{-2t})v(t) \\ (2e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t) + (2e^{-3t} - e^{-2t})v(t) \end{pmatrix}$$

donc, pour tout réel t,

$$\boxed{u_1(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + (e^{-3t} - e^{-2t})v(t)}$$

et

$$\boxed{v_1(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t) + (2e^{-3t} - e^{-2t})v(t)}.$$

b. Les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composée et produits de fonctions dérivables et, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= (-4e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) + (2e^{-2t} - e^{-3t})u'(t) + (-3e^{-3t} + 2e^{-2t})v(t) + (e^{-3t} - e^{-2t})v'(t) \\ &= (-4e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) + (2e^{-2t} - e^{-3t})(u(t) + v(t)) + (-3e^{-3t} + 2e^{-2t})v(t) \\ &\qquad + (e^{-3t} - e^{-2t})(-2u(t) + 4v(t)) \\ &= (-4e^{-2t} + 3e^{3t} + 2e^{-2t} - e^{-3t} - 2e^{-3t} + 2e^{-2t})u(t) + \\ &\qquad (2e^{-2t} - e^{-3t} - 3e^{-3t} + 2e^{-2t} + 4e^{-3t} - 4e^{-2t})v(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= (-4e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t) + (2e^{-2t} - 2e^{-3t})u'(t) + (-6e^{-3t} + 2e^{-2t})v(t) + (2e^{-3t} - e^{-2t})v'(t) \\ &= (-4e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t) + (2e^{-2t} - 2e^{-3t})(u(t) + v(t)) + (-6e^{-3t} + 2e^{-2t})v(t) \\ &\qquad + (2e^{-3t} - e^{-2t})(-2u(t) + 4v(t)) \\ &= (-4e^{-2t} + 6e^{3t} + 2e^{-2t} - 2e^{-3t} - 4e^{-3t} + 2e^{-2t})u(t) + \\ &\qquad (2e^{-2t} - 2e^{-3t} - 6e^{-3t} + 2e^{-2t} + 8e^{-3t} - 4e^{-2t})v(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1'(t) = v_1'(t) = 0$.

6. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que u_1 et v_1 sont constantes sur $\mathbb{R}$. Notons $\alpha = u_1(0)$ et $\beta = v_1(0)$. Alors, pour tout réel t, $u_1(t) = \alpha$ et $v_1(t) = \beta$ donc

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(-t, A) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout réel t, $E(-t, A)$ est inversible et son inverse est $E(t, A)$ donc on en déduit que, pour tout réel t,

$$\boxed{\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t, A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}.$$

Ainsi, pour tout réel t,

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t}) + \beta(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}) \\ \alpha(2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t}) + \beta(2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}) \end{pmatrix}$$

i.e. pour tout réel t,

$$\boxed{u(t) = (2\alpha - \beta)\mathrm{e}^{2t} + (\beta - \alpha)\mathrm{e}^{3t} \text{ et } v(t) = (2\alpha - \beta)\mathrm{e}^{2t} + (2\beta - 2\alpha)\mathrm{e}^{3t}}.$$

Sujets mixtes algèbre/probabilités

Sujet 52. Évolution d'un génotype (C7)

Certaines plantes, par exemple le lupin, se reproduisent par auto-fécondation (ou autogamie).

Tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard et de façon indépendante.

On s'intéresse à l'évolution du génotype de la descendance d'une plante mère, concernant un gène qui possède deux allèles A et a.

1. Expliquer ce qui se passe pour la descendance si la plante est de génotype AA ou aa.
On suppose désormais que la plante mère est de génotype Aa.

2. Déterminer les probabilités que la descendance de la première génération soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.

3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements suivants :

- E_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype AA » et on note $y_n = \mathbf{P}(E_n)$;
- F_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa » et on note $z_n = \mathbf{P}(F_n)$;
- G_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype aa » et on note $x_n = \mathbf{P}(G_n)$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}z_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n.$$

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n en fonction de n.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux façons $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k$ et en déduire x_n et y_n en fonction de n.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de X_0, M et n.

5. Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions explicites de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

6. Étudier le comportement à l'infini de ces suites et l'analyser en fonction des propriétés de l'information génétique.

Solution.

1. Si la plante mère est de génotype AA, elle ne peut transmettre que l'allèle A donc toute sa descendance est de génotype AA.
De même, si la plante mère est de génotype aa, toute sa descendance est de génotype aa.
2. Notons A_1 : « le premier allèle est A » et A_2 : « le second allèle est A. Alors, on identifie le choix des allèles à des choix aléatoires, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2}$.
   - la probabilité que la descendance de la première génération soit de génotype AA est $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$ donc, par indépendance, cette probabilité est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
   - la probabilité que la descendance de la première génération soit de génotype Aa est $\mathbf{P}((A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2))$ donc, incompatibilité et indépendance, cette probabilité est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
   - la probabilité que la descendance de la première génération soit de génotype aa est $\mathbf{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ donc, par indépendance, cette probabilité est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (E_n, F_n, G_n) est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \mathbf{P}(G_{n+1}) &= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}(G_{n+1} \mid E_n) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}(G_{n+1} \mid F_n) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}(G_{n+1} \mid G_n) \\ &= y_n \times 0 + z_n \times \frac{1}{4} + x_n \times 1 = x_n + \frac{1}{4} z_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \mathbf{P}(E_{n+1}) &= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}(E_{n+1} \mid E_n) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}(E_{n+1} \mid F_n) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}(E_{n+1} \mid G_n) \\ &= y_n \times 1 + z_n \times \frac{1}{4} + x_n \times 0 = y_n + \frac{1}{4} z_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{n+1} = \mathbf{P}(F_{n+1}) &= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}(F_{n+1} \mid E_n) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}(F_{n+1} \mid F_n) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}(F_{n+1} \mid G_n) \\ &= y_n \times 0 + z_n \times \frac{1}{2} + x_n \times 0 = \frac{1}{2} z_n. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} z_n,\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} z_n \text{ et } z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n}$.

   b. La suite (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ (car le génotype de la plante mère est Aa) et de raison $\frac{1}{2}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

   c. D'une part, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = x_n - x_0 = x_n$$

   car $x_0 = 0$. D'autre part, en utilisant le résultat de la question **a.**,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4} z_k = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = 1 - x_n - z_n = 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

soit, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + \frac{1}{4}z_n \\ y_n + \frac{1}{4}z_n \\ \frac{1}{2}z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b. Ainsi, (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison M donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0}$.

5. Montrons que M est diagonalisable. Comme M est triangulaire, son spectre est constitué de ces termes diagonaux i.e. $\mathbf{Sp}(M) = \{1\,;\frac{1}{2}\}$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Déterminons $E_1(M)$:

$$MX = X \iff \begin{cases} x + \frac{1}{4}z = x \\ y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{1}{2}z = z \end{cases} \iff z = 0.$$

Ainsi, $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Déterminons $E_{\frac{1}{2}}(M)$:

$$MX = \frac{1}{2}X \iff \begin{cases} x + \frac{1}{4}z = \frac{1}{2}x \\ y + \frac{1}{4}z = \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}.$$

Ainsi, $E_{\frac{1}{2}}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Comme $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{\frac{1}{2}}(M)) = 3$, M est diagonalisable et $M = PDP^{-1}$ avec

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$. De plus, on vérifie (par exemple à l'aide de Python ou de Geogebra ou en résolvant un système) que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n = M^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve bien que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n = y_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \text{ et } z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

6. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ donc } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \text{ et } z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
Ainsi, au bout d'un grand nombre de générations, les génotypes AA et aa tendent à s'imposer de façon équiprobable.

