Devoir surveillé n°4

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à densité, suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On définit une variable aléatoire Y en posant :

$$Y = \exp(-X) = \mathrm{e}^{-X}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y.
Dans tout l'exercice, on note F_X la fonction de répartition de X et F_Y celle de Y.

Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Partie B. — Dans cette partie, on se donne un nombre réel a.

1. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ d'inconnue x. On distinguera deux cas : celui où a est strictement positif et celui où a est négatif ou nul.

2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a. Montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a))$.

b. Montrer que $F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))$.

c. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Donner le signe de $-\ln(a)$ et en déduire la valeur de $F_Y(a)$.

d. On suppose dans cette question que $a \in]0\,;1]$.
Montrer que $F_Y(a) = a$.

3. Calculer $F_Y(a)$ pour $a \leqslant 0$.

4. Déduire des questions précédentes la loi de Y. On reconnaître une loi classique dont on donnera les paramètres éventuels.

Solution.

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Supposons $x < 0$. Comme la densité de X est nulle sur $]-\infty\,;0[$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = 0$ i.e. $F_X(x) = 0$.

Supposons $x \geqslant 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-x} - (-\mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

i.e. $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

On conclut donc que, pour tout réel x,

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}.$$

2. a. Soit $x \geqslant 0$. Alors,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}}$.

b. D'après le théorème de transfert, Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge i.e. si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ converge. On déduit donc de la question précédente que Y admet un espérance et que $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2}}$.

Partie B

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc, si $a \leqslant 0$, alors l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ est $\varnothing$.

Supposons $a > 0$. Alors, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$,

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant a \iff -x \leqslant \ln(a) \iff x \geqslant -\ln(a)$$

donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ est $[-\ln(a)\,;+\infty[$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \mathrm{e}^{-x} \leqslant a \text{ est } \varnothing \text{ si } a \leqslant 0 \text{ et } [-\ln(a)\,;+\infty[\text{ si } a > 0}$.

2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a. Comme $a > 0$, d'après la question précédente, $\{Y \leqslant a\} = \{\mathrm{e}^{-X} \leqslant a\} = \{X \geqslant -\ln(a)\}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a))}$.

b. Grâce à la question précédente,

$$F_Y(a) = \mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a)) = 1 - \mathbf{P}(X < -\ln(a)) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant -\ln(a))$$

car X est une variable aléatoire à densité et donc $\boxed{F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))}$.

- **c.** Comme $a > 1$, $\ln(a) > 0$ donc $-\ln(a) < 0$. Dès lors, d'après la question **1.** de la **Partie A**, $F_X(-\ln(a)) = 0$ et on cpnclut, grâce à la question précédente que $\boxed{F_Y(a) = 0}$.
- **d.** Comme $a \in \,]0\,;1]$, $\ln(a) > 0$ donc d'après la question **1.** de la **Partie A**, $F_X(-\ln(a)) = 1 - \mathrm{e}^{-(-\ln(a))} = 1 - \mathrm{e}^{\ln(a)} = 1 - a$. On déduit alors de la question **2.b.** que $F_Y(a) = 1 - (1 - a)$ i.e. $\boxed{F_Y(a) = a}$.

3. Supposons que $a \leqslant 0$. Comme $Y = \mathrm{e}^{-X} > 0$, $\{Y \leqslant a\}$ est un évènement impossible donc $\mathbf{P}(Y \leqslant a) = 0$ i.e. $\boxed{F_Y(a) = 0}$.

4. Sur les deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]1\,;+\infty[$, F_Y est constante donc, pour tout $x \in \,]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $F_Y'(x) = 0$.
Pour tout $x \in \,]0\,;1[$, $F_Y(x) = x$ donc $F_Y'(x) = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\},\ F_Y'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \,]0\,;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

On déduit de la question précédente que $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de Y et on conclut que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0\,;1])}$.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.
- **a.** Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f.
- **b.** Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f.
- **c.** Soit $v = (0, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.
- **a.** Vérifier que $f(v) = u$ et $f(w) = v$.
- **b.** Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w).
- **c.** Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w). Donner l'expression de P.
- **d.** Exprimer A en fonction de N, P et P^{-1}.

3.
- **a.** Calculer N^2 et N^3.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, N^n est la matrice nulle.
- **c.** Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, la valeur de A^n.

Solution.

