TB2 **samedi 21 mars 2026**

Devoir surveillé n°5

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice d'algèbre. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que U est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre que l'on précisera.

2. Déterminer un vecteur propre V de A associé à la valeur propre 0, de première coordonnée égale à 1.

3. Déterminer la réel α tel que le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1.

4. Justifier qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On précisera D, (on écrira ses coefficients diagonaux dans l'ordre croissant), ainsi que P, mais on ne calculera pas P^{-1}.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au sous-ensemble F_A suivant de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}.$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.

5. On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité.

a. La matrice O_3 appartient-elle à F_A ?

b. La matrice I_3 appartient-elle à F_A ?

6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}M$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice P déterminée précédemment. Démontrer l'équivalence :

$$AM = M \Longleftrightarrow DN = N.$$

7. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des nombres réels.

a. Calculer le produit DN.

b. On suppose que la matrice N vérifie l'égalité $DN = N$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

c. La réciproque de la propriété démontrée à la question précédente est-elle vraie ?

8. En déduire les matrices M appartenant à F_A.

Exercice d'analyse. Dans cet exercice, on considère la fonction $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \geqslant 1$, par la relation :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. On rappelle que la fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et positive.
Pour tout $x \geqslant 0$, montrer alors que l'on a les deux inégalités :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Ces inégalités pourront être utilisées dans la suite de l'exercice.

2. Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

On **admet** que la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc admet une primitive sur $[1\,;+\infty[$. On note U une primitive de u dans la suite de l'exercice.
On ne cherchera pas à calculer U.

3. Notons g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par la relation $g(x) = U(2x)$.
Montrer que g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et prouver que, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

4. Montrer que f est dérivable et que l'on a, pour tout $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

5. Donner le sens de variation de la fonction f.
On pourra utiliser l'une des deux inégalités de la question 1.

Exercice de probabilités.

Partie 1

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

1. **Question de cours.** Rappeler la valeur de l'espérance de X.

2. **a.** Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 2)$.

b. En déduire que $\mathbf{P}(X > 2) = (1-p)^2$.

Plus généralement, on peut montrer, et on l'admettra, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X > k) = (1-p)^k.$$

3. Soit k et n deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier que $(X > k+n) \cap (X > n) = (X > k+n)$.

b. Démontrer alors que $\mathbf{P}_{(X>n)}(X > k+n) = \mathbf{P}(X > k)$. On dit alors que X est une variable aléatoire **sans mémoire**.

Partie 2

Le but de cette partie est d'étudier la réciproque de la propriété démontrée à la question **3.b.** de la partie précédente.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tous entiers naturels non nuls k et n,

$$\mathbf{P}_{(Y>n)}(Y > k+n) = \mathbf{P}(Y > k) \qquad (\star\star)$$

On pose $q = \mathbf{P}(Y = 1)$. On suppose que $0 < q < 1$. On pose également, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \mathbf{P}(Y > k)$.

1. Exprimer u_1 en fonction de q.

2. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(Y > k) = \frac{\mathbf{P}(Y > k+1)}{\mathbf{P}(Y > 1)}.$$

On pourra utiliser l'égalité $(\star\star)$ avec une valeur de n bien choisie.

b. En déduire que la suite (u_k) est géométrique, et déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_k en fonction de k.

3. Soit $k \geqslant 2$ un entier naturel. En remarquant que $\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y > k-1) - \mathbf{P}(Y > k)$, calculer la valeur de $\mathbf{P}(Y = k)$.

4. Donner alors la loi de Y.