Sujet 53. Matrices aléatoires dont les coefficients suivent des lois géométriques (C8)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un univers noté Ω.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre α et que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

I. Probabilités

1. **a.** Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

b. Donner la loi de Y son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbf{P}\left((X=0) \cup (Y=0)\right)$.

3. Montrer que $(X=Y) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} ((X=k) \cap (Y=k))$.

Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

II. Matrices

1. Soit deux réels positifs ou nuls a et b et $M = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de M en fonction de a et b.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M possède 3 valeurs propres distinctes.

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega) = \begin{pmatrix} -X(\omega) & X(\omega) & 0 \\ 2X(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ où X et Y sont les variables aléatoires de la partie I.

a. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit nulle.

b. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit inversible.

c. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ possède trois valeurs propres distinctes.

Solution.

I. Probabilités

1. a. Par définition, $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

De plus, par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \alpha}$.

b. Par définition, $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$ et, pour tout entier naturel k, $\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y + 1 = k + 1)$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(Y = k) = p(1-p)^k}$.

De plus, par théorème, $\mathbf{E}(Y+1) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(Y+1) = \frac{1-p}{p^2}$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y+1-1) = \mathbf{E}(Y+1) - 1$ soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}}$ et,

par propriété de la variance, $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Y+1-1) = \mathbf{V}(Y+1)$ soit $\boxed{\mathbf{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$.

2. Par propriété, $\mathbf{P}\left((X=0) \cup (Y=0)\right) = \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(Y=0) - \mathbf{P}\left((X=0) \cap (Y=0)\right)$.
Or, $\mathbf{P}(X=0) = \frac{\alpha^0}{0!}\mathrm{e}^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha}$, $\mathbf{P}(Y=0) = p(1-p)^0 = p$ et, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}\left((X=0) \cap (Y=0)\right) = \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0) = \mathrm{e}^{-\alpha} \times p$$

donc $\boxed{\mathbf{P}\left((X=0) \cup (Y=0)\right) = \mathrm{e}^{-\alpha} + p - p\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

3. La famille $((X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned}(X=Y) &= (X=Y) \cap \Omega = (X=Y) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=k)\right)\\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((X=Y) \cap (X=k)\right) = \bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((k=Y) \cap (X=k)\right)\end{aligned}$$

et ainsi $\boxed{(X=Y) = \bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((X=k) \cap (Y=k)\right)}$.

Comme il s'agit d'une union d'évènements incompatibles (puisque les évènements $(X=k)$ sont incompatibles pour $k \in \mathbb{N}$), il s'ensuit que

$$\mathbf{P}(X=Y) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((X=k) \cap (Y=k)\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left((X=k) \cap (Y=k)\right).$$

Or, Xet Y sont indépendantes donc

$$\mathbf{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha} \times p(1-p)^k = p\mathrm{e}^{-\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\alpha)^k}{k!}.$$

donc, en reconnaissant la somme d'une série géométrique, $\mathbf{P}(X=Y) = p\mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{e}^{(1-p)\alpha}$ i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(X=Y) = p\mathrm{e}^{-p\alpha}}.$$

II. Matrices

a. i. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -ax + ay = \lambda x \\ 2ax = \lambda y \\ bz = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} -(a+\lambda)x + ay = 0 \\ 2ax - \lambda y = 0 \\ (b-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

<u>1^{re} cas</u>. Supposons que $a = 0$. Alors, le système s'écrit

$$\begin{cases} -\lambda x = 0 \\ -\lambda y = 0 \\ (b-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

donc il n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = b$.

<u>2^{e} cas</u>. Supposons que $a \neq 0$. Alors,

$$\begin{cases} -(a+\lambda)x + ay = 0 & L_1 \\ 2ax - \lambda y = 0 & L_2 \\ (b-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2ax - \lambda y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -(a+\lambda)x + ay = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ (b-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2ax - \lambda y = 0 & L_1 \\ \left(a - \dfrac{\lambda(a+\lambda)}{2a}\right) y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{a+\lambda}{2a} L_1 \\ (b-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, le système n'est pas de rang 3 si et seulement si $a - \dfrac{\lambda(a+\lambda)}{2a} = 0$ ou $b - \lambda = 0$ i.e. $\lambda = b$. Or,

$$a - \frac{\lambda(a+\lambda)}{2a} = 0 \iff 2a^2 - \lambda(a+\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + a\lambda - 2a^2 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 + aX - 2a^2$ est $\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times (-2a) = 9a^2 > 0$ (car $a \neq 0$) donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{-a - |3a|}{2} = -2a \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-a + \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{-a + |3a|}{2} = a$$

car $a > 0$.

Dans ce cas, les valeurs propres de M sont donc $-2a$, a et b.

On conclut que $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0\,;b\} \text{ si } a = 0 \text{ et } \mathrm{Sp}(M) = \{-2a\,;a\,;b\} \text{ si } a > 0}$.

b. La matrice M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M i.e. si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

On conclut que $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0}$.

c. Si $a = 0$, M possède au plus 2 valeurs propres. Si $a > 0$ alors $-2a \neq 0$ donc M possède 3 valeurs propres distincts si et seulement si $b \neq -2a$ et $b \neq a$. Or, dans ce cas, $-2a < 0$ et $b \geqslant 0$ donc $-2a \neq b$. Ainsi, M possède 3 valeurs propres distinctes si et seulement si $a \neq b$.

On conclut donc que $\boxed{M \text{ possède 3 valeurs propres distinctes si et seulement si } a \notin \{0\,;b\}}$.

4. a. La matrice $M(\omega)$ est nulle si et seulement si $X(\omega) = 0$ et $Y(\omega) = 0$. Or, on a vu dans la question **I.2.** que $\mathbf{P}((X = 0 \cap (Y = 0)) = p\mathrm{e}^{-\alpha}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que la matrice } M(\omega) \text{ soit nulle est } p\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

b. D'après les résultats de la question **1.**, $M(\omega)$ est inversible si et seulement si $X(\omega) \neq 0$ et $Y(\omega) \neq 0$. Or, $(X \neq 0) \cap (Y \neq 0) = \overline{(X = 0) \cup (Y = 0)}$ donc, d'après les résultats de la première partie, $\boxed{\text{la probabilité que } M(\omega) \text{ soit inversible est } 1 - \mathrm{e}^{-\alpha} - p + p\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

c. D'après les résultats de la question **1.**, $M(\omega)$ possède 3 valeurs propres distinctes si et seulement si $X(\omega) \neq 0$ et $X(\omega) \neq Y(\omega)$. Or, $(X \neq 0) \cap (X \neq Y) = \overline{(X = 0) \cup (X = Y)}$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left((X = 0) \cup (X = Y)\right) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = Y) - \mathbf{P}\left((X = 0) \cap (X = Y)\right) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = Y) - \mathbf{P}\left((X = 0) \cap (Y = 0).\right)\end{aligned}$$

donc, d'après les résultats de la première partie,

$$\mathbf{P}\left((X = 0) \cup (X = Y)\right) = \mathrm{e}^{-\alpha} + p\mathrm{e}^{-p\alpha} - p\mathrm{e}^{-\alpha}$$

on conclut donc que la probabilité que $M(\omega)$ possède 3 valeurs propres distinctes est

$$\boxed{1 - \mathrm{e}^{-\alpha} - p\mathrm{e}^{-p\alpha} + p\mathrm{e}^{-\alpha}}.$$

Sujet 54. Tirages successivement dans k urnes (C10)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère k urnes disposées les unes à la suite des autres.

