Devoir surveillé n°5

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice d'algèbre. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que U est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre que l'on précisera.

2. Déterminer un vecteur propre V de A associé à la valeur propre 0, de première coordonnée égale à 1.

3. Déterminer la réel α tel que le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1.

4. Justifier qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On précisera D, (on écrira ses coefficients diagonaux dans l'ordre croissant), ainsi que P, mais on ne calculera pas P^{-1}.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au sous-ensemble F_A suivant de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}.$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.

5. On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité.

- **a.** La matrice O_3 appartient-elle à F_A ?
- **b.** La matrice I_3 appartient-elle à F_A ?

6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}M$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice P déterminée précédemment. Démontrer l'équivalence :

$$AM = M \iff DN = N.$$

7. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des nombres réels.

- **a.** Calculer le produit DN.

b. On suppose que la matrice N vérifie l'égalité $DN = N$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

c. La réciproque de la propriété démontrée à la question précédente est-elle vraie ?

8. En déduire les matrices M appartenant à F_A.

Solution.

1. Commençons par remarquer que le vecteur U est non nul. De plus,

$$AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -U$$

donc $\boxed{U \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } -1}$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors,

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \\ -2x + 0 + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $x = 1$, on en déduit que

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 0}$$

(puisque V est non nul).

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Alors,

$$AW = W \iff \begin{cases} -1 + \alpha = 1 \\ 0 = 0 \\ -2 + 2\alpha = \alpha \end{cases} \iff \alpha = 2.$$

Ainsi, comme W est non nul,

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1}.$$

4. La matrice A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distinctes : -1, 0 et 1 donc, par théorème, A est diagonalisable. Ainsi, <u>il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$</u>. De plus, les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs propres associés donc, en ordonnant les valeurs propres par ordre croissant sur la diagonale de D, on obtient

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

.

5. **a.** Étant donné que $AO_3 = O_3$, $\boxed{O_3 \in F_A}$.

b. Étant donné que $AI_3 = A \neq I_3$, $\boxed{I_3 \notin F_A}$.

6. Rappelons que $A = PDP^{-1}$. Dès lors, par associativité du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AM = M &\iff (PDP^{-1})M = PD(P^{-1}M) = M \iff PDN = M \\ &\iff P^{-1}(PDN) = P^{-1}M \iff (P^{-1}P)DN = N \end{aligned}$$

soit finalement, comme $P^{-1}P = I_3$,

$$\boxed{AM = M \iff DN = N}.$$

7. **a.** Le calcul donne

$$DN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{DN = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}}.$$

b. Comme $DN = N$,

$$\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} -a = a \\ -b = b \\ -c = c \\ 0 = d \\ 0 = e \\ 0 = f \\ g = g \\ h = h \\ i = i \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2a = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}}.$$

c. Réciproquement, supposons que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors, en particulier, $a = b = c = 0$ donc, d'après le calcul de la question (a), $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ i.e. $DN = N$. Ainsi, $\boxed{\text{la réciproque est vraie}}$.

8. Ainsi, d'après les deux questions précédentes, pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $DN = N$ si et seulement s'il existe des réels g, h et i tels que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Or, d'après la question 6., $M \in F_A$ si et seulement si $(P^{-1}M)D = P^{-1}M$. Ainsi, on en déduit que $M \in F_A$ si et seulement s'il existe des réels g, h et i tels que $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ i.e. $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Or, pour tous réels g, h et i,

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{F_A = \left\{ \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \;\middle|\; (g,h,i) \in \mathbb{R}^3 \right\}}.$$

Remarque. On peut constater que

$$F_A = \left\{ g\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (g,h,i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

donc, en posant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$F_A = \{gM_1 + hM_2 + iM_3 \mid (g,h,i) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$$

ce qui prouve que F_A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par M_1, M_2, M_3.

Exercice d'analyse. Dans cet exercice, on considère la fonction $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \geqslant 1$, par la relation :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. On rappelle que la fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et positive. Pour tout $x \geqslant 0$, montrer alors que l'on a les deux inégalités :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Ces inégalités pourront être utilisées dans la suite de l'exercice.

2. Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

On **admet** que la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc admet une primitive sur $[1\,;+\infty[$. On note U une primitive de u dans la suite de l'exercice.

On ne cherchera pas à calculer U.

3. Notons g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par la relation $g(x) = U(2x)$.
Montrer que g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et prouver que, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

4. Montrer que f est dérivable et que l'on a, pour tout $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

5. Donner le sens de variation de la fonction f.
On pourra utiliser l'une des deux inégalités de la question 1.

Solution.

1. Soit $x \geqslant 0$. Alors, $x + x \geqslant 0 + x$ c'est-à-dire $2x \geqslant x$ donc, comme $-1 < 0$, $-2x \leqslant -x$. Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $\boxed{0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}$.

   Comme exp est positive sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$ donc $-\mathrm{e}^{-2x} \leqslant 0$ et, ainsi, $\boxed{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$.

2. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. Alors, pour tout $t \in [x\,;2x]$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $t > 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0$. De plus, comme $x > 0$, $2x > x$ donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f(x) \geqslant 0}$.

3. Par définition, la fonction U est dérivable sur $[1\,;+\infty]$ et $U' = u$. De plus, $x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $[1\,;+\infty]$ et, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $2x \in [1\,;+\infty[$ donc, par composition, g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = 2U'(2x) = 2u(2x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2x}$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}}.$$

4. Comme U est une primitive de u sur $[1\,;+\infty[$, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \int_x^{2x} u(t)\,\mathrm{d}t = U(2x) - U(x) = g(x) - U(x).$$

   Or, les deux fonctions U et g sont dérivables sur $[1\,;+\infty[$ donc, par différence, f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = g'(x) - U'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} - u(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}}.$$

5. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. D'après le résultat de la question **1.**, $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$ et, comme $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice de probabilités.