1. **a.** Première méthode. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ x - z = 0 & L_2 \\ 2x - y - z = 0 & L_3 \end{cases}$$

associé à la matrice A. Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_3 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

Le dernier système est échelonné et contient 2 pivots donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

Seconde méthode. On sait que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Comme le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, c'est aussi la dimension de l'espace engendré par ses lignes. Or, ici, les deux premières lignes sont identiques et la troisième ligne est clairement non proportionnelle à la première donc les lignes de A engendre un espace de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2$ donc $\boxed{\dim(\ker(f)) = 1}$.

b. Comme $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 2-1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(u) = (0,0,0)$ donc $u \in \ker(f)$. Ainsi, u est un vecteur non nul de $\ker(f)$ donc, comme $\dim(\ker(f)) = 1$, on conclut que $\boxed{(u) \text{ est une base de } \ker(f)}$.

c. Considérons des réels a, b et c tels que $au+bv+cw = 0$. Alors, $(a, a+c, a-b) = (0,0,0)$ donc $a = 0$, $a + c = 0$ et $a - b = 0$. On en déduit que $a = 0$, $c = -a = 0$ et $b = a = 0$ donc $a = b = c = 0$. Ainsi, (u, v, w) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on conclut, par théorème, que $\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. a. Comme $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{f(v) = u}$ et, comme $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boxed{f(w) = v}$.

b. Comme $f(u) = (0,0,0)$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$, la matrice de f dans la base (u, v, w) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } (u, v, w) \text{ est } N}$.

c. Par définition,

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

d. D'après le formule de changement de bases, $N = P^{-1}AP$ donc $\boxed{A = PNP^{-1}}$.

3. a. Le calcul donne $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0_3}$.

b. Soit un entier $n \geqslant 3$. Alors, $N^n = N^3 N^{n-3} = 0_3 N^{n-3} = 0_3$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ N^3 = 0_3}$.

c. Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ par convention. Pour $n = 1$, $A^1 = A$. Pour $n = 2$, le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par propriété, pour tout entier naturel n, $A^n = PN^nP^{-1}$ donc, pour tout entier $n \geqslant 3$, $A^n = P0_3P^{-1} = 0_3$.

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{A^0 = I_3 \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geqslant 3, \quad A^n = 0_3}.$$

Exercice 3.

1. Étude d'une suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner la valeur de sa limite.

2. Étude d'une deuxième suite

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{2v_n}{1 + 2v_n}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2v_n} + 1$.

c. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

d. Déterminer un équivalent simple de $(v_n - \ell)$.

Solution.

1. a. $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 1 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 1$ soit $\boxed{u_1 = 3}$ et $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 1 = \dfrac{1}{2} \times 3 + 1$ soit $\boxed{u_2 = \dfrac{5}{2}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}a_n$$

donc (a_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, $a_0 = u_0 - 2 = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + a_n$ donc on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

d. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ donc, par somme, (u_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $v_n > 0$ ».

Initialisation. Comme $v_0 = \frac{1}{4} > 0$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $v_n > 0$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $v_{n+1} > 0$. Comme $v_n > 0$, $2v_n > 0$ et $1 + 2v_n > 0$ donc par quotient $v_{n+1} > 0$ i.e. $v_{n+1} > 0$ et ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n > 0}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{2v}{1+2v_n}} = \frac{1+2v_n}{2v_n} = \frac{1}{2v_n} + \frac{2v_n}{2v_n}$$

i.e. $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2v_n} + 1}$.

c. On remarque que $\frac{1}{v_0} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{v_n} + 1$ donc $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ a le même terme initial et vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n) donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{v_n} = u_n$ donc $v_n = \frac{1}{u_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2$, par quotient, (v_n) est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}}$.

d. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2^{n-1}}}$ donc

$$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2^{n-1}}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - \left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{2\left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)} = \frac{-\frac{1}{2^{n-1}}}{4 + \frac{1}{2^n}}.$$

Or, comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc, par quotient et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{2^n} = 4$ et ainsi $4 + \frac{1}{2^n} \sim 4$. On conclut que $v_n - \frac{1}{2} \sim \frac{-\frac{1}{2^{n-1}}}{4} = -\frac{1}{2^2 \times 2^{n-1}}$ i.e. $\boxed{v_n - \frac{1}{2} \sim -\frac{1}{2^{n+1}}}$.