La première contient b boules blanches et n boules noires, avec $(b, n) \in (\mathbb{N})^2$ et $b + n > 0$. Toutes les autres contiennent une boule blanche et une boule noire.

On pioche une boule dans la première urne pour la placer dans la deuxième, puis une boule dans la deuxième que l'on place dans la troisième, et ainsi de suite.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule piochée dans l'urne k est blanche et à 0 sinon.

1. Donner les lois de X_1 et X_2, leurs espérances et variances respectives.

2. À quelle condition les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent-elles la même loi ?

3. À quelle condition sur n les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

4. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \mathbf{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbf{P}(X_k = 0)$.
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_{k+1} et q_{k+1} en fonction de p_k et q_k et en déduire une matrice M telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}.$$

Exprimer ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k et q_k en fonction de M, k, p_1 et q_1.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de la matrice A.

6. On admet que la formule du binôme de Newton est vraie pour deux matrices M et N qui commutent.
Exprimer M en fonction de A et de I_2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, M^k.

7. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k et q_k en fonction de k.
Étudier et interpréter leur comportement asymptotique.

Solution.

1. Par définition, $\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{b}{b+n}}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \frac{b}{b+n}}$ et $\mathbf{V}(X_1) = \frac{b}{b+n}\left(1 - \frac{b}{b+n}\right)$ soit $\boxed{\mathbf{V}(X_1) = \frac{bn}{(b+n)^2}}$.

De même, X_2 suit une loi de Bernoulli dont le succès est « Tirer une boule blanche dans la seconde urne ». Comme $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 1) &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\\ &= \frac{n}{b+n} \times \frac{1}{3} + \frac{b}{b+n} \times \frac{2}{3} = \frac{2b+n}{3(b+n)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{2b+n}{3(b+n)})}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = \frac{2b+n}{3(b+n)}}$ et $\mathbf{V}(X_2) = \frac{2b+n}{3(b+n)}\left(1 - \frac{2b+n}{3(b+n)}\right)$ c'est-à-dire $\boxed{\mathbf{V}(X_2) = \frac{(2b+n)(b+2n)}{9(b+n)^2}}$.

2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi si et seulement si $\frac{b}{b+n} = \frac{2b+n}{3(b+n)}$. Or,

$$\frac{b}{b+n} = \frac{2b+n}{3(b+n)} \iff 3b = 2b + n \iff b = n.$$

Ainsi, $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi si et seulement } b = n}$.

3. On a vu dans la question **1.** que $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{2}{3}$ donc une condition nécessaire pour que X_1 et X_2 soient indépendantes est que

$$\frac{2}{3} = \mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{2b+n}{3(b+n)}.$$

Or,

$$\frac{2}{3} = \frac{2b+n}{3(b+n)} \iff 2(b+n) = 2b + n \iff n = 0.$$

Réciproquement, si $n = 0$ alors X_1 est une variable aléatoire certaine égale à 1 donc, pour tout $k \in \{0\,;1\}$, $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = k) = 0 = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(X_2 = k)$ car $(X_1 = 0) = \varnothing$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = k) = \mathbf{P}(X_2 = k) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(X_2 = k)$ car $(X_1 = 1) = \Omega$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si } n = 0}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $((X_k = 0), (X_k = 1))$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}p_{k+1} = \mathbf{P}(X_{k+1} = 1) &= \mathbf{P}(X_k = 0)\mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 0) + \mathbf{P}(X_k = 1)\mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1)\\ &= q_k \times \frac{1}{3} + p_k \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}q_{k+1} = \mathbf{P}(X_{k+1} = 0) &= \mathbf{P}(X_k = 0)\mathbf{P}(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 0) + \mathbf{P}(X_k = 1)\mathbf{P}(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 1)\\ &= q_k \times \frac{2}{3} + p_k \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{3}q_k.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k \\ q_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{3}q_k \end{cases}}$.

Dès lors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k \\ \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{3}q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$.

5. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_{k+1} = MX_k$ donc (X_k) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison M donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = M^{k-1}X_1$ i.e.

$$\boxed{\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = M^{k-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}}.$$

6. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ donc $A^3 = A^2A = (2A)A = 2A^2 = 2(2A) = 4A$ et $A^4 = A^3A = (4A)A = 4A^2 = 4(2A) = 8A$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 2^{n-1}A$.

Initialisation. Comme $2^{1-1}A = 2^0A = A = A^1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$A^{n+1} = A^nA = (2^{n-1}A)A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}(2A) = 2^{n-1}2A = 2^nA$$

donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = 2^{n-1}A}.$$

7. On remarque que $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M = \frac{1}{3}I_2 + \frac{1}{3}A}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $M = \frac{1}{3}(A + I_2)$, $M^k = \left[\frac{1}{3}(A + I_2)\right]^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k (A + I_2)^k$. Or, les matrices A et I_2 commutent donc, par le formule du binôme de Newton,

$$(A + I_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j I_2^{n-j} = \binom{k}{0} A^0 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^{j-1}A = I_2 + \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^{j-1}\right) A.$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^{j-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^j = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j 1^{k-j} - 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(2+1)^k - 1\right] = \frac{3^k - 1}{2}$$

donc on conclut que

$$\boxed{M^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \left[I_2 + \frac{3^k - 1}{2} A\right]}.$$

On remarque, de plus, que cette égalité est encore vraie pour $k = 0$.

8. On en déduit que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = M^{k-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \left[I_2 + \frac{3^{k-1} - 1}{2} A\right] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \left[\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + \frac{3^{k-1} - 1}{2} \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_1 + q_1 \end{pmatrix}\right].$$

Or, $p_1 = \frac{b}{b+n}$ et $q_1 = \frac{n}{b+n}$ donc $p_1 + q_1 = 1$ et ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} \frac{b}{b+n} + \frac{3^{k-1}-1}{2} \\ \frac{n}{b+n} + \frac{3^{k-1}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = \frac{1}{3^{k-1}} \left[\frac{b}{b+n} + \frac{3^{k-1} - 1}{2}\right] \quad \text{et} \quad q_k = \frac{1}{3^{k-1}} \left[\frac{n}{b+n} + \frac{3^{k-1} - 1}{2}\right]}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = \frac{b}{(b+n)3^{k-1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{k-1}}$$

et, comme $3 > 1$, $3^{k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ donc, par quotients et somme, $\boxed{p_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{2}}$.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$q_k = \frac{n}{(b+n)3^{k-1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{k-1}}$$

et, comme $3 > 1$, $3^{k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ donc, par quotients et somme, $\boxed{q_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{2}}$.

Ainsi, après un grand nombre de tirages, on se rapproche de l'équiprobabilité ente les boules noires et blanches, et ce, quelle que soit la composition de l'urne de départ.

Sujet 55. Mouvement d'une particule (O3)

Une particule se déplace entre trois points A, B et C. On ne connaît pas sa position initiale. Lorsque la particule est située en :

- A, elle va en B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et en C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$;
- B, elle va en A avec une probabilité $\frac{3}{4}$ et en C avec une proba $\frac{1}{4}$;
- C, elle va en B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que la particule soit en A, en B et en C après n déplacements.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases} .$$

2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} .$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de A.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} .$$

5. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

6. En déduire les valeurs propres de M, en utilisant la relation de la question **3.**.

7. Justifier qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.

8. On note, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} .$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = D^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} .$$

Solution.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n : « la particulier se trouve en A après n déplacements », B_n : « la particulier se trouve en B après n déplacements » et C_n : « la particulier se trouve en C après n déplacements ».

