TB2 **samedi 31 janvier 2026**

Devoir surveillé n°4

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à densité, suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On définit une variable aléatoire Y en posant :

$$Y = \exp(-X) = \mathrm{e}^{-X}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y.
Dans tout l'exercice, on note F_X la fonction de répartition de X et F_Y celle de Y.

Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

   b. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Partie B. — Dans cette partie, on se donne un nombre réel a.

1. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ d'inconnue x. On distinguera deux cas : celui où a est strictement positif et celui où a est négatif ou nul.
2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

   a. Montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a))$.

   b. Montrer que $F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))$.

   c. On suppose dans cette question que $a > 1$.
   Donner le signe de $-\ln(a)$ et en déduire la valeur de $F_Y(a)$.

   d. On suppose dans cette question que $a \in \,]0\,;1]$.
   Montrer que $F_Y(a) = a$.
3. Calculer $F_Y(a)$ pour $a \leqslant 0$.
4. Déduire des questions précédentes la loi de Y. On reconnaître une loi classique dont on donnera les paramètres éventuels.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f.
   b. Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f.
   c. Soit $v = (0, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. **a.** Vérifier que $f(v) = u$ et $f(w) = v$.
   b. Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w).
   c. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w). Donner l'expression de P.
   d. Exprimer A en fonction de N, P et P^{-1}.
3. **a.** Calculer N^2 et N^3.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, N^n est la matrice nulle.
   c. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, la valeur de A^n.

Exercice 3.

1. **Étude d'une suite auxiliaire**

   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   c. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
   d. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner la valeur de sa limite.
2. **Étude d'une deuxième suite**

   On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_{n+1} = \frac{2v_n}{1 + 2v_n}.$$

   a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2v_n} + 1$.
   c. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.
   d. Déterminer un équivalent simple de $(v_n - \ell)$.