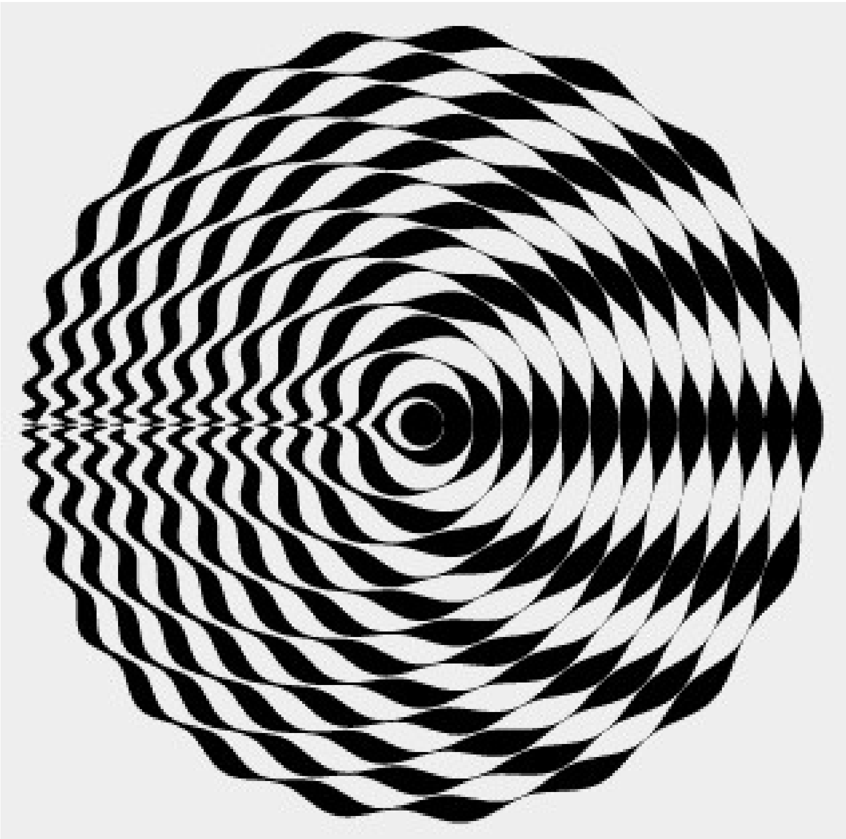
TB2
Sujets d'oraux de mathématiques

Énoncés



Année 2024-2025

Table des matières

Sujets d'algèbre

Sujet 1. Endomorphisme de Grégory et application (C1)

On considère les polynômes $P_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k(X) = X^k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X)$$

où $P(X+1)$ désigne la composée de $X+1$ suivie de P.
Par exemple, si $P(X) = X^3$ alors $P(X+1) = (X+1)^3$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a. Montrer que la matrice de Δ_2 dans $\mathcal{B}_2$ est $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Quelles sont les valeurs propres de M_2 ? La matrice M_2 est-elle diagonalisable ?

3. a. Déterminer la matrice M_3 de Δ_3 dans la base $\mathcal{B}_3$.

b. La matrice M_3 est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

4. a. Déterminer le noyau et l'image de Δ_3.

b. En déduire que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$Q(X) = P(X+1) - P(X).$$

Ce polynôme P est-il unique ?

5. a. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente une valeur explicite de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ en fonction de n.

Sujet 2. Étude de deux suites imbriquées (C7)

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux suites réelles. On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}.$$

On se propose de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de n grâce à deux méthodes différentes.

Méthode 1 : à l'aide des nombres complexes

On pose, pour tout entier naturel n,

$$z_n = u_n + \mathrm{i}v_n.$$

1. En utilisant le logiciel de votre choix ou une calculatrice, calculer les 6 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

2. Placer les points M_n d'affixes z_n pour n allant de 0 à 5. Expliquer comment évolue $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ en fonction de n.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, z_{n+1} en fonction de z_n.

4. Déterminer une forme exponentielle de $1 - \mathrm{i}$.

5. Donner le terme général de la suite (z_n).

6. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Méthode 2 : à l'aide des matrices

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2. Déterminer une inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. Ces matrices seront à coefficients complexes.

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Sujet 3. Calcul des puissances d'une matrice (O1)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 3I$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Démontrer qu'il existe un réel α tel que $B^2 = \alpha B$.

2. **a.** Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre B^n et B.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Préciser X_0.

b. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

c. Déterminer les valeurs propres de M et en déduire que M est diagonalisable.

d. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

e. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de M^n en fonction de n.

f. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n et en déduire une expression de A^n en fonction de n.

Sujet 4. Évolution d'une population d'algues marines (O1)

On étudie une partie de la surface du fond de l'océan sur laquelle poussent uniquement deux algues : l'algue A et l'algue B. La quantité totale d'algues est supposée constante au cours du temps, égale à 1000 algues. On sait que, chaque année,

- 5% des algues A et 10% des algues B meurent ;
- la moitié des algues qui meurent sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre d'algues A en vie à la fin de l'année n et b_n le nombre d'algues B en vie à la fin de l'année n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

où $M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M, de n et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que 1 est une valeur propre de M.

4. Montrer que M admet une autre valeur propre $\lambda \in [0\,;1[$.

5. En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, u_0, v_0, n et D.

7. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. On note a_∞ et b_∞ leurs limites.

8. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

9. Donner deux méthodes différentes pour calculer $a_\infty + b_\infty$.

10. En déduire que $u_0 = \dfrac{2000}{3}$.

11. Montrer que $a_\infty = \dfrac{2000}{3}$ et $b_\infty = \dfrac{1000}{3}$.

Sujet 5. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (O1)

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\varphi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que φ est linéaire.

3. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de A.

6. Justifier que φ est diagonalisable.

7. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

8. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Sujet 6. Résolution d'une équation matricielle (O1)

Partie I

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ de telle sorte que P soit de la forme $P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.
Déterminer P^{-1}.

2. **a.** Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BD = DB$.
Montrer que B est une matrice diagonale.

b. Déterminer les matrices $B\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = D$.

3. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$. Combien y a-t-il de solutions ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède 3 valeurs propres non nulles, deux à deux distinctes.
On suppose, de plus, qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = C$.

1. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de M^2.

2. Montrer que si X est un vecteur propre de M^2 alors MX est un vecteur propre de M^2 pour la même valeur propre.

3. Montrer que si X est un vecteur propre de M^2 alors X et MX sont deux vecteurs colonnes proportionnels.

4. **a.** Soit X un vecteur propre de M^2.
Démontrer à l'aide de la question **3.** que X est aussi un vecteur propre de M.

b. En déduire que M est diagonalisable.

5. **a.** Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}CP$ et $P^{-1}MP$ soient diagonales.
On notera dans la suite : $D = P^{-1}CP$ et $B = P^{-1}MP$.

b. Vérifier que l'équation $M^2 = C$ équivaut à $B^2 = D$.

6. En supposant que les 3 valeurs propres distinctes de C sont strictement positives, expliciter toutes les matrices M vérifiant $M^2 = C$.

Sujet 7. Étude de trois suites imbriquées (O2)

On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calculs que A est diagonalisable.

2. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

3. Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :
$$A = PDP^{-1}$$

4. Calculer P^{-1}.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$A^n = PD^nP^{-1}$$

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

7. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :
$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 3w_n \end{cases}.$$

En utilisant la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n en fonction de n.

8. Que fait la fonction suivante, écrite en Python ?

```python
def suite(n):
  u, v, w = 1, 1, 1
  for k in range(1, n+1):
    u, v, w = u+v+w, 2*v+w, 3*w
  return u, v, w
```

L'utiliser pour vérifier les résultats de la question 7).

Sujets d'analyse

Sujet 8. Étude d'une fonction et applications (C2)

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. **a.** Donner l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

c. Calculer f' et f'' sur $]0\,;+\infty[$.

d. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

e. Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$ que l'on déterminera.

2. On considère la fonction F définie sur $U =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

a. Calculer, pour tout $(x,y) \in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

b. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que si $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ alors $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$

c. En déduire les points critiques de F.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Étudier les variations de (u_n).

c. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

d. Écrire un programme en Python permettant d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$.

Sujet 9. Étude d'une suite définie par récurrence (C4)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que (u_n) est bien définie et strictement positive.

3. Que fait la fonction suivante, écrite en Python ?

```python
def mystere(n):
  u = 1
  for i in range(n):
    u = u + 1/u
  return u
```

Utiliser cette fonction pour conjecturer le comportement de la suite (u_n) ainsi que celui de la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Étudier les variations de (u_n).

5. Montrer que (u_n) diverge et en déduire la limite de (u_n).

6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$.

7. On pose, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2).$$

b. En déduire la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c. À l'aide de la courbe de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (qui peut être tracée à main levée), démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \leqslant 2\sqrt{n-2} - 1.$$

d. Déduire des questions précédentes un encadrement de u_n valable pour tout entier $n \geqslant 3$ puis donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Sujet 10. Modèle de Gompertz (C6)

On peut modéliser la masse corporelle d'un rat musqué en fonction de son âge par le modèle de croissance de Gompertz.