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid C_n) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{3}{4} + c_n \times 0 = \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n) \\ &= a_n \times \frac{3}{4} + b_n \times 0 + c_n \times 1 = \frac{3}{4} a_n + c_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \mathbf{P}(C_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{C+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid C_n) \\ &= a_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n \end{cases}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} b_n \\ \frac{3}{4} a_n + c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}$.

3. $M = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M = \frac{1}{4} A}$.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. Comme $M^0 = I_3$, $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, grâce au résultat de la question **2.**,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}}$.

5. 1^re méthode : détermination par le calcul

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} 3y = \lambda x \\ 3x + 4z = \lambda y \\ x + y = \lambda z \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x + 3y = 0 & L_1 \\ 3x - \lambda y + 4z = 0 & L_2 \\ x + y - \lambda z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - \lambda z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 3x - \lambda y + 4z = 0 & L_2 \\ -\lambda x + 3y = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - \lambda z = 0 & L_1 \\ -(\lambda+3)y + (4+3\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ (3+\lambda)y - \lambda^2 z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - \lambda z = 0 & L_1 \\ -(\lambda+3)y + (4+3\lambda)z = 0 & L_2 \\ (-\lambda^2 + 3\lambda + 4)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2 \end{cases}$$

Ainsi, (S) n'est pas de rang 2 si et seulement si $\lambda + 3 = 0$ ou $-\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$. La première équation équivaut à $\lambda = -3$. Pour la seconde, le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$ donc celle-ci possède deux solutions réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 4 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = -1.$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-3\,; 4\,; -1\}}$.

2^de méthode : détermination à l'aide de Python

Grâce au code suivant,

```python
import numpy as np

A = np.array([[0,3,0], [3,0,4], [1,1,0]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([ 4., -3., -1.]),
array([[-5.66315014e-01, -7.07106781e-01, -8.01783726e-01],
[-7.55086685e-01,  7.07106781e-01,  2.67261242e-01],
[-3.30350425e-01,  3.43839982e-17,  5.34522484e-01]]))
```

on conjecture $\mathrm{Sp}(A) = \{4\,;-3\,;-1\}$. On peut le vérifier en déterminant $E_4(A)$, $E_{-3}(A)$ et $E_{-1}(A)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in E_4(A) \iff \begin{cases} 3y = 4x \\ 3x + 4z = 4y \\ x + y = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ z = \frac{7}{12}x \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_4(A)$ donc 4 est bien valeur propre de A.

$$X \in E_{-3}(A) \iff \begin{cases} 3y = -3x \\ 3x + 4z = -3y \\ x + y = -3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_{-3}(A)$ donc -3 est bien valeur propre de A.

$$X \in E_{-1}(A) \iff \begin{cases} 3y = -x \\ 3x + 4z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y \\ z = 2y \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_{-1}(A)$ donc -1 est bien valeur propre de A.
De plus, comme A est une matrice carrée d'ordre 3, elle possède au maximum 3 valeurs propres donc on conclut que $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{4\,;-3\,;-1\}}$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $MX = \lambda X$ si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $\frac{1}{4}AX = \lambda X$ si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = (4\lambda)X$. Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement si $4\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1\,;-\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\}}$.

7. Comme M est une matrice carrée d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distinctes, par théorème, M est diagonalisable donc il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

8. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ donc, grâce à la question **4.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = PD^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

donc, en multipliant à gauche par P^{-1},

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}}.$$

Sujet 56. Sensibilité des grenouilles aux couleurs (O3)

Soit p et q dans $]0\,;1[$ et $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

1. *Une première méthode pour déterminer les puissances de A*

a. Déterminer deux matrices B et C telles que $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.

b. Calculer B^2 et C^2. En déduire BC et CB.

c. On admet que la formule du binôme de Newton est utilisable pour des matrices M et N d'ordre 2 qui commutent, c'est-à-dire telles que $MN = NM$.
Écrire cette formule du binôme de Newton.

d. Calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 2$. On pourra noter $\alpha = 1 - p - q$.

2. Afin de tester la sensibilité aux couleurs bleu et rouge des amphibiens, on place une grenouille adulte (les têtards voient en noir et blanc) dans une boîte séparée en deux compartiments, l'un rouge et l'autre bleu. On observe les déplacements de l'animal et, à chaque minute, on note où il se trouve.

S'il était en « zone bleue » à la n-ième minute, il est passé en « zone rouge » à la minute $n+1$ avec une probabilité q. De même, s'il était en « zone rouge » à la n-ième minute, il est passé en « zone bleue » à la minute $n+1$ avec une probabilité p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n (resp. b_n) la probabilité que la grenouille soit en « zone rouge » (resp. bleue) à la minute n.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n à l'aide d'une relation matricielle.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n et b_n en fonction de r_0 et b_0 à l'aide d'une relation matricielle.

c. À l'instant initial, le grenouille est introduite en « zone bleue ». Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n et b_n en fonction de n.

d. Application numérique : on prend $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{1}{6}$.

Déterminer le comportement à l'infini de r_n et b_n.

3. *Une deuxième méthode pour déterminer les puissances de A*

a. Montrer que la matrice A est diagonalisable quelles que soient les valeurs prises par p et q.
Déterminer ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.

b. Exprimer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1. a. Soit B et C deux matrices carrées d'ordre 2. Alors,

$$\begin{cases} B+(1-p-q)C = A \\ B+C = I_2 \end{cases} \iff \begin{cases} I_2 - C+(1-p-q)C = A \\ B = I_2 - C \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} I_2 - (p+q)C = A \\ B = I_2 - C \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} C = \frac{1}{p+q}(I_2 - A) \\ B = I_2 - \frac{1}{p+q}(I_2 - A) \end{cases}$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{B = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \text{ et } C = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}}$ vérifient $A = B+(1-p-q)C$ et $B+C = I_2$.

b. On a

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} q^2+qp & q^2+qp \\ pq+p^2 & pq+p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} (p+q)q & (p+q)q \\ (p+q)p & (p+q)p \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{B^2 = B}$.

De même,

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p^2+qp & -pq-q^2 \\ -p^2-qp & pq+q^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p(p+q) & -q(p+q) \\ -p(p+q) & q(p+q) \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{B^2 = C}$.

