Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2017)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f.

b. Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f.

c. Soit $v = (0, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. **a.** Vérifier que $f(v) = u$ et $f(w) = v$.

b. Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w).

c. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w). Donner l'expression de P.

d. Exprimer A en fonction de N, P et P^{-1}.

3. **a.** Calculer N^2 et N^3.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, N^n est la matrice nulle.

c. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, la valeur de A^n.

Exercice de probabilités (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2016)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire deux jetons de l'urne au hasard.

On étudie dans la première partie de l'exercice le cas d'un tirage avec remise et, dans la seconde partie, le cas d'un tirage sans remise lorsque l'urne contient quatre jetons. Les deux parties sont indépendantes.

1. **Cas d'un tirage avec remise**

   On note X_1 le variable aléatoire égale au numéro de premier jeton tiré, et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du second jeton tiré. On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand de ces deux numéros.

   a. Montrer que la variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur un ensemble à préciser. Donner, de même, la loi de X_2.

   b. Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

   c. Soit i un entier naturel compris entre 1 et n.

   i. On note A_i l'évènement $(X_1 \leqslant i)$ et B_i l'évènement $(X_2 \leqslant i)$. Décrire par une phrase en français ces évènements. Montrer que $P(A_i) = \dfrac{i}{n}$. Calculer de même $P(B_i)$.

   ii. Décrire, en français, l'évènement $A_i \cap B_i$. Calculer la probabilité de cet évènement.

   iii. On appelle F_M la fonction de répartition de la variable aléatoire M. Rappeler la définition de F_M. Donner ensuite la valeur de $F_M(i)$.

   iv. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier i compris entre 1 et n, on a

   $$P(M = i) = \frac{2i - 1}{n^2}.$$

2. **Cas d'un tirage sans remise, avec $n = 4$.**

   On suppose dans cette partie que l'urne contient $n = 4$ jetons. On suppose aussi que le tirage est sans remise : le premier jeton n'est donc pas remis dans l'urne avant le tirage du second jeton.

   On appelle Y_1 le numéro du premier jeton tiré et Y_2 le numéro du second jeton tiré. Il est clair que Y_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ce que l'on pourra utiliser dans la suite.

   a. Soit j un entier naturel compris entre 1 et 4. Justifier que :

   $$P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } j \in \{2, 3, 4\} \\ 0 \text{ si } j = 1 \end{cases}$$

   b. En déduire que $P(Y_2 = 1) = \dfrac{1}{4}$. On pourra employer la formule de probabilités totales.

   On peut montrer de la même façon que, pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$, $P(Y_2 = i) = \dfrac{1}{4}$. On admet ce résultat et on pourra l'utiliser dans la suite.

   c. Donner alors la loi de Y_2 ainsi que l'espérance de cette variable aléatoire.

   d. Donner, sans justification, la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2). On pourra représenter cette loi sous forme d'un tableau à double entrée.

   e. Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2).

Exercice d'analyse (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2010)

Pour tout entier naturel n, on considère

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

1. a. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto (x+1)\left[\ln(x+1) - 1\right]$ est une primitive sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x+1)$.

b. Déduire de la question précédente la valeur de I_0.

2. a. Justifier que

$$\forall x \in \,]-1\,;+\infty[\,, \qquad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

b. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\ln(2) - J\right].$$

d. En déduire la valeur de I_1.

3. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

d. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

e. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (I_n).

Fin du sujet