Si on note t l'âge (en jours) du rat et $Y(t)$ sa masse (en grammes), on suppose que la fonction Y vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad Y'(t) = -r \ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) Y(t)$$

avec r et K des réels strictement positifs tels que $0 < Y(0) < K$.

Dans la suite, on note Y une solution de cette équation différentielle et on admet que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < Y(t) < K$.

1. **a.** Justifier que la fonction $f : y \longmapsto \dfrac{1}{-r\ln(\frac{y}{K})y}$ admet une primitive F sur $]0\,;K[$.

b. Montrer que, pour tout réel t positif, $(F \circ Y)'(t) = 1$.

2. Vérifier que $F : y \longmapsto -\dfrac{1}{r} \ln\left(-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)\right)$ est une primitive de f sur $]0; K[$.

3. **a.** Déduire des questions précédentes l'existence d'une constante réelle C telle que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$-\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}$$

b. On pose $y_0 = Y(0)$. Établir que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$.

c. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = K \exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$.

4. Étudier les variations de la fonction Y sur $[0\,;+\infty[$. Que représente la constante K ?

5. On considère la fonction Z définie pour tout $t \geqslant 0$ par $Z(t) = \ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right)$.

Démontrer que Z est une fonction affine de coefficient directeur $-r$. Préciser son ordonnée à l'origine.

6. *Détermination expérimentale de y_0, K et r*

Le tableau ci-contre contient les valeurs mesurées tous les 20 jours de la masse du rat, de sa naissance à son 301^{e} jour. On note T_i le temps de mesure et M_i la masse mesurée le jour T_i.

a. Proposer des valeurs de y_0 et K.

b. Indiquer comment on pourrait proposer une valeur expérimentale de r.

Temps (j)	Masse (g)
0	16,00
20	116,06
40	304,48
60	486,91
80	611,92
100	683,91
120	721,96
140	741,24
160	750,81
180	755,51
200	757,81
220	758,93
240	759,48
260	759,75
280	759,88
300	759,94

Sujet 11. Étude d'une suite définie implicitement I (C5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et $(v_n)_{n\geqslant 3}$ telles que, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant n \leqslant v_n \\ f_n(u_n) = 0 \\ f_n(v_n) = 0 \end{cases}.$$

3. À l'aide d'une modélisation numérique ou graphique, conjecturer le comportement asymptotique de (u_n), (v_n), $\left(\frac{n}{v_n}\right)$.

4. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

5. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{v_n}$.

6. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 3$:

$$1 < u_n < e.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

c. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d. Montrer que

$$\ln(u_n) \sim u_n - 1$$

et en déduire que

$$u_n - 1 \;\sim \frac{1}{n}.$$

Sujet 12. Arctan itérée (C9)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n) \end{cases}.$$

1. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle. Essayer plusieurs valeurs de u_0.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arctan(x) - x$.

a. Étudier le sens de variation de g.

b. En déduire le signe de g.

c. Dresser le tableau de variations de g, en précisant les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge. Que vaut alors sa limite ℓ ?

4. On suppose dans cette question que $u_0 \geqslant 0$.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) converge.

5. Que se passe-t-il si $u_0 < 0$?

Sujet 13. Une équation différentielle à paramètre (O2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$(E_n) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^2} y''(t) + y(t) = \sin(t).$$

1. **a.** Montrer que la fonction $f_1 : t \longmapsto \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{2}$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, si $n \neq 1$, la fonction $f_n : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2 - 1} \sin(t)$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que l'équation (E_n) est équivalente à l'équation différentielle :

$$(F_n) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + n^2 y(t) = n^2 \sin(t).$$

3. **a.** Résoudre l'équation homogène associée à (F_n).

b. Donner la forme générale des solutions de (F_n) (et donc de (E_n)).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'unique solution g_n de (E_n) vérifiant $g_n(0) = 0$ et $g_n'(0) = 0$.

5. Déterminer, pour tout réel t, la limite de $g_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Sujet 14. Étude d'une suite définie implicitement II (O2)

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \mathrm{e}^x \end{array}.$$

Définition de la suite (u_n)

1. Dresser le tableau de variations de l'application f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

Dans toute la suite, on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la solution de l'équation $f(x) = n$. On définit ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Conjecture sur le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et représenter sur le graphique les premiers termes de la suite (u_n). (On pourra s'aider pour le tracé d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique.)

4. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

Étude mathématique de la suite (u_n)

5. Étudier les variations de la suite (u_n).

6. En déduire que la suite (u_n) a une limite que l'on déterminera.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ln(n)$.

8. Montrer que $\mathrm{e}^{u_n} \sim n$.

9. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.

Sujet 15. Autour de la moyenne d'un nombre et de son inverse (O2)

Partie 1. Étude d'une fonction d'une variable

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est impaire.

2. Dresser le tableau de variation complet de f.

3. La fonction f admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}^*$?

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?

5. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right).$$

Démontrer que $\mathscr{C}$ possède en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

Partie 2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right). \end{cases}$$

1. Calculer les premières valeurs de la suite (u_n), à la main ou avec un logiciel de votre choix.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n), ainsi que sa limite éventuelle.

2. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. En ayant recours à la fonction f, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie 3. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

1. Donner les deux dérivées partielles de g.

2. En quels points la fonction g peut-elle admettre un extremum local ?

3. **a.** Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$g(x, y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

b. En déduire que g présente un extremum local en $(1, 1)$.

4. Démontrer que la fonction g ne présente pas d'extremum local en $(-1, -1)$.

Sujet 16. Étude d'une suite définie par une intégrale (O2)

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k} \,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n sous la forme d'une intégrale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \,\mathrm{d}t$.

a. Encadrer la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

4. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2} \,\mathrm{d}t$.

5. À l'aide des questions précédentes, montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{3}{2}\ln(2)$.

6. a. Écrire en Python une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui renvoie la valeur de S_n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 1{,}0397$.

Sujet 17. Modélisation d'une population de cerfs (O2)

Soit μ et K deux réels strictement positifs. On considère la fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}.$$

On considère également la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $x_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

1. Étude de la fonction f

a. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

b. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer f'.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$. On y fera apparaître la limite de f en $+\infty$.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a. Quelle information nous apporte le résultat de la question **1.a.** concernant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b. On suppose dans cette question que $x_0 \leqslant \frac{K}{\mu}$.

i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$.

ii. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Que se passe-t-il si $x_0 > \frac{K}{\mu}$?

3. Application

On étudie l'évolution de la population de cerfs dans une forêt. On suppose qu'au début de chaque année d'observation $n \in \mathbb{N}$, le nombre de cerfs vivant dans cette forêt est donné par x_n.

a. On suppose ici que $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 2$.
Que peut-on dire de l'évolution de la population de cerfs de cette forêt au fil des ans ?

b. Même question lorsque $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 20$.

c. Même question lorsque $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 200$.

Sujet 18. Modèles de Maltus et de Verhulst (O2)

Nous allons étudier deux modèles utilisés pour décrire l'évolution d'une population.

Partie I. Modèle de Maltus

Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$:

$$(E_1) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad y'(t) = ay(t).$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

2. Soit $y_0 > 0$. Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

3. Soit y la solution de (E_1) déterminée dans la question **2.**.

- **a.** Déterminer, si elle existe, la limite de y en $+\infty$.
- **b.** Déterminer une fonction g telle que $t \longmapsto g(y(t))$ soit une fonction affine dont on exprimera les coefficients en fonction de a et de y_0.

Partie II. Modèle de Verhulst

Soit $r > 0$ et $K > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$:

$$(E_2) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

On cherchera uniquement les solutions de (E_2) à valeurs dans $]0\,;K[$ c'est-à-dire les solutions y telles que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < y(t) < K$.

1. Soit $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$ une fonction à valeurs dans $]0\,;K[$. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on pose $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$. Montrer que y est solution de (E_2) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$(E_3) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad z'(t) = -rz(t) + \frac{r}{K}.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_3).

3. Soit $y_0 \in\,]0\,;K[$. Déterminer la solution de (E_2) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

4. Soit y la solution de (E_2) déterminée dans la question **3.**.

- **a.** Déterminer, si elle existe, la limite de y en $+\infty$.
- **b.** Montrer que la fonction $h : t \longmapsto \ln\left(\frac{y(t)}{K - y(t)}\right)$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est une fonction affine sur $[0\,;+\infty[$ dont on exprimera les coefficients en fonction de r, K et y_0.