Comme $B+C = I_2$, $B = C - I_2$ donc $BC = C^2 - C = C - C = 0_2$ et $CB = C^2 - C = C - C = 0_2$. Ainsi, $\boxed{BC = CB = 0_2}$.

c. La formule du binôme de Newton pour les matrices carrées d'ordre 2 s'écrit de la manière suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit M et N deux matrices carrées d'ordre 2 telles que $MN = NM$. Alors,

$$\boxed{(M+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k N^{n-k}}.$$

d. Posons $\alpha = 1-p-q$. Comme B et C commutent, il en est de même de B et αC donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour les matrices. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors

$$A^n = (B+\alpha C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (\alpha C)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} B^k C^{n-k}.$$

Si $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $k > 0$ et $n - k > 0$ donc

$$B^k C^{n-k} = B^{k-1}(BC)C^{n-k-1} = B^{k-1} 0_2 C^{n-k-1} = 0_2.$$

Ainsi, dans la somme ci-dessus, tous les termes sont nuls sauf le premier et le dernier. Ainsi,

$$A^n = \binom{n}{0} \alpha^n C^n + \binom{n}{k} B^n = B^n + \alpha^n C^n.$$

Or, comme $B^2 = B$ et $C^2 = C$, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$ et $C^n = C$ donc $A^n = B + \alpha^n C$ i.e.

$$\boxed{A^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q + \alpha^n p & q - \alpha^n q \\ p - \alpha^n p & p + \alpha^n q \end{pmatrix}}.$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons R_n : « la grenouille se trouve dans la zone rouge à la minute n ». Alors, R_n et $\overline{R_n}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} r_{n+1} = \mathbf{P}(R_{n+1}) &= \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(R_{n+1} \mid R_n) + \mathbf{P}(\overline{R_n})\mathbf{P}(R_{n+1} \mid \overline{R_n}) \\ &= r_n \times (1-p) + b_n \times q = (1-p) r_n + q b_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid R_n) + \mathbf{P}(\overline{R_n})\mathbf{P}(B_{n+1} \mid \overline{R_n}) \\ &= r_n \times p + b_n \times (1-q) = p r_n + (1-q) b_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p) r_n + q b_n \\ p r_n + (1-q) b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}}.$$

b. La suite $\left(\begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}\right)$ est donc une suite géométrique de matrices de raison A donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ b_0 \end{pmatrix}},$$

c. Comme la grenouille se trouve initialement dans la zone bleue, $\begin{pmatrix} r_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q + \alpha^n p & q - \alpha^n q \\ p - \alpha^n p & p + \alpha^n q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - \alpha^n q \\ p + \alpha^n q \end{pmatrix}$$

et ainsi $r_n = \dfrac{q - \alpha^n q}{p+q}$ et $b_n = \dfrac{p + \alpha^n q}{p+q}$. De plus, on vérifie que ces expressions sont encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ car $\dfrac{q - \alpha^0 q}{p+q} = 0 = r_0$, $\dfrac{p + \alpha^0 q}{p+q} = 1 = b_0$, $\dfrac{q - \alpha^1 q}{p+q} = \dfrac{q(1-(1-p-q))}{p+q} = q = r_1$ et $\dfrac{p + \alpha^1 q}{p+q} = \dfrac{p + (1-p-q)q}{p+q} = \dfrac{p + q - (p+q)q}{p+q} = 1 - q = b_1$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ r_n = \dfrac{q - \alpha^n q}{p+q} \text{ et } b_n = \dfrac{p + \alpha^n q}{p+q}}$.

d. Comme $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{1}{6}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ donc, comme $|\alpha| < 1$, $\alpha^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc, par produits et sommes de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{q}{p+q} \text{ et } \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{p}{p+q}}$.

3. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1 - p - \lambda & q \\ p & 1 - q - \lambda \end{vmatrix} = (1 - p - \lambda)(1 - q - \lambda) - pq \\ &= 1 - q - \lambda - p + pq + p\lambda - \lambda + q\lambda + \lambda^2 - pq \\ &= \lambda^2 - (\alpha + 1)\lambda + \alpha \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $P = X^2 - (\alpha + 1)X + \alpha$ est

$$\Delta = (-(\alpha+1))^2 - 4\alpha = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2.$$

Comme $p > 0$ et $q > 0$, $p + q > 0$ donc $\alpha = 1 - p - q < 1$. Ainsi, $\Delta > 0$ donc P possède deux racines distinctes. Ainsi, A possède deux valeurs propres distinctes donc, comme A est d'ordre 2, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$. De plus, les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + 1 - \sqrt{(\alpha - 1)^2}}{2} = \frac{\alpha + 1 - |\alpha - 1|}{2} = \frac{\alpha + 1 - (1 - \alpha)}{2} = \alpha$$

et

$$\lambda_2 = \frac{\alpha + 1 + \sqrt{(\alpha - 1)^2}}{2} = \frac{\alpha + 1 + |\alpha - 1|}{2} = \frac{\alpha + 1 + (1 - \alpha)}{2} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\,;\alpha\}}$.

Déterminons des vecteurs propres. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-p)x + qy = x \\ px + (1-q)y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -px + qy = 0 \\ px - qy = 0 \end{cases} \iff y = \frac{p}{q} x.$$

Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } 1}$.

De même,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-p)x + qy = \alpha x \\ px + (1-q)y = \alpha y \end{cases} \iff \begin{cases} qx + qy = 0 \\ px + py = 0 \end{cases} \iff y = -x.$$

Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \alpha}$.

4. En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $A = PDP^{-1}$. Par propriété, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = -(p+q)$ donc $P^{-1} = -\frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^n p & -\alpha^n q \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{A^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q + \alpha^n p & q - \alpha^n q \\ p - \alpha^n p & p + \alpha^n q \end{pmatrix}}.$$

Sujet 57. Échanges de boules entre deux urnes I (O3)

On dispose de deux urnes A et B ainsi que de deux boules portant respectivement les numéros 0 et 1.

Initialement, l'urne A contient les deux boules et l'urne B est vide.

À chaque tour, on lance un dé équilibré à 6 faces et on effectue un éventuel déplacement d'une boule entre les urnes selon les règles suivantes :

- si le résultat du dé est 1 ou 2, on change d'urne la boule numérotée 0,
- si le résultat du dé est 3 ou 4, on change d'urne la boule numérotée 1,
- si le résultat du dé est 5 ou 6, on ne modifie pas le contenu des urnes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par :

- p_n la probabilité que l'urne A contienne les 2 boules après l'étape n ;
- q_n la probabilité que l'urne A ne contienne que la boule numérotée 0 après l'étape n ;
- r_n la probabilité que l'urne A ne contienne que la boule numérotée 1 après l'étape n ;
- t_n la probabilité que l'urne A ne contienne aucune boule après l'étape n.

Partie I

1. Donner les valeurs de p_0, q_0, r_0 et t_0.

2. Déterminer les valeurs de p_1, q_1, r_1 et t_1.

3. Montrer qu'il existe une matrice R telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre M, p_n, q_n, r_n, t_n et p_0, q_0, r_0, t_0.

Partie II

On considère les trois matrices suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer UV et VU.

2. Calculer U^2 puis U^3 et émettre une conjecture sur l'expression explicite de U^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer cette conjecture.

3. Calculer V^2 puis V^3 puis V^4 et émettre une conjecture sur l'expression explicite de V^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer cette conjecture.

4. Exprimer R en fonction de U et V puis, en admettant que la formule du binôme de Newton s'applique, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de R^n en fonction de n.

5. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de p_n, q_n, r_n, t_n en fonction de n.

Solution.

Partie I

1. Initialement, l'urne A contient les deux boules donc $\boxed{p_0 = 1 \text{ et } q_0 = r_0 = t_0 = 0}$.

2. Les deux boules restent dans l'urne A si on obtient 5 ou 6 avec le dé donc $\boxed{p_1 = \dfrac{1}{3}}$. L'urne A ne contient plus que la boule numérotée 0 si on obtient 3 ou 4 avec le dé donc $\boxed{q_1 = \dfrac{1}{3}}$. L'urne A ne contient plus que la boule numérotée 1 si on obtient 1 ou 2 avec le dé donc $\boxed{r_1 = \dfrac{1}{3}}$. Enfin, il n'est pas possible de déplacer les deux boules en un seul tour donc $\boxed{t_1 = 0}$.

3. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n (resp. Q_n, R_n et T_n) : « l'urne A contient les deux boules (resp. uniquement la boule 0, uniquement la boule 1, aucune boule) après l'étape n ».

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les évènements E_n, F_n, G_n et H_n forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathbf{P}(E_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(E_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(E_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(E_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(E_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times \frac{1}{3} + r_n \times \frac{1}{3} + t_n \times 0 \\
&= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= \mathbf{P}(F_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(F_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(F_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(F_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times \frac{1}{3} + r_n \times 0 + t_n \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}t_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= \mathbf{P}(G_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(G_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times 0 + r_n \times \frac{1}{3} + t_n \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}r_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= \mathbf{P}(H_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(H_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(H_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(H_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(H_{n+1}) \\
&= p_n \times 0 + q_n \times \frac{1}{3} + r_n \times \frac{1}{3} + t_n \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n \\ \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}t_n \\ \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{t_n} \\ \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$ convient.

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ donc (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison M donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ t_0 \end{pmatrix}}.$$

Partie II

1. Le calcul donne

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$VU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{UV = VU = U}$.

2. Le calcul donne

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{U^2 = 4U}$. Dès lors, $U^3 = U^2U = (4U)U = 4U^2 = 4(4U)$ donc $\boxed{U^3 = 16U}$.

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 4^{n-1}U$.

Montrons-le par récurrence.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $U^n = 4^{n-1}U$ ».

Initialisation. $4^{1-1}U = 4^0U = U$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$U^{n+1} = U^nU = (4^{n-1}U)U = 4^{n-1}U^2 = 4^{n-1}(4U) = 4^nU$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ U^n = 4^{n-1}U}$.

3. Le calcul donne

$$V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{V^2 = I_4}$. Dès lors, $V^3 = V^2V = I_4V$ donc $\boxed{V^3 = V}$.

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V^n = I_4$ si n est pair et $V^n = V$ si n est impair.

Montrons-le par récurrence.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $V^n = I_4$ si n est pair et $V^n = V$ si n est impair ».

Initialisation. $V^0 = I_4$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, si n est pair, $n+1$ est impair et $V^{n+1} = V^nV = I_4V = V$. Si n est impair, $n+1$ est pair et $V^{n+1} = V^nV = VV = V^2 = I_4$. Ainsi, $V^{n+1} = V$ si $n+1$ est impair et $V^{n+1} = I_4$ si $n+1$ est pair donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V^n = I_4$ si n est pair et $V^n = V$ si n est impair.

4. On remarque que $\boxed{R = U - V}$. On en déduit en appliquant la formule du binôme de Newton (ce qui est possible ici car U et V commutent), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R^n = (U-V)^n = (U+(-V))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k(-V)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U^kV^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $n-k$ est pair, alors $U^kV^{n-k} = U^kI_4 = U^k$ et, si $n-k$ est impair, alors $U^kV^{n-k} = U^kV = U^{k-1}(UV) = U^{k-1}U = U^k$ donc

$$\begin{aligned} R^n &= (-1)^nV^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U^kV^{n-k} = (-1)^nV^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U^k \\ &= (-1)^nV^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (4^{k-1}U) = (-1)^nV^n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}(-1)^{n-k} \right) U. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}(-1)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k4^{-1}(-1)^{n-k} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-1)^{n-k} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-1)^{n-k} - (-1)^n\right) = \frac{1}{4}\left((4-1)^n - (-1)^n\right) \\ &= \frac{3^n-(-1)^n}{4}\end{aligned}$$

donc

$$R^n = (-1)^nV^n + \frac{3^n-(-1)^n}{4}U.$$

On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } R^n = I_4 + \frac{3^n-1}{4}U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3\end{pmatrix}}$$

et

$$\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } R^n = -V + \frac{3^n+1}{4}U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3\\ 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 & 3^n+1\\ 3^n+1 & 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1\\ 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1\end{pmatrix}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair alors

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\\ r_{n+1}\\ t_{n+1}\end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix}p_0\\ q_0\\ r_0\\ t_0\end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{3}R\right)^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^n}R^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3^n}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\times 3^n}\begin{pmatrix}3^n+3\\ 3^n-1\\ 3^n-1\\ 3^n-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{p_n = \frac{3^n+1}{4\times 3^n} \qquad \text{et} \qquad q_n = r_n = t_n = \frac{3^n-1}{4\times 3^n}}.$$

Si n est impair alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ t_0 \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{3}R\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} R^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 \\ 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 & 3^n+1 \\ 3^n-1 & 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 \\ 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4 \times 3^n} \begin{pmatrix} 3^n+1 \\ 3^n+1 \\ 3^n+1 \\ 3^n-3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{p_n = q_n = r_n = \frac{3^n+1}{4 \times 3^n} \qquad \text{et} \qquad t_n = \frac{3^n-3}{4 \times 3^n}}.$$

Sujet 58. Échanges de boules entre deux urnes II (O3)

On dispose de deux urnes A et B.

Initialement, l'urne A contient 2 boules noires et l'urne B contient 2 boules blanches.

À chaque tour, on choisit simultanément une boule de l'urne A et une boule de l'urne B, et on échange ces deux boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans l'urne A après n échanges.

On a donc $X_0 = 0$ de façon certaine.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de X_2, son espérance et sa variance.

3. Déterminer une matrice carrée M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

4. Diagonaliser la matrice M.

5. En déduire la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer l'espérance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Calculer la variance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

1. Au premier tirage, on tire nécessairement une boule noire dans l'urne A et une boule blanche dans l'urne B et on les échange donc $X_1 = 1$ de façon certaine. Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 1}$ et $\boxed{\mathbf{V}(X_1) = 0}$.

2. Commençons par remarquer que $X_2(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$.
Notons A_2 : « tirer une boule blanche dans l'urne A au second tirage » et B_2 : « tirer une boule blanche dans l'urne B au second tirage ». Alors,

- $(X_2 = 0) = A_2 \cap \overline{B_2}$ donc, par indépendance, $\mathbf{P}(X_2 = 0) = \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- $(X_2 = 1) = (A_2 \cap B_2) \cup (\overline{A_2} \cup \overline{B_2})$ donc, par incompatibilité et indépendance, $\mathbf{P}(X_2 = 0) = \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(\overline{A_2})\mathbf{P}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
- $(X_2 = 2) = \overline{A_2} \cap B_2$ donc, par indépendance, $\mathbf{P}(X_2 = 2) = \mathbf{P}(\overline{A_2} \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

Ainsi, $\mathbf{E}(X_2) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$ soit $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = 1}$.
De plus, le théorème de transfert, $\mathbf{E}(X_2^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ donc $\mathbf{V}(X_2) = \frac{3}{2} - 1^2$ soit $\boxed{\mathbf{V}(X_2) = \frac{1}{2}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, $X_n(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$.
Comme $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbf{P}(X_n = 0)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) \\
&\qquad + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2) \\
&= \mathbf{P}(X_n = 0) \times 0 + \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{4} + \mathbf{P}(X_n = 2) \times 0 \\
&= \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}(X_n = 0)\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) \\
&\qquad + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2) \\
&= \mathbf{P}(X_n = 0) \times 1 + \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + \mathbf{P}(X_n = 2) \times 1 \\
&= \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbf{P}(X_n = 0)\mathbf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) \\
&\qquad + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2) \\
&= \mathbf{P}(X_n = 0) \times 0 + \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{4} + \mathbf{P}(X_n = 0) \times 0 \\
&= \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 1)
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Alors,