Partie 1

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

1. **Question de cours.** Rappeler la valeur de l'espérance de X.
2. **a.** Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 2)$.

   b. En déduire que $\mathbf{P}(X > 2) = (1-p)^2$.

   Plus généralement, on peut montrer, et on l'admettra, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbf{P}(X > k) = (1-p)^k.$$
3. Soit k et n deux entiers naturels non nuls.

   a. Justifier que $(X > k+n) \cap (X > n) = (X > k+n)$.

   b. Démontrer alors que $\mathbf{P}_{(X>n)}(X > k+n) = \mathbf{P}(X > k)$. On dit alors que X est une variable aléatoire **sans mémoire**.

Partie 2

Le but de cette partie est d'étudier la réciproque de la propriété démontrée à la question **3.b.** de la partie précédente.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tous entiers naturels non nuls k et n,
$$\mathbf{P}_{(Y>n)}(Y > k+n) = \mathbf{P}(Y > k) \qquad (\star\star)$$
On pose $q = \mathbf{P}(Y = 1)$. On suppose que $0 < q < 1$. On pose également, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \mathbf{P}(Y > k)$.

1. Exprimer u_1 en fonction de q.
2. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbf{P}(Y > k) = \frac{\mathbf{P}(Y > k+1)}{\mathbf{P}(Y > 1)}.$$
   On pourra utiliser l'égalité $(\star\star)$ avec une valeur de n bien choisie.

   b. En déduire que la suite (u_k) est géométrique, et déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_k en fonction de k.
3. Soit $k \geqslant 2$ un entier naturel. En remarquant que $\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y > k-1) - \mathbf{P}(Y > k)$, calculer la valeur de $\mathbf{P}(Y = k)$.
4. Donner alors la loi de Y.

Solution.

Partie 1

1. Par propriété, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}}$.

2. **a.** Comme $(X \leqslant 2) = (X = 1) \cup (X = 2)$ et que cette union est disjointe,

$$\mathbf{P}(X \leqslant 2) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = p + p(1-p) = p(1+1-p)$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 2) = p(2-p)}$.

b. Comme $(X > 2) = \overline{(X \leqslant 2)}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X > 2) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - p(2-p) = 1 - 2p + p^2$$

donc, en reconnaissant une identité remarquable, $\boxed{\mathbf{P}(X > 1) = (1-p)^2}$.

3. **a.** Comme $n \geqslant 0$, $k + n \geqslant k$ donc $(X > k+n) \subset (X > n)$. Par suite,

$$\boxed{(X > k+n) \cap (X > n) = (X > k+n)}.$$

b. Par définition,

$$\mathbf{P}_{(X>n)}(X > k+n) = \frac{\mathbf{P}((X > k+n) \cap (X > n))}{\mathbf{P}(X > n)}$$

donc, par le résultat de la question précédente,

$$\mathbf{P}_{(X>n)}(X > k+n) = \frac{\mathbf{P}(X > k+n)}{\mathbf{P}(X > n)}$$

et ainsi, par le résultat admis dans l'énoncé,

$$\mathbf{P}_{(X>n)}(X > k+n) = \frac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^n} = (1-p)^{k+n-n} = (1-p)^k$$

donc $\boxed{\mathbf{P}_{(X>n)}(X > k+n) = \mathbf{P}(X > k)}$.

Partie 2

1. Par définition, $u_1 = \mathbf{P}(Y > 1)$ et, comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $(Y > 1) = \overline{(Y = 1)}$. Ainsi, $u_1 = 1 - \mathbf{P}(Y = 1)$ soit $\boxed{u_1 = 1 - q}$.

2. **a.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant $(\star\star)$ avec $n = 1$, il vient

$$\mathbf{P}_{(Y>1)}(Y > k+1) = \mathbf{P}(Y > 1).$$

Or, comme dans la question **3.** de la **Partie 1**, $(X > k+1) \subset (Y > 1)$ car $k > 0$ donc

$$\mathbf{P}_{(Y>1)}(Y > k+1) = \frac{\mathbf{P}((Y > k+1) \cap (Y > 1))}{\mathbf{P}(Y > 1)} = \frac{\mathbf{P}(Y > k+1)}{\mathbf{P}(Y > 1)}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Y > k) = \frac{\mathbf{P}(Y > k+1)}{\mathbf{P}(Y > 1)}}.$$

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(Y > k+1) = \mathbf{P}(Y > 1)\mathbf{P}(Y > k)$$

i.e. $u_{k+1} = u_1 u_k$ donc $\boxed{(u_k) \text{ est une suite géométrique de raison } u_1 = 1-q}$.
Dès lors, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = (1-q)(1-q)^{k-1} = (1-q)^k}$.

3. On remarque que $(Y=k)=(Y>k-1)\setminus(Y>k)$ donc, comme $(Y>k)\subset(Y>K-1)$, $\mathbf{P}(Y=k)=\mathbf{P}(Y>k-1)-\mathbf{P}(Y>k)$. Comme $k\geqslant 2$, $k-1\geqslant 1$ donc, par le résultat de la question précédente

$$\mathbf{P}(Y=k)=(1-q)^{k-1}-(1-q)^{k}=(1-q)^{k-1}(1-(1-q))=(1-q)^{k-1}q.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(Y=k)=q(1-q)^{k-1}}$.

4. On remarque que l'égalité précédente reste vraie pour $q=1$ car $\mathbf{P}(Y=1)=q$ et $q(1-q)^{1-1}=q(1-q)^{0}=q$ donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(Y=k)q(1-q)^{k-1}$.
On conclut donc que $\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } q}$.