Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2017)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f.

b. Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f.

c. Soit $v = (0, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. **a.** Vérifier que $f(v) = u$ et $f(w) = v$.

b. Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w).

c. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w). Donner l'expression de P.

d. Exprimer A en fonction de N, P et P^{-1}.

3. **a.** Calculer N^2 et N^3.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, N^n est la matrice nulle.

c. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, la valeur de A^n.

Solution.

1. a. Première méthode. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ x - z = 0 & L_2 \\ 2x - y - z = 0 & L_3 \end{cases}$$

associé à la matrice A. Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_3 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

Le dernier système est échelonné et contient 2 pivots donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

Seconde méthode. On sait que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Comme le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, c'est aussi la dimension de l'espace engendré par ses lignes. Or, ici, les deux premières lignes sont identiques et la troisième ligne est clairement non proportionnelle à la première donc les lignes de A engendre un espace de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2$ donc $\boxed{\dim(\ker(f)) = 1}$.

b. Comme $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\1-1\\2-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $f(u) = (0,0,0)$ donc $u \in \ker(f)$. Ainsi, u est un vecteur non nul de $\ker(f)$ donc, comme $\dim(\ker(f)) = 1$, on conclut que $\boxed{(u) \text{ est une base de } \ker(f)}$.

c. Considérons des réels a, b et c tels que $au+bv+cw = 0$. Alors, $(a, a+c, a-b) = (0,0,0)$ donc $a = 0$, $a + c = 0$ et $a - b = 0$. On en déduit que $a = 0$, $c = -a = 0$ et $b = a = 0$ donc $a = b = c = 0$. Ainsi, (u, v, w) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on conclut, par théorème, que $\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. a. Comme $A\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boxed{f(v) = u}$ et, comme $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boxed{f(w) = v}$.

b. Comme $f(u) = (0,0,0)$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$, la matrice de f dans la base (u, v, w) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } (u, v, w) \text{ est } N}$.

c. Par définition,

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

d. D'après le formule de changement de bases, $N = P^{-1}AP$ donc $\boxed{A = PNP^{-1}}$.

3. a. Le calcul donne $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0_3}$.

   b. Soit un entier $n \geqslant 3$. Alors, $N^n = N^3 N^{n-3} = 0_3 N^{n-3} = 0_3$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ N^3 = 0_3}$.

   c. Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ par convention. Pour $n = 1$, $A^1 = A$. Pour $n = 2$, le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Par propriété, pour tout entier naturel n, $A^n = PN^nP^{-1}$ donc, pour tout entier $n \geqslant 3$, $A^n = P0_3P^{-1} = 0_3$.
   Ainsi, on conclut que

$$\boxed{A^0 = I_3 \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geqslant 3,\quad A^n = 0_3}.$$

Exercice de probabilités (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2016)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire deux jetons de l'urne au hasard.

On étudie dans la première partie de l'exercice le cas d'un tirage avec remise et, dans la seconde partie, le cas d'un tirage sans remise lorsque l'urne contient quatre jetons. Les deux parties sont indépendantes.

1. **Cas d'un tirage avec remise**
   On note X_1 le variable aléatoire égale au numéro de premier jeton tiré, et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du second jeton tiré. On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand de ces deux numéros.
   a. Montrer que la variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur un ensemble à préciser. Donner, de même, la loi de X_2.
   b. Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
2. Soit i un entier naturel compris entre 1 et n.
   a. On note A_i l'évènement $(X_1 \leqslant i)$ et B_i l'évènement $(X_2 \leqslant i)$. Décrire par une phrase en français ces évènements. Montrer que $P(A_i) = \dfrac{i}{n}$. Calculer de même $P(B_i)$.
   b. Décrire, en français, l'évènement $A_i \cap B_i$. Calculer la probabilité de cet évènement.
   c. On appelle F_M la fonction de répartition de la variable aléatoire M. Rappeler la définition de F_M. Donner ensuite la valeur de $F_M(i)$.
   d. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier i compris entre 1 et n, on a
$$P(M = i) = \frac{2i - 1}{n^2}.$$
3. **Cas d'un tirage sans remise, avec $n = 4$.**
   On suppose dans cette partie que l'urne contient $n = 4$ jetons. On suppose aussi que le tirage est sans remise : le premier jeton n'est donc pas remis dans l'urne avant le tirage du second jeton.