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} \frac{1}{4}y = \lambda x \\ x + \frac{1}{2}y + z = \lambda y \\ \frac{1}{4}y = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda x + \frac{1}{4}y = 0 \\ x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 \\ \frac{1}{4}y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ \frac{1}{4}y - \lambda z = 0 & L_2 \\ -\lambda x + \frac{1}{4}y = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ y - 4\lambda z = 0 & L_2 \leftarrow 4L_2 \\ (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \lambda^2)y + \lambda z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ y - 4\lambda z = 0 & L_2 \leftarrow 4L_2 \\ \left[\lambda + 4\lambda(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \lambda^2)\right] z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \lambda^2)L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (\frac{1}{2} - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ y - 4\lambda z = 0 & L_2 \leftarrow 4L_2 \\ 2\lambda(1 + \lambda - 2\lambda^2)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Ainsi, ce système n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda = 0$ ou $1 + \lambda - 2\lambda^2 = 0$. Or, 1 est un racine évidente de $1 + X - 2X^2$ donc ce polynôme se factorise par $(X - 1)$: $1 + X - 2X^2 = (X - 1)(-1 - 2X)$. On en déduit que son autre racine est $-\frac{1}{2}$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\,;1\,;-\frac{1}{2}\}$.

De plus,

$$MX = 0X \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $E_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

$$MX = 1X \iff \begin{cases} x - \frac{1}{2}y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 4z \end{cases}$$

donc $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$MX = -\frac{1}{2}X \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

donc $E_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Remarque. Le code Python suivant :

```python
import numpy as np

A = np.matrix([[0,1/4,0], [1,1/2,1], [0,1/4,0]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([ 1.00000000e+00,  5.61773426e-18, -5.00000000e-01]),
matrix([[-2.35702260e-01,  7.07106781e-01,  4.08248290e-01],
[-9.42809042e-01, -3.54785098e-16, -8.16496581e-01],
[-2.35702260e-01, -7.07106781e-01,  4.08248290e-01]]))
```

confirme ces valeurs et aurait permis de les déterminer (au moins de façon conjecturale).

5. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$. Alors, d'après la question **3.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$ donc (U_n) est une suite géométrique de matrices de raison M et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$. Or, $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$.

Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$ donc $D^0 = I_3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$.

Le code Python suivant :

```python
import numpy as np

P=np.matrix([[1,1,1],[0,4,-2],[-1,1,1]])
print(np.linalg.inv(P))
```

qui affiche

```
[[ 5.00000000e-01 -2.77555756e-17 -5.00000000e-01]
 [ 1.66666667e-01  1.66666667e-01  1.66666667e-01]
 [ 3.33333333e-01 -1.66666667e-01  3.33333333e-01]]
```

permet de conjecturer que $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et on vérifie que c'est bien le cas en multipliant P par ce matrice et en vérifiant qu'on obtient bien I_3.

On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
U_n &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On conclut que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n=0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \mathbf{P}(X_n=1)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \mathbf{P}(X_n=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors

$$\mathbf{E}(X_n)=0\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)+1\times\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)+2\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X_n)=1}$.

7. Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(X_n^2)=0^2\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)+1^2\times\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)+2^2\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

donc, par le formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{E}(X_n^2) - \mathbf{E}(X_n)^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(X_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Sujet 59. Tirages avec remplacement (O3)

Une urne contient 2 boules blanches.

À chaque étape, on enlève une boule de l'urne et on la remplace par une nouvelle boule, celle-ci étant blanche avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou noire avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit les évènements :

- B_k « après k étapes, l'urne contient 2 boules blanches » ;
- G_k « après k étapes, l'urne contient 1 boule noire et 1 boule blanche » ;
- N_k « après k étapes, l'urne contient 2 boules noires »,

ainsi que leurs probabilités :

- $b_k = \mathbf{P}(B_k)$;
- $g_k = \mathbf{P}(G_k)$;
- $n_k = \mathbf{P}(N_k)$.

On définit enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_k = \begin{pmatrix} b_k \\ g_k \\ n_k \end{pmatrix}$.

1. Donner les matrices X_0 et X_1.

2. Déterminer la matrice X_2.

3. On donne $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = MX_k$.

4. Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une relation entre X_k, M, X_0 et k.

5. On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de M.

6. Déterminer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

7. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Calculer P^{-1}.

9. On note $D = P^{-1}AP$. Donner D^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

10. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la première colonne de A^k.

11. En déduire enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les probabilités b_k, g_k et n_k.

Solution.

1. Initialement, l'urne contient 2 boules blanches donc B_0 est un évènement certaine et ainsi $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

À la premier étape, on tire nécessairement une boule blanche et on la remplace, de façon équiprobable par une boule blanche ou une boule noire donc $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$.

2. Les évènements B_1, G_1 et N_1 forment un système complet d'évènements donc, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} b_2 = \mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(G_1)\mathbf{P}(B_2 \mid G_1) + \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}(B_2 \mid N_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times 0 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 = \mathbf{P}(G_2) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(G_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(G_1)\mathbf{P}(G_2 \mid G_1) + \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}(G_2 \mid N_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 = \mathbf{P}(N_2) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(N_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(G_1)\mathbf{P}(N_2 \mid G_1) + \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}(N_2 \mid N_1) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

donc $\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. De la même façon,

$$\begin{aligned} b_{k+1} = \mathbf{P}(B_{k+1}) &= \mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(B_{k+1} \mid B_k) + \mathbf{P}(G_k)\mathbf{P}(B_{k+1} \mid G_k) + \mathbf{P}(N_k)\mathbf{P}(B_{k+1} \mid N_k) \\ &= b_k \times \frac{1}{2} + g_k \times \frac{1}{4} + n_k \times 0 \\ &= \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{4} \text{ŋ}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{k+1} = \mathbf{P}(G_{k+1}) &= \mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(G_{k+1} \mid B_k) + \mathbf{P}(G_k)\mathbf{P}(G_{k+1} \mid G_k) + \mathbf{P}(N_k)\mathbf{P}(G_{k+1} \mid N_k) \\ &= b_k \times \frac{1}{2} + g_k \times \frac{1}{2} + n_k \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{2} g_k + \frac{1}{2} n_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
n_{k+1} &= \mathbf{P}(N_{k+1}) = \mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(N_{k+1} \mid B_k) + \mathbf{P}(G_k)\mathbf{P}(N_{k+1} \mid G_k) + \mathbf{P}(N_k)\mathbf{P}(N_{k+1} \mid N_k) \\
&= b_k \times 0 + g_k \times \frac{1}{4} + n_k \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} g_k + \frac{1}{2} n_k
\end{aligned}
$$

donc

$$
X_{k+1} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ g_{k+1} \\ n_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{4} \eta_k \\ \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{2} g_k + \frac{1}{2} n_k \\ \frac{1}{4} g_k + \frac{1}{2} n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ g_k \\ n_k \end{pmatrix}
$$

i.e. $\boxed{X_{k+1} = M X_k}$.

4. Ainsi, la suite (X_k) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison M donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ X_k = M^k X_0}$.

