Mathématiques :
Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. a. Déterminer les valeurs propres de A. Ces valeurs propres seront notées λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$.

b. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.

c. On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice inversible P appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

d. Déterminer P^{-1}.

2. Soit x, y, z et t des réels et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

a. Dans cette question, on suppose que $N^2 + N = D$.

i. Montrer que $ND = DN$ et en déduire que $y = z = 0$.

ii. Calculer $N^2 + N$ et en déduire que $\begin{cases} x^2 + x = 6 \\ t^2 + t = 2 \end{cases}$.

iii. En déduire les quatre valeurs possibles pour la matrice N, que l'on notera N_1, N_2, N_3 et N_4.

On admet que, réciproquement, les quatre matrices N_1, N_2, N_3 et N_4 vérifient l'égalité $N^2 + N = D$.

3. a. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et N la matrice définie par $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M^2 + M = A$ si et seulement si $N^2 + N = D$.

b. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = A$. On exprimera ces matrices à l'aide de N_1, N_2, N_3, N_4, P et P^{-1} sans chercher à les calculer explicitement.

Solution.

1. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff (5-\lambda)\times(3-\lambda) - 1\times 3 = 0 \iff 15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$
$$\iff \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - 8X + 12$ est $\Delta = (-8)^2 - 4\times 1\times 12 = 64 - 48 = 16 > 0$ donc ce trinôme admet deux racines réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2} = 6 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2} = 2.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{6, 2\}}$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors,

$$AX = 6X \iff \begin{pmatrix} 5x + 3y = 6x \\ x + 3y = 6y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = 3y$$

Ainsi, $E_6(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$ i.e. $E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_6(A)}$.

De même,

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 5x + 3y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

Ainsi, $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$ i.e. $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(A)}$.

c. Comme A est une matrice carrée qui admet deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

d. Le déterminant de P est $\det(P) = 3\times(-1) - 1\times 1 = -4$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{P = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$.

2. a. i. Comme $D = N^2 + N$, $ND = N(N^2 + N) = N^3 + N^2 = (N^2 + N)N = DN$ donc $\boxed{ND = DN}$. Or,

$$ND = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 6z & 2t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DN = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$$

donc $2y = 6y$ et $6z = 2z$ donc $4y = 0$ et $4z = 0$ i.e. $\boxed{y = z = 0}$.

ii. Dès lors, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ donc N est diagonale et ainsi

$$N^2 + N = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+x & 0 \\ 0 & t^2+t \end{pmatrix}.$$

Or, $N^2 + N = D$ donc on conclut que $\boxed{\begin{cases} x^2 + x = 6 \\ t^2 + t = 2 \end{cases}}$.

iii. On en déduit que $x^2 + x - 6 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 + X - 6$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 2$$

donc $x \in \{-3, 2\}$.

De même, on a $t^2 + t - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 + X - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$$

donc $t \in \{-2, 1\}$.
Ainsi, on conclut que les valeurs possibles pour N sont

$$\boxed{N_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b. Comme $N = P^{-1}MP$, $M = PNP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff (PNP^{-1})^2 + PNP^{-1} = A \iff PNP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1} = A \\ &\iff PNI_2NP^{-1} + PNP^{-1} = A \iff PN^2P^{-1} + PNP^{-1} = A \\ &\iff P(N^2 + N)P^{-1} = A \iff N^2 + N = P^{-1}AP \end{aligned}$$

Or, $A = PDP^{-1}$ donc $D = P^{-1}AP$ et ainsi on conclut que $\underline{M^2 + M = A \text{ si et seulement si } N^2 + N = D}$.

c. On déduit des deux questions précédentes que $M^2 + M = A$ si et seulement si $P^{-1}MP \in \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ donc l'ensemble des matrices M telles que $M^2 + M = A$ est

$$\boxed{\left\{PN_1P^{-1},\ PN_2P^{-1},\ PN_3P^{-1},\ PN_4P^{-1}\right\}}.$$

Exercice d'analyse

Dans tout l'exercice, on considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[\quad f(x) = \ln(1+x).$$

On admet que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]-1\,;+\infty[$.
b. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication. On remarquera qu'une primitive de $x \longmapsto 1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et $x \longmapsto 1+x$.