Partie III. Application et identification de modèles

On observe empiriquement l'évolution de la croissance de bactéries *Lactobacillus*.

temps (heures)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (UFC.mL^{-1})	0,52	0,83	1,37	2,29	3,71	6,11	10,06

On observe empiriquement l'évolution de la croissance du nombre de plants d'algues *Fucus serratus*.

temps (jours)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (en milliers)	0,12	0,73	3,54	8,03	9,68	9,97	10,04

Les modèles étudiés ci-dessus pourraient-ils décrire l'évolution de la croissance des bactéries *Lactobacillus* ou des algues *Fucus serratus* ?

Dans chaque cas, quel modèle correspondrait alors le mieux ?

Sujet 19. Racine carrée itérée (O2)

Soit t un réel strictement positif. On considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = t \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}. \end{cases}$$

1. **a.** Déterminer le signe de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - x$.

b. On suppose que $t = 2$.
À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, déterminer des valeurs approchées des premiers termes de la suite (x_n).

c. On suppose que $t > 1$.

i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.

ii. En déduire que la suite (x_n) converge et donner sa limite.

d. Que se passe-t-il si $0 < t < 1$?

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(x_n - 1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{x_n} = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)$$

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2^n\left(\sqrt{x_n} - 1\right)^2$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b. Déterminer, de même, le sens de variation de la suite (v_n).

c. On suppose que $t > 1$.

i. Démontrer que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

ii. En déduire que la suite (v_n) converge également vers L.

d. Que se passe-t-il si $0 < t < 1$?

3. *Question complémentaire, non posée à l'oral*
On suppose $t \neq 1$.

a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = t^{\frac{1}{2^n}}.$$

b. Démontrer que $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{2^n}$.

c. En déduire la valeur de L.

Sujets de probabilités : variables aléatoires discrètes à support fini

Sujet 20. Remplacement d'une boule noire par une boule blanche (C2)

Soit a un nombre entier naturel non nul. Une urne contient a boules blanches et a boules noires.

On pioche une boule de l'urne.

- Si elle est blanche, on la replace dans l'urne.
- Si elle est noire, on la remplace par une blanche.

On répète cette expérience.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'évènement « on obtient une boule blanche au i-ème tirage ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées au bout de n tirages.

1. Déterminer $X_1(\Omega)$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega)$.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = 0)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, a]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{a+k}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \frac{a-k+1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1).$$

5. Montrer que la suite $(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis convergente.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2a\mathbf{E}(X_n) = (2a-1)\mathbf{E}(X_{n-1}) + a$.

7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \mathbf{E}(X_n)$.

a. Montrer que la suite $(e_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

Sujet 21. Germination de graines (C4)

On dispose de n pots, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On plante une graine dans chaque pot. Les germinations des graines sont indépendantes les unes des autres.

Pour chaque graine, la probabilité de germer est égale à p, avec $p \in]0\,;1[$.

Pour chaque graine, la probabilité de ne pas germer est donc égale à q, avec $q = 1 - p$.

1. On note X le nombre de graines ayant germé. Donner la loi de X et préciser, pour tout $i \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}(X = i)$.

2. Dans les pots où la graine n'a pas germé, on plante une nouvelle graine.
On note Y le nombre de nouvelles graines ayant germé.
Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y sachant $(X = i)$ et préciser, pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j)$.

3. On note Z le nombre total de graines ayant germé. Ainsi, $Z = X + Y$.

- **a.** Préciser $Z(\Omega)$ et exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ à l'aide des variables aléatoires X et Y.
- **b.** En déduire, pour tout $k \in Z(\Omega)$, une expression sous forme de somme de la probabilité $\mathbf{P}(Z = k)$.

4. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, k]\!]$,

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$$

5.
- **a.** Montrer que $1 - p(1 + q) = q^2$.
- **b.** Soit $k \in Z(\Omega)$. Développer $(1 + q)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{-i}$.
- **c.** Montrer que, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} p^k q^{2n-i-k}$.
- **d.** Montrer que Z suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

6. Déterminer l'espérance de Z et en donner une interprétation.

Sujet 22. Le loueur de voiture (O1)

Un concessionnaire dispose de 2 voitures qu'il peut louer chaque jour, pour un prix de 30€. On définit les variables aléatoires suivantes :

- X est le nombre de clients qui veulent lui louer une voiture ;
- Y est le nombre de voitures qu'il loue ;
- G est le chiffre d'affaire qu'il réalise sur la journée.

1. On suppose dans cette question que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

a. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
b. Déterminer l'espérance et la variance de G.
c. Calculer le chiffre d'affaire réalisé en moyenne par le concessionnaire sur 30 jours.

2. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$.

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Sujet 23. Division cellulaire (O1)

Dans tout l'exercice, p désigne un réel appartenant à $]0\,;1[$.

Partie A. Étude d'une suite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - p + px^2$$

ainsi que la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}.$$

1. Étudier le sens de variations de la fonction f.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

3. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = \dfrac{1-p}{p}$.
Ranger ces deux solutions dans l'ordre croissant. *On discutera selon les valeurs de p.*

4. Montrer que si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors la suite (v_n) est croissante et converge vers un réel à déterminer.

5. Que se passe-t-il si $p > \dfrac{1}{2}$?

Partie B. Application

On considère des cellules pouvant

- soit se diviser en deux cellules filles, avec une probabilité égale à p ;
- soit mourir, avec une probabilité égale à $q = 1 - p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de cellules à la $n^{\text{ème}}$ génération.

On suppose que $X_0 = 1$ de façon certaine.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$.

a. Donner u_0 et u_1.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir, à partir du système complet d'événements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$, une relation entre u_n et u_{n+1}.

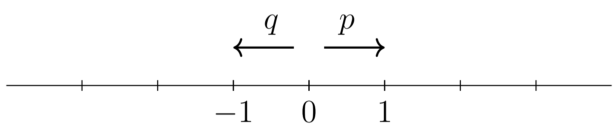
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Sujet 24. Les cents pas (O1)

Un homme fait les cent pas.

Il se déplace sur un axe infini, gradué par pas de 1 de $-\infty$ à $+\infty$.

À chaque déplacement, il va vers la droite avec probabilité p ou vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$.



Initialement, l'homme est en 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de l'homme après n déplacements. En particulier, on a $X_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Y_n le nombre de pas vers la droite effectués après n déplacements.

1. Donner la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

2. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction de Y_n.

3. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

4. Déterminer la probabilité d'être revenu en 0 après n déplacements.

5. Déterminer la loi de X_n.

6. Dans cette question, on suppose que $p = \frac{1}{2}$ et $n = 2N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

a. Expliciter la loi de X_n dans ce cas.

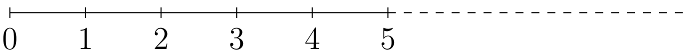
b. Calculer $E(X_n)$ par deux méthodes :
- en utilisant le résultat de la question **3.** ;
- en utilisant la loi de X_n.

c. Exprimer de même $V(X_n)$ par deux méthodes, en déduire que :

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{2N}{N+k} = N4^{N-1}$$

Sujet 25. Déplacement aléatoire sur un axe gradué (O1)

On déplace un objet sur un axe gradué de 0 à $+\infty$, selon le protocole suivant.
Initialement, l'objet est en 0.
À chaque tour, on lance un dé bien équilibré :
— si on obtient 5 ou 6, on avance l'objet d'une position ;
— sinon, on replace l'objet en 0.



Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de l'objet à l'issue n-ième tour.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance, sa variance.

2. Déterminer la loi de X_2, son espérance, sa variance.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{3}\mathbf{P}(X_{n-1} = k - 1)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbf{E}(X_n) - \frac{1}{2}$.

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
- **b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.
- **c.** Donner la limite de $\mathbf{E}(X_n)$ en $+\infty$.

Sujets de probabilités : variables aléatoires discrètes à support infini

Sujet 26. Traîne de la loi de Poisson (C1)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. a. Rappeler la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

b. Rappeler l'inégalité de Tchebychev et ses hypothèses.

c. Démontrer que $\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

d. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

2. Pour tout réel $t \geqslant 0$, si la série converge, on pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k$.

a. Vérifier que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

b. Exprimer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t)$ sous la forme d'une espérance.

c. Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses.

d. En déduire que, pour tout réel $t > 0$, $\mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}$.

e. Déterminer le minimum de la fonction $f : t \longmapsto t - 1 - 2\ln(t)$ sur $]0\,;+\infty[$.

f. Démontrer que, pour tous réels $t > 1$ et $x \geqslant 0$,

$$x \geqslant 2\lambda \Longleftrightarrow t^x \geqslant t^{2\lambda}.$$

g. En déduire $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

3. À l'aide de GeoGebra, comparer les deux majorations de $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda)$ obtenues dans les questions précédentes.

Sujet 27. Clinique vétérinaire pour chiens et chats (C7)

Dans une clinique vétérinaire, on note X le nombre de chats et Y le nombre de chiens présents lors d'une semaine. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\mu \geqslant 0$.