On appelle Y_1 le numéro du premier jeton tiré et Y_2 le numéro du second jeton tiré. Il est clair que Y_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ce que l'on pourra utiliser dans la suite.

a. Soit j un entier naturel compris entre 1 et 4. Justifier que :

$$P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } j \in \{2,3,4\} \\ 0 \text{ si } j = 1 \end{cases}$$

b. En déduire que $P(Y_2 = 1) = \dfrac{1}{4}$. On pourra employer la formule de probabilités totales.

On peut montrer de la même façon que, pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$, $P(Y_2 = i) = \dfrac{1}{4}$. On admet ce résultat et on pourra l'utiliser dans la suite.

c. Donner alors la loi de Y_2 ainsi que l'espérance de cette variable aléatoire.

d. Donner, sans justification, la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2). On pourra représenter cette loi sous forme d'un tableau à double entrée.

e. Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2).

Solution.

1. a. Comme on effectue un tirage au hasard dans un ensemble de n jetons numérotés de 1 à n, $\boxed{X_1 \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1, n]\!]}$.

Comme il y a remise du jeton tiré, $\boxed{X_2 \text{ suit la même loi que } X_1}$.

b. Comme il y a remise du jeton tiré, les deux tirages sont indépendants donc les variables aléatoires $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}}$.

2. a. L'évènement A_i est « le premier numéro tiré est inférieur ou égal à i ». Comme les évènements de la forme $(X_1 = k)$ sont mutuellement incompatibles, on en déduit que

$$P(A_i) = \sum_{k=1}^{i} P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{i} 1 = \frac{1}{n} \times i$$

i.e. $\boxed{P(A_i) = \dfrac{i}{n}}$.

L'évènement B_i est « le second numéro tiré est inférieur ou égal à i ». Comme X_1 et X_2 ont la même loi, $\boxed{P(B_i) = P(A_i) = \dfrac{i}{n}}$.

b. L'évènement $A_i \cap B_i$ est « les deux numéros tirés sont inférieurs ou égaux à i ». Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, A_i et B_i sont indépendants donc $P(A_i \cap B_i) = P(A_i)P(B_i)$ i.e. $\boxed{P(A_i \cap B_i) = \dfrac{i^2}{n^2}}$.

c. Par définition, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_M(x) = P(M \leqslant x)}$.

Ainsi, $F_M(i) = P(M \leqslant i)$. Or, dire que $(M \leqslant i)$ signifie que X_1 et X_2 sont inférieures ou égales à i donc $(M \leqslant i) = A_i \cap B_i$. Ainsi, $\boxed{F_M(i) = \dfrac{i^2}{n^2}}$.

d. Pour tout entier i compris entre 1 et n,

$$\begin{aligned} P(M=i) &= P(M \leqslant i) - P(M \leqslant i-1) = F_M(i) - F_M(i-1) \\ &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} = \frac{i^2-(i^2-2i+1)}{n^2} \\ &= \frac{i^2-i^2+2i-1}{n^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P(M=i) = \dfrac{2i-1}{n^2}}$.

3. a. Si $Y_1 = 1$ alors le premier jeton tiré est le numéro 1 donc, comme il n'y a pas remise, il n'est plus possible de tirer ce jeton au second tirage. Ainsi, $P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = 0$. Si $Y_1 \geqslant 2$ alors il reste dans l'urne trois jetons pour le second tirage dont le jeton 1 donc, comme il y a équiprobabilité des tirages, $P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \dfrac{1}{3}$ si $j \geqslant 2$.
Ainsi,

$$\boxed{P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } j \in \{2,3,4\} \\ 0 \text{ si } j = 1 \end{cases}}.$$

b. Comme $(Y_1 = j)_{j\in\{1,2,3,4\}}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 1) &= \sum_{j=1}^{4} P(Y_1 = j) P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{4} P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) \\ &= \frac{1}{4}\left[0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] \end{aligned}$$

et donc $\boxed{P(Y_2 = 1) = \dfrac{1}{4}}$.

c. Comme $Y_2(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ et, pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, $P(Y_2 = i) = \dfrac{1}{4}$, on peut affirmer que $\boxed{Y_2 \text{ suit une loi uniforme sur } \{1,2,3,4\}}$.

