Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. a. Déterminer les valeurs propres de A. Ces valeurs propres seront notées λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$.

b. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.

c. On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice inversible P appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

d. Déterminer P^{-1}.

2. Soit x, y, z et t des réels et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

a. Dans cette question, on suppose que $N^2 + N = D$.

i. Montrer que $ND = DN$ et en déduire que $y = z = 0$.

ii. Calculer $N^2 + N$ et en déduire que $\begin{cases} x^2 + x = 6 \\ t^2 + t = 2 \end{cases}$.

iii. En déduire les quatre valeurs possibles pour la matrice N, que l'on notera N_1, N_2, N_3 et N_4.

On admet que, réciproquement, les quatre matrices N_1, N_2, N_3 et N_4 vérifient l'égalité $N^2 + N = D$.

3. a. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et N la matrice définie par $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M^2 + M = A$ si et seulement si $N^2 + N = D$.

b. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = A$. On exprimera ces matrices à l'aide de N_1, N_2, N_3, N_4, P et P^{-1} sans chercher à les calculer explicitement.

Exercice d'analyse

Dans tout l'exercice, on considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par

$$\forall x \in \,]-1\,;+\infty[\quad f(x) = \ln(1+x).$$

On admet que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1. **a.** Calculer, pour tout réel $x > -1$, $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]-1\,;+\infty[$.
   b. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Indication. On remarquera qu'une primitive de $x \longmapsto 1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et $x \longmapsto 1+x$.
3. On considère la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Calculer $g(0)$.
   b. Déterminer les variations de g sur $]-1\,;+\infty[$.
   c. Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x \in \,]-1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser le résultat de la question **3.c.**.

4. **a.** Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T sur $]-1\,;+\infty[$.
5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

   On admet que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. Montrer que (u_n) est décroissante.
   c. Justifier que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   d. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Exercice de probabilités

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et, après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue de la n-ème expérience, c'est-à-dire après le tirage de la n-ème boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'évènement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k-ième tirage ».

1. **a.** Justifier que $X_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. Reconnaître la loi de X_1 et en déduire $\mathbf{E}(X_1)$.
   b. Exprimer les évènements $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$ et $(X_2 = 3)$ en fonction des évènements B_1, B_2, R_1 et R_2.
   c. Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, 3]\!]$. En déduire $\mathbf{E}(X_2)$.
2. **a.** Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
   b. Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer l'évènement $(X_n = 1)$ en fonction des évènements B_1, B_2, ..., B_n.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$. De même, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = n+1)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Établir, pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, les égalités suivantes :
   $$\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k-1) = \frac{k-1}{n+2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$
   b. En déduire, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, une relation entre $\mathbf{P}(X_{n+1} = k)$, $\mathbf{P}(X_n = k)$ et $\mathbf{P}(X_n = k-1)$.
   c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire X_n suit une loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Fin du sujet