1. Rappeler la définition de la loi de Poisson.

2. Rappeler l'espérance de X. Démontrer la formule.

3. Rappeler la variance de X. Démontrer la formule.

4. On pose $Z = X + Y$.

- **a.** Déterminer l'espérance et la variance de Z.
- **b.** Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Z.
- **c.** Exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ en fonction de X et Y.
- **d.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer et simplifier l'expression $\dfrac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$
- **e.** Démontrer que Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

5. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

On suppose dans la suite que $\lambda = 13$ et $\mu = 17$. La clinique est capable d'accueillir un maximum de 80 animaux.

- **a.** Majorer la probabilité de l'évènement $(Z \geqslant 80)$.
- **b.** La clinique devrait-elle investir pour augmenter sa capacité d'accueil ?

Sujet 28. Tatouage de lapins (O1)

Un éleveur possède 100 lapins qui doivent se faire tatouer. Il choisit successivement des lapins au hasard : si le lapin est tatoué, on le repose dans le clapier ; sinon, on le tatoue et on le repose dans le clapier. On continue ainsi jusqu'à avoir tatoué tous les lapins.

On modélise la situation en assimilant chaque lapin à un jeton et le clapier à une urne, dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour tatouer tous les lapins.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note X_n le nombre de tirages effectués, une fois qu'on a tiré $n-1$ jetons différents, pour obtenir un n-ème jeton différent des précédents. Par exemple, si les tirages donnent :

$$3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 4, \ldots$$

alors $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3$, etc

Première partie

1. Donner la loi de X_1, ainsi que son espérance.
2. Donner la loi de X_2, ainsi que son espérance.
3. Soit un entier $n \in [\![1, 100]\!]$. Donner la loi de X_n, ainsi que son espérance.
4. Calculer l'espérance de X. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Deuxième partie

1. Vérifier que
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{100} \frac{100}{j}.$$
2. Soit $j \in [\![2, 100]\!]$. Montrer que
$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que
$$\int_1^{101} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
puis donner un encadrement de $\mathbf{E}(X)$ à l'aide de la fonction ln.

Troisième partie

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{100} sont indépendantes.

1. Exprimer $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$, …, $\mathbf{V}(X_{100})$.
2. Déterminer alors la valeur de $\mathbf{V}(X)$. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Sujet 29. Un jeu à 2 joueurs (O1)

Xavier et Yann participe à un jeu dont le principe est le suivant :

- les deux joueurs lancent chacun et de façon simultanée un dé (cubique, équilibré et dont les faces sont numérotées de 1 à 6) ;
- ils répètent l'opération jusqu'à ce que l'un d'eux obtienne un 6 ; si ce joueur est seul à obtenir un 6 à ce tour, il est alors déclaré gagnant ;
- le perdant continue alors à lancer son dé jusqu'à obtenir lui aussi un 6. Il devra verser au gagnant un montant en euros égal au nombre de lancers supplémentaires qu'il aura dû réaliser avant d'obtenir lui aussi un 6 ;
- dans le cas où les deux joueurs obtiennent un 6 lors du même tour, il n'y a ni gagnant ni perdant et le jeu s'arrête.

Par exemple, si Xavier obtient son premier 6 au 5$^{\text{e}}$ lancer et Yann obtient son premier 6 au 8$^{\text{e}}$ lancer alors Xavier est déclaré gagnant et Yann doit lui verser 3 €.

On définit les variables aléatoires suivantes :

- X désigne le nombre de lancers nécessaires à Xavier pour obtenir 6 ;
- Y désigne le nombre de lancers nécessaires à Yann pour obtenir 6 ;
- $Z = \min(X, Y)$;
- $T = \max(X, Y)$;
- G désigne le nombre d'euros attribués au gagnant.

1. Exprimer le gain G en fonction de Z et T.

2. Donner la loi de X et la loi de Y, leur espérance et leur variance.

3. **a.** Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z \geqslant n)$ en fonction des variables aléatoires X et Y.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(X \geqslant n)$ et en déduire la probabilité $\mathbf{P}(Z \geqslant n)$.

c. Déterminer la loi de Z.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Comparer, d'une part, les évènements $(Z = n) \cap (T = n)$ et $(X = n) \cap (Y = n)$ et, d'autre part, les évènements $(Z = n) \cup (T = n)$ et $(X = n) \cup (Y = n)$.

b. Exprimer $\mathbf{P}\left[(Z = n) \cup (T = n)\right]$ de deux façons différentes.
En déduire $\mathbf{P}(T = n)$.

c. Calculer $\mathbf{E}(T)$.

5. Déterminer, en euros, le gain moyen du gagnant.

Sujet 30. Empilement de dés (O1)

1. On souhaite empiler, les uns sur les autres, des dés cubiques et de même taille. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, lorsque $k-1$ dés ont déjà été empilés, la probabilité que le k-ième dé ne fasse pas écrouler l'édifice lors de sa pose est de $\frac{1}{k}$. On note N le nombre de dés empilés avant que l'édifice ne s'écroule (on ne comptera pas le dernier dé, responsable de la chute de l'édifice).

a. Déterminer l'univers image de N que l'on notera $N(\Omega)$.

b. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note

A_i : « Lors de sa pose, le i-ème dé empilé n'a pas fait s'écrouler l'édifice. »

Pour tout $k \in N(\Omega)$, écrire l'évènement $(N = k)$ à partir des évènements A_i.

c. Déterminer la loi de N et vérifier qu'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) = 1$$

.

d. Montrer que $N + 1$ admet une espérance et déterminer sa valeur.

e. En déduire que N admet une espérance et déterminer sa valeur.

2. On dispose de 4 dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 4. Les faces de chacun de ces 4 dés sont numérotées de 1 à 6. On lance les 4 dés simultanément. On reprend les dés avec lesquels on n'a pas obtenu 6 que l'on relance simultanément, et ainsi de suite jusqu'à avoir quatre 6 sur la table. On note T le nombre lancers effectués. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on note T_i le nombre de lancers effectués pour obtenir la face 6 avec le dé numéro i.

a. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, déterminer la loi de T_i et donner (si elles existent) son espérance et sa variance.

b. Exprimer T en fonction de T_1, T_2, T_3 et T_4.

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{P}(T \leqslant k)$.

d. En déduire la loi de T.

Sujet 31. Capture d'esturgeons femelles (O1)

Soit $p \in]0\,;1[$.
Un étang contient des esturgeons, dont une proportion p de femelles.
Un biologiste y pêche dans le but d'obtenir une femelle.
S'il obtient un mâle, il le rejette à l'eau et recommence.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que le biologiste pêche jusqu'à obtenir une femelle.
On définit la variable aléatoire X égale au rang de la tentative qui apporte une femelle.

1. Donner $X(\Omega)$.

2. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

3. Démontrer la valeur de $\mathbf{E}(X)$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que le biologiste s'arrête soit lorsqu'il a obtenu une femelle, soit lorsqu'il a effectué N tentatives (N étant un entier naturel non nul fixé).

On définit la variable aléatoire X_N par :

- $X_N = k$ si la $k^{\text{ème}}$ tentative donne une femelle ;
- $X_N = 0$ si aucune femelle n'est obtenue à l'issue des N tentatives.

1. Donner $X_N(\Omega)$.

2. Calculer $\mathbf{P}(X_N = k)$ pour tout $k \in X_N(\Omega)$.

3. Déterminer, en fonction de p, la plus petite valeur de N pour que la probabilité d'obtenir une femelle soit supérieure ou égale à 0,9.

4. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} x^k$?
En dérivant l'égalité précédente, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} = \frac{1 + x^N(Nx - N - 1)}{(1-x)^2}$$

5. Calculer $\mathbf{E}(X_N)$.

6. Déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \mathbf{E}(X_N)$. Que reconnaît-on ?

7. Soit Y_N la variable aléatoire égale au nombre total d'esturgeons pêchés.
Donner la loi de probabilité de Y_N et calculer $\mathbf{E}(Y_N)$.

Sujet 32. Loi du second succès (O1)

Première partie

Une épreuve comporte deux issues : succès ou échec.
La probabilité du succès est notée p, avec $p \in]0\,;1[$.
La probabilité de l'échec est notée $q = 1 - p$.
On répète cette épreuve de façon indépendante jusqu'à ce qu'on obtienne deux succès.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant le deuxième succès.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note R_i l'événement « l'épreuve numéro i est un succès ».

1. Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$, $\mathbf{P}(X = 3)$, $\mathbf{P}(X = 4)$.

2. Préciser $X(\Omega)$ et calculer $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

3. Calculer la probabilité de l'événement A : « il ne se produit pas de deuxième succès ».

Deuxième partie

Un ticket de métro coûte 2 €.
En cas de fraude, la première amende est de 40 € et la seconde est de 80 €.
À chaque trajet, la probabilité pour un usager d'être contrôlé est égale à p.
Tom décide de compter le nombre de trajets qu'il effectue. La variable aléatoire T désigne le numéro du trajet où il est contrôlé pour la deuxième fois.