5. Il est clair que $\boxed{A = 4M}$.

6. À l'aide du code Python suivant :

```python
import numpy as np

M=np.matrix([[2,1,0],[2,2,2],[0,1,2]])
print(M)

print(np.linalg.eig(M))
```

qui affiche

```
[[2 1 0]
[2 2 2]
[0 1 2]]
(array([ 4.00000000e+00,  2.00000000e+00, -2.80761164e-16]),
matrix([[ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,  4.08248290e-01],
[ 8.16496581e-01,  8.11214661e-16, -8.16496581e-01],
[ 4.08248290e-01,  7.07106781e-01,  4.08248290e-01]])
)
```

on conjecture que $\mathrm{Sp}(A) = \{4\,;2\,;0\}$. Démontrons-le. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Déterminons $E_4(A)$:

$$
X \in E_4(A) \iff AX = 4X \iff \begin{cases} 2x + y = 4x \\ 2x + 2y + 2z = 4y \\ y + 2z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ y = x + z \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}
$$

donc $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Déterminons $E_2(A)$:

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} 2x + y = 2x \\ 2x + 2y + 2z = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
Déterminons $E_0(A)$:

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0X \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ y = -x - z \\ y = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ainsi, 4, 2 et 0 sont des valeurs propres de A et comme A est d'ordre 3, il ne peut y en avoir d'autres et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{4\,;2\,;0\}}$. De plus, comme A est une matrice carrée d'ordre 3 ayant 3 valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

7. On déduit de la question précédente que $A = PDP^{-1}$ i.e. $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. En résolvant un système ou en utilisant un logiciel, on détermine $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

9. Comme D est diagonale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, comme $A = PDP^{-1}$, $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}
A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{k-1} & * & * \\ 2^{k-1} & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4^{k-1} + 2^{k-1} & * & * \\ 2 \times 4^{k-1} & * & * \\ 4^{k-1} - 2^{k-1} & * & * \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la première colonne de } A^k \text{ est } \begin{pmatrix} 4^{k-1} + 2^{k-1} \\ 2 \times 4^{k-1} \\ 4^{k-1} - 2^{k-1} \end{pmatrix}}$.

11. Comme $A = 4M$, $M = \frac{1}{4}A$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k A^k$. Dès lors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$X_k = M^k X_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^k \begin{pmatrix} 4^{k-1} + 2^{k-1} & * & * \\ 2 \times 4^{k-1} & * & * \\ 4^{k-1} - 2^{k-1} & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^{k-1}+2^{k-1}}{4^k} \\ \frac{2\times 4^{k-1}}{4^k} \\ \frac{4^{k-1}-2^{k-1}}{4^k} \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

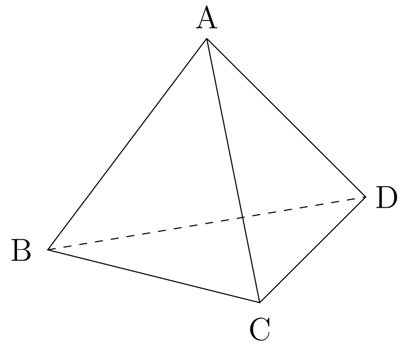
$$\begin{aligned}
\frac{4^{k-1} + 2^{k-1}}{4^k} &= \frac{1}{4} \times \frac{4^{k-1} + 2^{k-1}}{4^{k-1}} = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
\frac{2 \times 4^{k-1}}{4^k} &= \frac{2 \times 4^{k-1}}{4 \times 4^{k-1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\
\frac{4^{k-1} - 2^{k-1}}{4^k} &= \frac{1}{4} \times \frac{4^{k-1} - 2^{k-1}}{4^{k-1}} = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

donc on conclut que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{b_k = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \qquad g_k = \frac{1}{2} \qquad n_k = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}.$$

Sujet 60. Marche aléatoire sur un tétraèdre (O3)

On considère un tétraèdre de sommets A, B, C et D.



Un petit mobile se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre, pour se rendre d'un sommet à un autre.

À l'instant $t = 0$, il part du sommet A. Si à un instant donné il se trouve en A, B ou C, alors à l'instant suivant il se rend de façon équiprobable sur l'un des trois autres sommets. S'il arrive en D, alors il s'arrête.

On définit les événements A_n (respectivement B_n, C_n, D_n) : « le mobile se trouve en A (respectivement B, C, D) à l'instant n », ainsi que les probabilités respectives a_n, b_n, c_n, d_n de ces événements.

1. **a.** Calculer a_n, b_n, c_n, d_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

b. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice carrée A telle que pour tout $\in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

d. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de n, A, X_0.

2. **a.** Montrer qu'il existe une matrice inversible P de la forme de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ telle que $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n puis d_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (d_n) et interpréter le résultat obtenu.

Solution.

1. a. Initialement, le mobile est sur le sommet A donc $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = c_0 = d_0 = 0}$.
Partant du sommet A, le mobile se déplace de façon équiprobable vers B, C ou D donc $\boxed{a_1 = 0 \text{ et } b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{3}}$.
Comme $(A_1,\, B_1,\, C_1,\, D_1)$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_2 = \mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(A_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(A_2 \mid D_1) \\ &= 0 \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 = \mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(B_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(B_2 \mid D_1) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 = \mathbf{P}(C_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(C_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(C_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(C_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(C_2 \mid D_1) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 = \mathbf{P}(D_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(D_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(D_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(D_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(D_2 \mid D_1) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

donc $\boxed{a_2 = \frac{2}{9},\, b_2 = c_2 = \frac{1}{9} \text{ et } d_2 = \frac{5}{9}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(A_n,\, B_n,\, C_n,\, D_n)$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid C_n) \\ &\qquad + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid D_n) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} + d_n \times 0 \\ &= \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3} c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n) \\
&\qquad + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid D_n) \\
&= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{3} + d_n \times 0 \\
&= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n+1} = \mathbf{P}(C_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid C_n) \\
&\qquad + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid D_n) \\
&= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0 + d_n \times 0 \\
&= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{n+1} = \mathbf{P}(D_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(D_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(D_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(D_{n+1} \mid C_n) \\
&\qquad + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}(D_{n+1} \mid D_n) \\
&= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} + d_n \times 1 \\
&= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n + d_n
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n & d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n + d_n \end{array}}.$$

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

donc $X_{n+1} = AX_n$ avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}$.

d. Ainsi, (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$.

2. La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.
L'énoncé laisse entendre que $\mathrm{Sp}(A) = \{-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\}$. Démontrons-le. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Déterminons $E_{-\frac{1}{3}}(A)$:

$$AX = -\frac{1}{3}X \iff \begin{cases} \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3}x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}z \end{cases} \iff x = -y - z.$$

Ainsi, $E_{-\frac{1}{3}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
donc $E_{-\frac{1}{3}}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
Déterminons $E_{\frac{2}{3}}(A)$:

$$AX = \frac{2}{3}X \iff \begin{cases} \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3}z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ -2x + y + z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi, $E_{\frac{2}{3}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$ donc $E_{\frac{2}{3}}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Comme $\dim(E_{-\frac{1}{3}}(A)) + \dim(E_{\frac{2}{3}}(A)) = 3$, on conclut que $A = PDP^{-1}$ c'est-à-dire

$$\boxed{D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$. De plus, on vérifie (à l'aide d'un logiciel ou en résolvant un système) que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout

$n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}}.$$

4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

donc $a_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$, $b_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ et $c_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ donc

$$\begin{aligned} d_n &= 1 - a_n - b_n - c_n \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{array}{cc} a_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] & b_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] \\ c_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] & d_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{array}}.$$

5. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ donc $\boxed{d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.
Ainsi, le mobile finit presque sûrement par atteindre le sommet D.