3. On considère la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
a. Calculer $g(0)$.
b. Déterminer les variations de g sur $]-1\,;+\infty[$.
c. Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser le résultat de la question **3.c.**.

4. **a.** Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
b. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T sur $]-1\,;+\infty[$.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
b. Montrer que (u_n) est décroissante.
c. Justifier que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
d. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Solution.

1. **a.** $\boxed{\text{Pour tout réel } x > -1,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x}}$. Or, pour tout $x > -1$, $x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-1\,;+\infty[}$.

b. Comme $\lim\limits_{x\to-1} x+1 = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} \ln(X) = -\infty$, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty}$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. Considérons les fonctions $u : x \longmapsto 1+x$ et $v : x \longmapsto \ln(1+x)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ avec $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$I = [(1+x)\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (1+x) \times \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 0 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$$

donc $\boxed{I = 2\ln(2) - 1}$.

3. **a.** Par définition, $g(0) = f(0) - 0 = \ln(1)$ donc $\boxed{g(0) = 0}$.

b. La fonction g est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > -1$,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

Or, pour tout réel $x > -1$, $1+x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-x$. Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in\,]-1\,;0]$ et $g'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$. De plus, g' ne s'annule qu'en 0 donc on conclut que <u>g est strictement croissante sur $]-1\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$</u>.

c. Dès lors, g atteint son maximum sur $]-1\,;+\infty[$ en 0 et ce maximum vaut $g(0) = 0$ donc, pour tout $x > -1$, $g(x) \leqslant 0$ i.e. $f(x) - x \leqslant 0$ soit $f(x) \leqslant x$. De plus, g n'atteint son maximum qu'en $x = 0$ donc l'égalité n'est vraie que pour $x = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x > -1,\ f(x) \leqslant x \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0}$.

4. **a.** L'équation réduit de T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or, $f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$ et $f(0) = \ln(1+0) = 0$ donc $\boxed{T \text{ a pour équation réduite } y = x}$.

b. On a vu en question **3.c.** que, pour tout $x > -1$, $f(x) \leqslant x$ donc on déduit de la question précédente que $\boxed{T \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_f \text{ sur }]-1\,;+\infty[}$.

5. **a.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation. $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc, par croissance de f sur $]-1\,;+\infty[$, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ i.e. $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \ln(2)$. Or, $\ln(2) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ d'après **3.c.** donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geqslant 0}$. De plus, f est continue (car dérivable) sur $[0\,;+\infty[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ln(1+\ell)$. Mais, par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc, par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$ i.e. $f(\ell) - \ell = 0$ soit $g(\ell) = 0$. On déduit alors de la question **3.c.** que $\ell = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

d. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ i.e. $\boxed{u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$.

Exercice de probabilités

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et, après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue de la n-ème expérience, c'est-à-dire après le tirage de la n-ème boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'évènement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k-ième tirage ».

1. **a.** Justifier que $X_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. Reconnaître la loi de X_1 et en déduire $\mathbf{E}(X_1)$.

b. Exprimer les évènements $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$ et $(X_2 = 3)$ en fonction des évènements B_1, B_2, R_1 et R_2.

c. Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, 3]\!]$. En déduire $\mathbf{E}(X_2)$.

2. **a.** Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

b. Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer l'évènement $(X_n = 1)$ en fonction des évènements B_1, B_2, ..., B_n.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$. De même, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = n+1)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Établir, pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, les égalités suivantes :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k-1) = \frac{k-1}{n+2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

b. En déduire, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, une relation entre $\mathbf{P}(X_{n+1} = k)$, $\mathbf{P}(X_n = k)$ et $\mathbf{P}(X_n = k-1)$.

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire X_n suit une loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Solution.