1. Donner la loi de T. Calculer son espérance.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T > n) = (1 - p)^{n-1}\,[(n - 1)p + 1]$.

3. On suppose que $p = 10^{-3}$. Calculer $\mathbf{P}(T > 60)$. Interpréter le résultat.

Sujet 33. Tirage avec ajout de boule noire (O1)

Une urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire.
On effectue des tirages selon le protocole suivant :
— si on obtient une boule noire, on arrête ;
— si on obtient une boule blanche, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule noire.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement « on obtient une boule blanche au k-ième tirage » ;
- N_k l'événement « on obtient une boule noire au k-ième tirage ».

On note T le numéro du tirage qui amène une boule noire.

1. Donner $T(\Omega)$.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$. Si l'on n'a pas obtenu de boule noire lors $n-1$ premiers tirages, quel est le contenu de l'urne au moment du n-ième tirage ?

3. Donner, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$.

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$.

5. Déterminer la loi de T.

6. **a.** Écrire le polynôme X^2 comme combinaison linéaire de $X(X+1)$, $X+1$ et 1.
b. Écrire le polynôme X^3 comme combinaison linéaire de $(X-1)X(X+1)$, $X+1$ et 1.

7. **a.** En utilisant la question **6.a.**, calculer $\mathbf{E}(T)$.
b. En utilisant la question **6.b.**, calculer $\mathbf{V}(T)$.

8. **a.** On note $Y = T+1$. En utilisant la variable aléatoire Y, proposer une autre méthode de calcul de $\mathbf{E}(T)$.
b. On note $Z = (T+1)(T-1)$. En utilisant la variable aléatoire Z, proposer une autre méthode de calcul de $\mathbf{E}\left(T^2\right)$.

Sujet 34. Capture d'un couple d'esturgeons (O1)

Un biologiste pêche des esturgeons.

Il souhaite pêcher un esturgeon mâle et un esturgeon femelle pour les placer dans un aquarium afin qu'ils se reproduisent.

Pour cela, il effectue successivement différentes tentatives. On suppose qu'à chaque tentative, le biologiste a une probabilité $p \in]0\,;1[$ de pêcher un esturgeon.

On suppose que les proportion de mâles et de femelles sont identiques.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tentatives nécessaire pour pêcher le premier esturgeon (mâle ou femelle).

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tentatives **supplémentaires** nécessaires pour pêcher un esturgeon de sexe opposé.

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de X puis donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

3. On pose $Z = X + Y$.

a. Donner une interprétation de la variable aléatoire Z.

b. Déterminer $Z(\Omega)$.

c. Calculer $\mathbf{P}(Z = 2)$ et $\mathbf{P}(Z = 3)$.

d. Pour tout $n \in Z(\Omega)$, exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction de X et Y.

e. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}\right)^{k-1}$.

f. En déduire la loi de Z.

Sujets de probabilités : variables aléatoires à densité

Sujet 35. Le jeu des ampoules (C3)

Lors d'un jeu télévisé, 400 ampoules sont allumées dans une pièce.

Un candidat ouvre la porte de la pièce, à l'instant x de son choix ($x \in \mathbb{R}_+$).

Le gain du candidat est égal au nombre d'ampoules encore allumées lorsqu'il ouvre la porte, multiplié par le temps x.

On suppose que les durées de vie des ampoules sont indépendantes les unes des autres, et que la durée de vie de chaque ampoule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On note T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

- **a.** Rappeler la densité de T et son espérance.
- **b.** Calculer la variance de T.
- **c.** Montrer que pour tous réels s et t strictement positifs.

$$\mathbf{P}(T > s + t \mid T > s) = \mathbf{P}(T > t)$$

2. On note A le nombre d'ampoules encore allumées à l'instant x.

Donner la loi de A ainsi que son espérance et sa variance.

3. On note G le gain du candidat.

- **a.** Exprimer G en fonction de x et de A. En déduire $\mathbf{E}(G)$ en fonction de x.
- **b.** Déterminer la valeur x_m de x pour laquelle l'espérance du gain est maximale.

4. Dans cette question, on suppose que $x = x_m$.

- **a.** Justifier que l'on peut approximer la loi de A par une loi normale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Dans cette question, la probabilité que le gain dépasse 1000 euros est égale à 0,001. Déterminer une valeur approchée de λ.

  On donne $\Phi(3{,}0902) \approx 0{,}999$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Sujet 36. Parc d'imprimantes dans une usine (C8)

1. On considère la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par $H(x) = 1 - 10x^9 + 9x^{10}$.

a. Étudier les variations de H sur $[0\,;1]$.

b. Montrer que H réalise une bijection de $[0\,;1]$ vers un ensemble à déterminer.

c. Avec $\varepsilon = 0{,}025$, déterminer graphiquement a et b tels que $H(a) = 1 - \varepsilon$ et $H(b) = \varepsilon$. *(On pourra utiliser GeoGebra)*

d. Déterminer t_1 et t_2 tels que $H(\mathrm{e}^{-t_1}) = \varepsilon$ et $H(\mathrm{e}^{-t_2}) = 1 - \varepsilon$.

2. Dix imprimantes équipent une usine. Cette usine est fonctionnelle si au moins 9 de ces machines fonctionnent.

Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on appelle D_k la variable aléatoire donnant le temps de fonctionnement, en année, de la k-ème imprimante.

Les 10 variables aléatoires D_k sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle.

La durée moyenne de fonctionnement d'une imprimante est de 5 ans.

a. Déterminer la fonction de répartition de la loi exponentielle.

b. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, la probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins t années.

3. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note N_t la variable aléatoire donnant le nombre d'imprimantes qui fonctionnent au temps t.
Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier $n \in [\![0, 10]\!]$,

$$\mathbf{P}(N_t = n) = \binom{10}{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^n \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10-n}.$$

4. Soit D la variable aléatoire donnant le nombre d'années de fonctionnement de l'usine.

a. Déterminer la fonction de répartition de D.

b. Déterminer un intervalle de temps $I = [u\,;v]$ tel que $\mathbf{P}(D \in I) = 0{,}95$.

Sujet 37. Montage de panneaux solaires (O2)

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : une variable aléatoire X est une variable à densité si et seulement si sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points. De plus, dans ce cas, on peut obtenir une densité de X en dérivant la fonction F en tout point où elle est dérivable et en lui donnant la valeur arbitraire 0 en tout point où F n'est pas dérivable.

Soit un nombre réel $\lambda > 0$.

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

- **a.** Donner une densité de Z, notée f_Z, ainsi que son espérance (sous la forme d'une intégrale, puis donner sa valeur sans calcul).
- **b.** Donner le moment d'ordre 2 de Z, c'est-à-dire $\mathbf{E}(Z^2)$.

2. Soit f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

3. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes T_1 et T_2 admettant toutes deux la fonction f comme densité de probabilité.

- **a.** Déterminer leur fonction de répartition F.
- **b.** Montrer que T_1 et T_2 admettent une espérance et la calculer.

On considère différents systèmes de montage de panneaux solaires. On se limite aux systèmes comportant deux panneaux. On admet que T_1 modélise la durée du vie du premier panneau et T_2 la durée de vie du second.

4. Le premier système, noté S, tombe en panne lorsque l'un de ses deux éléments tombe en panne. On dit que le système S est monté en série. On note U l'instant où le système S tombe en panne.

- **a.** Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(U > k)$ en fonction de T_1 et T_2.
- **b.** Déterminer la fonction de répartition F_U de U puis une densité f_U de U.

5. Le second système, noté S', tombe en panne lorsque ses deux éléments tombent en panne. On dit que le système S' est monté en parallèle. On note V l'instant où le système S' tombe en panne.

- **a.** Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(V \leqslant k)$ en fonction de T_1 et T_2.
- **b.** Déterminer la fonction de répartition F_V de V puis une densité f_V de V.

Sujet 38. La course à pied (O2)

Lors d'une course nocturne, un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de coureurs passent la ligne d'arrivée entre minuit et une heure du matin. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on modélise l'heure d'arrivée du coureur numéro i par une variable aléatoire U_i de loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$. On suppose que toutes les variables aléatoires U_i sont mutuellement indépendantes. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_{U_i} la fonction de répartition de U_i et f_{U_i} une fonction densité de U_i.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner l'expression d'une fonction de densité de U_i et l'espérance de U_i.

2. Calculer la probabilité qu'un coureur arrive entre 00h20 et 00h30.

3. On définit pour $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire T_k égale au temps du k-ième coureur le plus rapide. On note F_k la fonction de répartition de T_k.

- **a.** Soit $t \in [0\,;1]$. Exprimer l'évènement $(T_1 > t)$ à l'aide des variables aléatoires U_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
  En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t)$.
- **b.** Que vaut $F_1(t)$ lorsque $t > 1$? lorsque $t < 0$? lorsque $t \in [0\,;1]$?
- **c.** En déduire l'expression d'une fonction de densité de T_1.
- **d.** Lorsqu'il y a 12 coureurs en lice, calculer l'espérance de T_1.