Par théorème, l'espérance de Y_2 est $E(Y_2) = \dfrac{1+4}{2}$ i.e. $\boxed{E(Y_2) = \dfrac{5}{2}}$.

d. La loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

Y_2 \ Y_1	1	2	3	4	Loi de Y_2
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
Loi de Y_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

e. Par la formule de König-Huygens, $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$. Par le théorème de transfert pour le produit,

$$\begin{aligned} E(Y_1Y_2) &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} ijP(Y_1=i, Y_2=j) \\ &= \frac{1}{12}\left[1\times(2+3+4)+2\times(1+3+4)+3\times(1+2+4)+4\times(1+2+3)\right] \\ &= \frac{9+16+21+24}{12} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \dfrac{35}{6} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{2\times 35 - 3\times 25}{12}$ soit $\boxed{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = -\dfrac{5}{12}}$.

Exercice d'analyse (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2010)

Pour tout entier naturel n, on considère

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Montrer que la fonction $F : x \longmapsto (x+1)\left[\ln(x+1)-1\right]$ est une primitive sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x+1)$.

   b. Déduire de la question précédente la valeur de I_0.

2. **a.** Justifier que

$$\forall x \in\,]-1\,;+\infty[\,,\quad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

   b. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

   c. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\ln(2) - J\right].$$

   d. En déduire la valeur de I_1.

3. **a.** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

   b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

   c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

   d. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

   e. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (I_n).

Solution.

1. **a.** La fonction F est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > -1$,

$$F'(x) = 1\times\left[\ln(x+1)-1\right] + (x+1)\times\frac{1}{x+1} = \ln(x+1) - 1 + 1 = \ln(x+1) = f(x)$$

   donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]-1\,;+\infty[}$.

b. Ainsi,

$$I_0 = \int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = 2(\ln(2)-1) - 1(\ln(1)-1) = 2\ln(2) - 2 + 1$$

soit $\boxed{I_0 = 2\ln(2) - 1}$.

2. a. Soit $x > -1$. Alors,

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

donc $\boxed{\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}}$.

b. On en déduit que

$$J = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - 0$$

soit $\boxed{J = \ln(2) - \dfrac{1}{2}}$.

c. Considérons les fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $v : x \longmapsto \ln(x+1)$ de sorte que $u' : x \longmapsto x$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$. On définit ainsi deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$I_1 = \int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, $\boxed{I_1 = \dfrac{1}{2}\left[\ln(2) - J\right]}$.

d. Dès lors, $I_1 = \dfrac{1}{2}\left[\ln(2) - \left(\ln(2) - \dfrac{1}{2}\right)\right]$ i.e. $\boxed{I_1 = \dfrac{1}{4}}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$ et $x + 1 \geqslant 1$ donc $\ln(x+1) \geqslant 0$ donc $x^n \ln(x+1) \geqslant 0$. Comme $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\boxed{I_n \geqslant 0}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x \leqslant 1$ donc, en multipliant par $x^n \ln(x+1) \geqslant 0$, $x^{n+1}\ln(x+1) \leqslant x^n \ln(x+1)$. Comme $0 < 1$, on en déduit, par croissance de l'intégrale que $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ i.e. $I_{n+1} \leqslant I_n$.

On conclut que $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

c. Les deux questions précédentes montrent que (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x \leqslant 1$ donc $x + 1 \leqslant 2$ donc, par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(x+1) \leqslant \ln(2)$ et, en multipliant par $x^n \geqslant 0$, $x^n \ln(x+1) \leqslant x^n \ln(2)$. Ainsi, comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \ln(2)\,\mathrm{d}x$ i.e., par linéarité, $\displaystyle I_n \leqslant \ln(2)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

Or,

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$$

donc $\boxed{I_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n+1}}$.

e. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n+1}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

Fin du sujet