1. **a.** Au premier tirage, soit on tire une boule rouge et, dans ce cas, on remet cette boule accompagnée d'une autre boule rouge dans l'urne donc $X_1 = 2$ soit on tire une boule blanche et, dans ce cas, il reste dans l'urne la boule rouge initial donc X_1. Ainsi, $\boxed{X_1(\Omega) = \{1, 2\}}$. Par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(X_1 = 2) = \mathbf{P}(R_1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 2]\!])}$ et donc $\mathbf{E}(X_1) = \dfrac{1+2}{2}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \dfrac{3}{2}}$.

b. On a les égalités suivantes : $\boxed{(X_2 = 1) = B_1 \cap B_2}$, $\boxed{(X_2 = 2) = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)}$ et $\boxed{(X_2 = 3) = R_1 \cap R_2}$.

c. Après 2 tirages, on a ajouté 0, 1 ou 2 boules rouges dans l'urne donc $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. De plus,

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \mathbf{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 2) &= \mathbf{P}(R_1 \cap B_2) + \mathbf{P}(B_1 \cap R_2) \text{ (car } R_1 \cap B_2 \text{ et } R_2 \cap B_1 \text{ sont incompatibles)}\\ &= \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(B_2 \mid R_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(R_2 \mid B_1)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 3) = \mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 3]\!])}$. On en déduit que $\mathbf{E}(X_2) = \dfrac{3+1}{2}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = 2}$.

2. a. La loi conjointe de (X_1, X_2) est donnée par le tableau suivant :

X_2 \ X_1	1	2	Loi de X_2
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Loi de X_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

b. Par le théorème de transfert pour le produit,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_1X_2) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} ij\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j)\\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times 3 \times 0 + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times 3 \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

donc, par le formule de König-Huygens,

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2) = \frac{10}{3} - \frac{3}{2} \times 2$$

donc $\boxed{\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \dfrac{1}{3}}$.

Comme $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$, $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3. L'évènement $(X_n = 1)$ est réalisé si et seulement les n premières boules tirées sont blanches donc $\boxed{(X_n = 1) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n}$.

4. Par la formule des probabilités composée, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = 1) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1)\mathbf{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \cdots \mathbf{P}(B_n \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots B_{n-1})\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}}$.

De la même façon $(X_n = n+1) = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n$ et, le même calcul conduit à $\boxed{\mathbf{P}(X_n = n+1) = \dfrac{1}{n+1}}$.

5. a. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Si l'évènement $(X_n = k-1)$ est réalisé alors au moment du $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient contient $k-1$ boules rouges et $(n+1)-(k-1) = n+2-k$ boules blanches. Dès lors, par équiprobabilité des tirages, la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{k-1}{n+2}$ et la probabilité de tirer une boule blanche est $\dfrac{n+2-k}{n+2}$. Par suite,

$$\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k-1) = \frac{k-1}{n+2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = \frac{n+2-k}{n+2}}.$$

b. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Comme $((X_n = i))_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(X_n = i)\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = i).$$

De plus, pour qu'il y ait k boules rouges dans l'urne après le $(n+1)$-ème tirage, il faut qu'il y ait soit $k-1$ boules rouges soit k boules rouges au moment du tirage donc, pour $i \notin \{k-1, k\}$, $\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = i) = 0$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}(X_n = k-1)\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k-1) + \mathbf{P}(X_n = k)\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k)$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\mathbf{P}(X_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbf{P}(X_n = k)}.$$

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n+1]\!])$ ».
Initialisation. On a vu que $\mathbb{X}_1$ suit une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n+1}$. Remarquons qu'après le $(n+1)$-ème tirage, il y a $n+3$ boules dans l'urne donc $X_n(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$. Dès lors, par la question précédente, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1+n+2-k}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

De plus, par la question **4.**, $\mathbf{P}(X_{n+1}) = 1 = \mathbf{P}(X_{n+1} = n+2) = \dfrac{1}{n+2}$ donc, pour tout $k \in [\![1, n+2]\!]$, $\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$ et, ainsi, $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n+2]\!])$.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n+1]\!])}.$$

Fin du sujet