4. Pour tout réel $t \in [0\,;1]$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de coureurs arrivés dans l'intervalle de temps $[0\,;t]$. Dans toute cette question, on considère un réel $t \in [0\,;1]$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$.

- **a.** Reconnaître la loi de N_t.
- **b.** Exprimer l'évènement $(T_k \leqslant t)$ en fonction de N_t et de k.
- **c.** Justifier que $\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$.
- **d.** Montrer que $F_k(t) = 1 - F_{n-k+1}(1-t)$.
- **e.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathbf{E}(T_k) = \displaystyle\int_0^1 (1 - F_k(x))\,\mathrm{d}x$.

Sujet 39. Étude de la croissance d'une plante (O2)

La taille X d'une plante suit, en conditions naturelles, une loi uniforme sur l'intervalle $[3\,;8]$. Dans une pépinière, à la fin de la croissance naturelle de la plante :

— si sa taille est inférieure ou égale à 4, on lui met un engrais qui fait doubler sa taille ;

— si sa taille est supérieure à 4, on ne fait rien.

On note Y la variable aléatoire correspondant à la taille finale de la plante.

1. Donner une densité f_X de X, ainsi que la fonction de répartition F_X de X.

2. Exprimer Y en fonction de X, puis donner l'ensemble des valeurs prises par Y.

3. Pour tout réel t, calculer $P\left[(Y \leqslant t) \cap (X \leqslant 4)\right]$ et $P\left[(Y \leqslant t) \cap (X > 4)\right]$. *On discutera selon les valeurs du réel t.*

4. En déduire que la fonction de répartition F_Y de Y est donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4 \\ \frac{t-4}{5} & \text{si } 4 \leqslant t < 6 \\ \frac{3t-14}{10} & \text{si } 6 \leqslant t \leqslant 8 \\ 1 & \text{si } t > 8 \end{cases}.$$

5. Démontrer que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

6. En admettant que Y est une variable aléatoire à densité, en donner une densité f_Y.

7. Calculer l'espérance de Y.

Sujets de probabilités : couples de variables aléatoires

Sujet 40. Rangs d'apparition des deux premières boules noires (C3)

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.

Partie A. Tirage sans remise
Dans cette partie, on effectue des tirages sans remise.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. Donner $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.

2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

4. Déterminer les lois marginales de X_1 et de X_2.

5. On définit la variable aléatoire $Y = 6 - X_2$. Montrer que Y a la même loi que X_1.

6. Donner une relation entre $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.

7. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et en déduire $\mathbf{E}(X_2)$.

Partie B. Tirage avec remise
Dans cette partie, on effectue des tirages avec remise.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et Y_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. On considère le programme suivant, écrit en langage Python.

```python
from random import *

p = 2/5
nb_tirages = 1
while random() > p:
  nb_tirages += 1
print(nb_tirages)
```

Que renvoie ce programme ?

2. Donner la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

3. Donner $Y_2(\Omega)$.

4. Déterminer la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2).

5. En déduire la loi de Y_2.

6. On définit la variable aléatoire $Z = Y_2 - Y_1$. Montrer que Z a la même loi que Y_1.

7. Donner une relation entre $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.

8. En déduire l'espérance de Y_2.

Sujet 41. Lancers simultanés de n dés (C8)

On lance simultanément n dés bien équilibrés.

À l'étape 1, on note X_1 le nombre de dés ayant donné 6, puis on les exclut et on recommence avec les dés restants, en excluant à chaque étape les dés ayant donné 6.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

- X_i le nombre de dés ayant donné 6 à l'étape i ;
- Y_i le nombre total de dés ayant donné 6 après l'étape i.

1. Premières propriétés

a. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

b. Donner une relation entre Y_1 et X_1.

c. Donner une relation entre Y_2, X_1 et X_2.

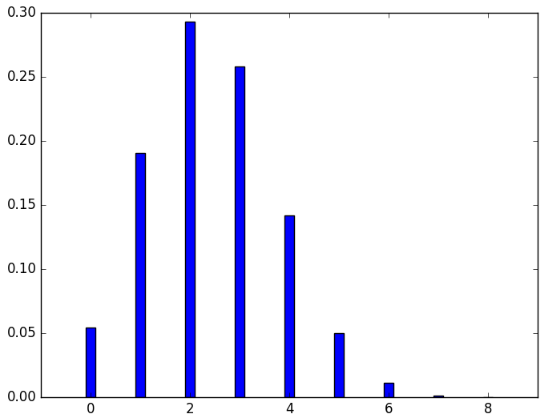
d. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = k$.

e. Montrer que, pour tous entiers k, i et n tels que $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$,

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

2. Loi de Y_2

a. On considère le diagramme suivant, donnant la loi de Y_2 pour $n = 8$.



À l'aide de ce diagramme, estimer $\mathbf{E}(Y_2)$ et émettre une hypothèse sur la loi de Y_2 et ses paramètres.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y_2 = i) = \sum_{k=0}^{i} \mathbf{P}\left((Y_1 = k) \cap (X_2 = i - k)\right).$$

c. En déduire que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y_2 = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{11}{36}\right)^i \left(\frac{25}{36}\right)^{n-i}.$$

d. Donner alors la loi de Y_2.

e. Retrouver le résultat conjecturé pour $\mathbf{E}(Y_2)$ dans le cas où $n = 8$.

3. Loi de Y_j

Démontrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_j suit une loi binomiale de paramètres n et p_j où p_j est un réel appartenant à $]0\,;1[$.

On procédera par récurrence, en s'inspirant de la démarche de la question 2). On précisera une relation de récurrence entre p_j et p_{j+1}.

Sujet 42. Tirages avec ajout d'une boule blanche (O2)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On effectue des tirages successifs de la manière suivante :

1. si on tire une boule blanche, on la replace dans l'urne et on rajoute une boule blanche,

2. si on tire une boule noire, on la replace dans l'urne mais on ne rajoute rien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages.

1. a. Donner la loi de X_1.

b. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2.

c. Déterminer la loi du couple (X_2, X_3) et en déduire la loi de X_3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner l'univers image de X_n.

b. Conjecturer la valeur de $\mathbf{P}(X_n = n)$.

c. Montrer que $(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)$.

d. Après n tirages n'ayant amené que des boules noires, donner le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires de l'urne.
En déduire $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$.

e. Calculer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$. En déduire une expression de $\mathbf{P}(X_n = 0)$ en fonction de n.

f. Après n tirages ayant amené k boules blanches, où $1 \leqslant k \leqslant n$, donner le nombre de boules et le nombre de boules blanches de l'urne.

g. En déduire, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k + 1)$.

h. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = k + 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = k + 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = k)$.
Démontrer ensuite la conjecture de la question **2.b.**.

Sujet 43. Probabilité que $X + Y = Z$ (O2)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 0 à 3.
On effectue trois tirages successifs avec remise.
On note X, Y et Z les variables aléatoires égales au résultat de chacun de ces tirages.
On note p la probabilité de l'évènement $(X + Y = Z)$.

1. Donner les lois de X, Y et Z ainsi que leur espérance et leur variance.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Préciser sa covariance.

3. En déduire la loi de la variable aléatoire $X + Y$. Préciser son espérance et sa variance.

4. En déduire la valeur de p.

5. *Application*
Un forain propose un jeu de loterie avec trois roues identiques, chacune divisée équitablement en quatre cadrans numérotés de 0 à 3.
Le joueur mise 1 euro et fait tourner deux roues, le forain fait tourner la troisième roue.
Le joueur gagne si la somme de ses deux numéros est égale au numéro obtenu par le forain. Il remporte alors la somme de a euros.

   a. Exprimer en fonction de a l'espérance de gain du joueur.

   b. Pour quelle valeur de a le jeu est-il équitable ? On rappelle que le jeu est équitable lorsque l'espérance du gain est égale à 0.
   En déduire pour quelles valeurs de a le jeu est rentable pour le forain.

   c. Le joueur décide de rejouer jusqu'à ce qu'il gagne une partie.
   En moyenne, combien de parties devra-t-il faire ?

Sujet 44. Loi conjointe du min et du max I (O2)

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5.

On tire deux boules successivement sans remise.

On note X_1 la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et X_2 la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

On définit de plus les variables aléatoires $Y = \min(X_1, X_2)$ et $Z = \max(X_1, X_2)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.

2. Soit $i \in [\![1, 5]\!]$. Donner la loi conditionnelle de X_2 sachant que $X_1 = i$.

3. Déterminer la loi conjointe du couple (Y, Z).

4. Donner la loi de Y et la loi de Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

6. Déterminer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(Z)$.

7. Déterminer $\mathbf{Cov}(Y, Z)$.

Sujet 45. Loi conjointe du min et du max II (O2)

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5.

On tire deux boules simultanément.

On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

1. a. Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

b. Donner la loi conjointe de X et de Y.

c. Donner la loi de X et la loi de Y.

d. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

e. Déterminer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

f. Déterminer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

2. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois qu'on tire deux boules successivement et avec remise.

Sujets mixtes algèbre/analyse

Sujet 46. Résolution d'un système différentiel I (C5)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Justifier que A est diagonalisable et expliciter une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. *On veillera à ce que les coefficients de P soient des entiers.*

3. Calculer P^{-1}.

4. Soit x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $x(0) = 11$, $y(0) = 7$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = -10x(t) + 18y(t) \\ y'(t) = -6x(t) + 11y(t) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une équation différentielle vérifiée par a et une équation différentielle vérifiée par b.

b. Déterminer, pour tout réel t, $a(t)$ et $b(t)$.

c. En déduire, pour tout réel t, $x(t)$ et $y(t)$.

5. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 9\mathrm{e}^{2t}$.

a. Écrire en Python une fonction qui calcule $f(t)$ où t est un réel passé en argument de la fonction.

b. Calculer $f(0{,}5)$ et $f(1)$.

c. Montrer que l'équation $f(t) = 30$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

d. En utilisant l'outil informatique, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Sujet 47. Équation différentielle et dérivée n-ième (O3)

1. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : y'' = 5y' - \frac{25}{4}y.$$

Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $f : t \longmapsto (at+b)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ème de f.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t,

$$f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}.$$

Dans l'hérédité, on mettra en évidence les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}.$$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n et de a.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n b_n$.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$$

de deux manières différentes et en déduire une expression de u_n.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n, a et b.

4. On propose de retrouver le résultat précédent par une méthode matricielle.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer une matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{4}BX_n$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de B, n et X_0.

d. Montrer que $B = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Exprimer T en fonction de I_2 et de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f. Calculer N^2 et en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, T^n en fonction de n.

g. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n en fonction de n.

Sujet 48. Étude d'une réaction chimique (O3)

Le sujet traite d'une réaction chimique avec plusieurs réactifs.

Initialement, la concentration en benzène est de 0,2 mol.L^{-1}, la concentration en produit 1 est 0 mol.L^{-1} et la concentration en produit 2 est 0 mol.L^{-1}.

On note C la concentration en benzène.

- Si $\ln(C)$ est une fonction affine du temps t alors on dit que la réaction est d'ordre 1.
- Si $\dfrac{1}{C}$ est une fonction affine du temps t alors on dit que la réaction est d'ordre 2.

1. On observe les valeurs suivantes de C en fonction de t.

t	0	10	20	50	100	200	300
C	0,2	0,179	0,161	0,115	0,0666	0,0222	0,007

Déterminer l'ordre de cette réaction chimique.

2. On appelle maintenant x la concentration en benzène, y la concentration en produit 1 et z celle en produit 2, fonctions du temps t.
Ces fonctions vérifient, pour tout réel $t \geqslant 0$, le système

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = -K_1 x(t)\ (E_1) \\ y'(t) = -K_2 y(t) + K_1 x(t)\ (E_2) \\ z'(t) = -K_2 z(t)\ (E_3) \end{cases} .$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles distinctes et strictement positives.
Déterminer les solutions de (E_1).

3. Proposer une valeur de K_1 en accord avec les valeurs expérimentales.

Une première version (analyse)

4. a. Montrer que y vérifie une équation différentielle notée (E_4).

b. Résoudre (E_4). On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\mathrm{e}^{-K_1 t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

5. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}$ et $g(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1} f(t)$.

À quoi correspond la fonction g ?

6. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

Une seconde version (algèbre linéaire)

7. a. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

Écrire le système (S) sous la forme matricielle $X'(t) = AX(t)\ \ (E)$.

b. Donner ensuite une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

c. On pose, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X_1(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_1'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$.

Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, la forme générale de $X_1(t)$.

d. En déduire, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X(t)$.

Sujet 49. Élevage de lapins et suite de Fibonacci (O3)

On s'intéresse au nombre de couples de lapins dans un élevage.

En janvier (mois 0), un couple de lapereaux est réuni.

En février, ce couple devient mature. Le mois suivant, il donne naissance à un couple de lapereaux.

La suite du développement suit les règles suivantes :

- un couple mature donne naissance à un couple de lapereaux tous les mois ;
- en revanche, un couple de lapereaux doit attendre un mois avant d'atteindre sa maturité et, adulte, se mettre à procréer tous les mois.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n le nombre de couples de lapins le n-ème mois.

1. Montrer que $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$ (mois de mars) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

2. **a.** À l'aide du logiciel de votre choix (Python, Excel ou la calculatrice), écrire une fonction permettant de calculer f_n, n étant passé en argument.

b. Donner les 8 premiers termes de la suite (f_n).

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. À l'aide du logiciel de votre choix, donner une conjecture sur le lien existant, pour tout entier $n \geqslant 2$, entre A^n, f_n, f_{n-1} et f_{n-2}.
Démontrer cette conjecture.

b. Sachant que, pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$.

Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre A, X_{n+1} et X_n.

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n avec la méthode de votre choix. On pourra introduire $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_n, A, n et X_0. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de couples de lapins le n-ème mois en fonction de n.

7. Donner un équivalent de f_n. En déduire la limite du rapport $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

Sujet 50. Étude d'une population d'individus hermaphrodites (O3)

On considère une population d'individus hermaphrodites.

On note a_0 la proportion de mâles dans la population de départ et b_0 la proportion de femelles. Chaque individu a une probabilité $\frac{1}{4}$ de changer de sexe une fois par an. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la proportion de mâles dans la population à la fin de l'année n et b_n la proportion de femelles dans la population à la fin de l'année n .

Partie 1

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Que peut-on dire de la suite $(a_n + b_n)$?

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = a_n - \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions explicites de a_n et b_n en fonction de n.

5. Quelles sont les limites des deux suites (a_n) et (b_n) ?

Partie 2

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

On pose, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre X_{n+1}, M et X_n.

2. Montrer que 1 est une valeur propre de M et déterminer un vecteur propre de M associé à cette valeur propre.

3. Trouver une valeur propre x de M telle que $0 < x < 1$.

4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

6. Retrouver les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sujet 51. Résolution d'un système différentiel II (O3)

Partie I. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit a un nombre réel. On considère y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = ay$$

1. On considère la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = \mathrm{e}^{-at}y(t)$.
Montrer que z est une fonction constante.

2. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $y(t)$.

Partie II. Système différentiel linéaire du premier ordre

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On considère u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} u' = u + v \\ v' = -2u + 4v \end{cases} .$$

1. On note $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$. Écrire le système (S) sous forme matricielle.

2. **a.** Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n(t, A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}.$$

a. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ en fonction de t.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les suites $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites.

c. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $E(t, A)$ définie par

$$E(t, A) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices $E(t, A)$ et $E(-t, A)$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

5. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t, A) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

a. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1(t)$ et $v_1(t)$.

b. Montrer que, pour tout réel t, $u_1'(t) = v_1'(t) = 0$.

6. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel t,

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t, A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et en déduire, pour tout réel t, les expressions de $u(t)$ et $v(t)$.

Sujets mixtes algèbre/probabilités

Sujet 52. Évolution d'un génotype (C7)

Certaines plantes, par exemple le lupin, se reproduisent par auto-fécondation (ou autogamie).

Tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard et de façon indépendante.

On s'intéresse à l'évolution du génotype de la descendance d'une plante mère, concernant un gène qui possède deux allèles A et a.

1. Expliquer ce qui se passe pour la descendance si la plante est de génotype AA ou aa.
On suppose désormais que la plante mère est de génotype Aa.

2. Déterminer les probabilités que la descendance de la première génération soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.

3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements suivants :

- E_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype AA » et on note $y_n = \mathbf{P}(E_n)$;
- F_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa » et on note $z_n = \mathbf{P}(F_n)$;
- G_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype aa » et on note $x_n = \mathbf{P}(G_n)$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}z_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n.$$

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n en fonction de n.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k$ et en déduire x_n et y_n en fonction de n.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de X_0, M et n.

5. Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions explicites de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

6. Étudier le comportement à l'infini de ces suites et l'analyser en fonction des propriétés de l'information génétique.

Sujet 53. Matrices aléatoires dont les coefficients suivent des lois géométriques (C8)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un univers noté Ω.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre α et que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0\,;1[$.

I. Probabilités

1. **a.** Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
   b. Donner la loi de Y son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbf{P}\left((X=0) \cup (Y=0)\right)$.
3. Montrer que $(X=Y) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} ((X=k) \cap (Y=k))$.
   Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

II. Matrices

1. Soit deux réels positifs ou nuls a et b et $M = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer les valeurs propres de M en fonction de a et b.
   b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.
   c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M possède 3 valeurs propres distinctes.
2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega) = \begin{pmatrix} -X(\omega) & X(\omega) & 0 \\ 2X(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ où X et Y sont les variables aléatoires de la partie I.
   a. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit nulle.
   b. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit inversible.
   c. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ possède trois valeurs propres distinctes.

Sujet 54. Tirages successivement dans k urnes (C10)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère k urnes disposées les unes à la suite des autres.

La première contient b boules blanches et n boules noires, avec $(b, n) \in (\mathbb{N})^2$ et $b + n > 0$. Toutes les autres contiennent une boule blanche et une boule noire.

On pioche une boule dans la première urne pour la placer dans la deuxième, puis une boule dans la deuxième que l'on place dans la troisième, et ainsi de suite.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule piochée dans l'urne k est blanche et à 0 sinon.

1. Donner les lois de X_1 et X_2, leurs espérances et variances respectives.

2. À quelle condition les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent-elles la même loi ?

3. À quelle condition sur n les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

4. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \mathbf{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbf{P}(X_k = 0)$.
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_{k+1} et q_{k+1} en fonction de p_k et q_k et en déduire une matrice M telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}.$$

Exprimer ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k et q_k en fonction de M, k, p_1 et q_1.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de la matrice A.

6. On admet que la formule du binôme de Newton est vraie pour deux matrices M et N qui commutent.
Exprimer M en fonction de A et de I_2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, M^k.

7. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k et q_k en fonction de k.
Étudier et interpréter leur comportement asymptotique.

Sujet 55. Mouvement d'une particule (O3)

Une particule se déplace entre trois points A, B et C. On ne connaît pas sa position initiale. Lorsque la particule est située en :

- A, elle va en B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et en C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$;
- B, elle va en A avec une probabilité $\frac{3}{4}$ et en C avec une proba $\frac{1}{4}$;
- C, elle va en B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que la particule soit en A, en B et en C après n déplacements.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n \end{cases}.$$

2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de A.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

6. En déduire les valeurs propres de M, en utilisant la relation de la question **3.**.

7. Justifier qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.

8. On note, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = D^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Sujet 56. Sensibilité des grenouilles aux couleurs (O3)

Soit p et q dans $]0\,;1[$ et $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

1. *Une première méthode pour déterminer les puissances de A*

a. Déterminer deux matrices B et C telles que $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.

b. Calculer B^2 et C^2. En déduire BC et CB.

c. On admet que la formule du binôme de Newton est utilisable pour des matrices M et N d'ordre 2 qui commutent, c'est-à-dire telles que $MN = NM$.
Écrire cette formule du binôme de Newton.

d. Calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 2$. On pourra noter $\alpha = 1 - p - q$.

2. Afin de tester la sensibilité aux couleurs bleu et rouge des amphibiens, on place une grenouille adulte (les têtards voient en noir et blanc) dans une boîte séparée en deux compartiments, l'un rouge et l'autre bleu. On observe les déplacements de l'animal et, à chaque minute, on note où il se trouve.

S'il était en « zone bleue » à la n-ième minute, il est passé en « zone rouge » à la minute $n+1$ avec une probabilité q. De même, s'il était en « zone rouge » à la n-ième minute, il est passé en « zone bleue » à la minute $n+1$ avec une probabilité p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n (resp. b_n) la probabilité que la grenouille soit en « zone rouge » (resp. bleue) à la minute n.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n à l'aide d'une relation matricielle.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n et b_n en fonction de r_0 et b_0 à l'aide d'une relation matricielle.

c. À l'instant initial, le grenouille est introduite en « zone bleue ». Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n et b_n en fonction de n.

d. Application numérique : on prend $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{1}{6}$.
Déterminer le comportement à l'infini de r_n et b_n.

3. *Une deuxième méthode pour déterminer les puissances de A*

a. Montrer que la matrice A est diagonalisable quelles que soient les valeurs prises par p et q.
Déterminer ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.

b. Exprimer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sujet 57. Échanges de boules entre deux urnes I (O3)

On dispose de deux urnes A et B ainsi que de deux boules portant respectivement les numéros 0 et 1.

Initialement, l'urne A contient les deux boules et l'urne B est vide.

À chaque tour, on lance un dé équilibré à 6 faces et on effectue un éventuel déplacement d'une boule entre les urnes selon les règles suivantes :

- si le résultat du dé est 1 ou 2, on change d'urne la boule numérotée 0,
- si le résultat du dé est 3 ou 4, on change d'urne la boule numérotée 1,
- si le résultat du dé est 5 ou 6, on ne modifie pas le contenu des urnes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par :

- p_n la probabilité que l'urne A contienne les 2 boules après l'étape n ;
- q_n la probabilité que l'urne A ne contienne que la boule numérotée 0 après l'étape n ;
- r_n la probabilité que l'urne A ne contienne que la boule numérotée 1 après l'étape n ;
- t_n la probabilité que l'urne A ne contienne aucune boule après l'étape n.

Partie I

1. Donner les valeurs de p_0, q_0, r_0 et t_0.
2. Déterminer les valeurs de p_1, q_1, r_1 et t_1.
3. Montrer qu'il existe une matrice R telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre M, p_n, q_n, r_n, t_n et p_0, q_0, r_0, t_0.

Partie II

On considère les trois matrices suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer UV et VU.
2. Calculer U^2 puis U^3 et émettre une conjecture sur l'expression explicite de U^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   Démontrer cette conjecture.
3. Calculer V^2 puis V^3 puis V^4 et émettre une conjecture sur l'expression explicite de V^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer cette conjecture.

4. Exprimer R en fonction de U et V puis, en admettant que la formule du binôme de Newton s'applique, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de R^n en fonction de n.
5. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de p_n, q_n, r_n, t_n en fonction de n.

Sujet 58. Échanges de boules entre deux urnes II (O3)

On dispose de deux urnes A et B.

Initialement, l'urne A contient 2 boules noires et l'urne B contient 2 boules blanches.

À chaque tour, on choisit simultanément une boule de l'urne A et une boule de l'urne B, et on échange ces deux boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans l'urne A après n échanges.

On a donc $X_0 = 0$ de façon certaine.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de X_2, son espérance et sa variance.

3. Déterminer une matrice carrée M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

4. Diagonaliser la matrice M.

5. En déduire la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer l'espérance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Calculer la variance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Sujet 59. Tirages avec remplacement (O3)

Une urne contient 2 boules blanches.

À chaque étape, on enlève une boule de l'urne et on la remplace par une nouvelle boule, celle-ci étant blanche avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou noire avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit les évènements :

- B_k « après k étapes, l'urne contient 2 boules blanches » ;
- G_k « après k étapes, l'urne contient 1 boule noire et 1 boule blanche » ;
- N_k « après k étapes, l'urne contient 2 boules noires »,

ainsi que leurs probabilités :

- $b_k = \mathbf{P}(B_k)$;
- $g_k = \mathbf{P}(G_k)$;
- $n_k = \mathbf{P}(N_k)$.

On définit enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_k = \begin{pmatrix} b_k \\ g_k \\ n_k \end{pmatrix}$.

1. Donner les matrices X_0 et X_1.

2. Déterminer la matrice X_2.

3. On donne $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = MX_k$.

4. Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une relation entre X_k, M, X_0 et k.

5. On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de M.

6. Déterminer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

7. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Calculer P^{-1}.

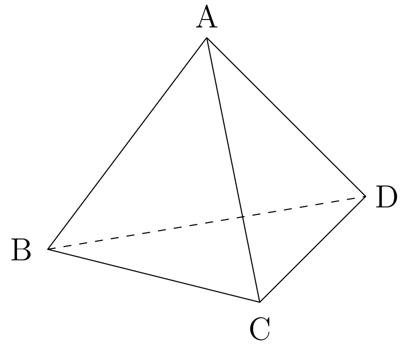
9. On note $D = P^{-1}AP$. Donner D^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

10. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la première colonne de A^k.

11. En déduire enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les probabilités b_k, g_k et n_k.

Sujet 60. Marche aléatoire sur un tétraèdre (O3)

On considère un tétraèdre de sommets A, B, C et D.



Un petit mobile se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre, pour se rendre d'un sommet à un autre.

À l'instant $t = 0$, il part du sommet A. Si à un instant donné il se trouve en A, B ou C, alors à l'instant suivant il se rend de façon équiprobable sur l'un des trois autres sommets. S'il arrive en D, alors il s'arrête.

On définit les événements A_n (respectivement B_n, C_n, D_n) : « le mobile se trouve en A (respectivement B, C, D) à l'instant n », ainsi que les probabilités respectives a_n, b_n, c_n, d_n de ces événements.

1. a. Calculer a_n, b_n, c_n, d_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

b. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice carrée A telle que pour tout $\in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

d. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de n, A, X_0.

2. a. Montrer qu'il existe une matrice inversible P de la forme de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ telle que $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n puis d_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (d_n) et interpréter le résultat obtenu.