TB2 **samedi 29 mars 2025**

Devoir surveillé n°4

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1 (Exercice d'analyse)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

A. Étude de f

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Construire le tableau de variation de f.
5. Justifier que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
6. Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

B. Résolution d'une équation

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, dans cette partie, l'équation (E_n) d'inconnue x :

$$f(x) = n.$$

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (qu'on ne cherchera pas ici à calculer). Préciser la valeur de u_0.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Calculer $f(\ln(n))$.
   b. En déduire que $u_n \geqslant \ln(n)$.
   c. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Solution.

A. Étude de f

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et, pour tout réel x,

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = -f(x)$$

donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$.

2. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$ donc, par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

Comme f est impaire, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$.

4. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout réel x donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection continue, on en déduit que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}}$.

6. $f(0) = \mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{0} = 0$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $\underline{f(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_- \text{ et } f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+}$.

B. Résolution d'une équation

1. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'entier n admet un unique antécédent u_n par f, ce qui revient à dire que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = n \text{ possède une unique solution } u_n \in \mathbb{R}}$.

De plus, on a vu que $f(0) = 0$ donc $\boxed{u_0 = 0}$.

2. **a.** $f(\ln(n)) = \mathrm{e}^{\ln(n)} - \mathrm{e}^{-\ln(n)} = n - \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{n})}$ soit $\boxed{f(\ln(n)) = n - \frac{1}{n}}$.

b. comme $\frac{1}{n} > 0$, $f(\ln(n)) \leqslant n$ i.e. $f(\ln(n)) \leqslant f(u_n)$ et donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\ln(n) \leqslant u_n}$.

c. Par propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 2 (Exercice d'algèbre)**.** Dans cet exercice, on considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé.

On rappelle que si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors on définit le produit scalaire $u \cdot v$ et la norme $\|u\|$ par :

$$u \cdot v = xx' + yy' \qquad \text{et} \qquad \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Calculer le produit $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.

2. Montrer, sans faire aucun calcul, que la matrice M est diagonalisable.

3. a. Résoudre l'équation $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Donner les valeurs propres de f.

4. On définit les vecteurs $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

a. Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Que remarque-t-on ?

b. Montrer que les deux vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux et calculer leur norme. Montrer aussi que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que la matrice représentative de f dans la base (e_1, e_2) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Calculer $u \cdot e_1$ et $u \cdot e_2$ et en déduire, en fonction de x et y, les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2).

Solution.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}^2}$ donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}}$.

2. La matrice M est une matrice symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

3. a. Pour tout réel λ,

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff (2-\lambda)^2 = 1 \iff 2-\lambda = 1 \text{ ou } 2-\lambda = -1 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{R} \text{ de l'équation } (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \text{ est } \{1\,;3\}}$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1.$$

Ainsi, $\det(M - \lambda I_2) = 0$ si et seulement si $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$ c'est-à-dire, d'après la question précédente, si et seulement si $\lambda \in \{1\,;3\}$.

Comme les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M - \lambda I_2) = 0$, on conclut que le spectre de f est $\mathrm{Sp}(f) = \{1\,;3\}$.

4. a. Étant donné que

$$M\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1\times\frac{1}{\sqrt{2}}+2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 3\times\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

on a $\boxed{f(e_1)=(3\times\frac{1}{\sqrt{2}},3\times\frac{1}{\sqrt{2}})}$.

De même,

$$M\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times\frac{1}{\sqrt{2}}-1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1\times\frac{1}{\sqrt{2}}-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

on a $\boxed{f(e_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})}$.

On remarque que $f(e_1)=3e_1$ et $f(e_2)=-e_2$ donc, comme ces vecteurs sont non nuls, e_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur 3 et e_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur 1.

b. Comme $e_1\cdot e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, $\boxed{e_1 \text{ et } e_2 \text{ sont orthogonaux}}$. De plus, $\|e_1\|=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ donc $\boxed{\|e_1\|=1}$ et $\|e_2\|=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ donc $\boxed{\|e_2\|=1}$.

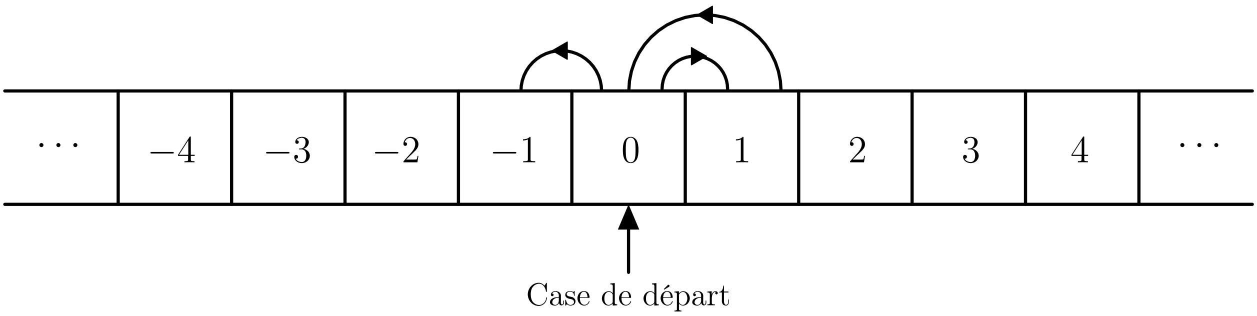
Ainsi, (e_1,e_2) est une famille orthonormée donc, par théorème, (e_1,e_2) est libre. Ainsi, (e_1,e_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donc $\boxed{(e_1,e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

c. Sachant que $f(e_1)=3e_1$ et $f(e_2)=e_2$, la matrice de f dans la base (e_1,e_2) est $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5. On a $u\cdot e_1=x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+y\times\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\boxed{u\cdot e_1=\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$ et $u\cdot e_2=x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+y\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ donc $\boxed{u\cdot e_2=\frac{x-y}{\sqrt{2}}}$.

Comme (e_1,e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, par propriété, les coordonnées de u dans la base (e_1,e_2) sont $(\frac{x+y}{\sqrt{2}},\frac{x-y}{\sqrt{2}})$.

Exercice 3 (Exercice de probabilité)**.** Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. Une puce se déplace sur une bande formée de cases numérotées ainsi :



À chaque seconde, la puce effectue l'une des deux actions suivantes :

— ou bien elle saute d'une case vers la droite (on dira que la puce « va à droite »),

— ou bien elle saute d'une case vers la gauche (on dira que la puce « va à gauche »).

Ces choix s'effectuent aléatoirement. On suppose que la probabilité que la puce aille à gauche est $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est $\frac{1}{2}$, et que les différents sauts de la puce sont indépendants.

Dans tout le problème, on étudie le comportement de la puce sur n secondes, de la première seconde à la n-ième seconde. Ainsi, la puce effectue n sauts en tout. De plus, on suppose que la puce, avant les n sauts, part de la case numérotée 0.

Par exemple, sur la figure ci-dessus, la puce a effectué $n = 3$ sauts : le premier saut est vers la droite, et les deux suivants sont vers la gauche.

On appelle D la variable aléatoire désignant le numéro de la case sur laquelle la puce se retrouve au bout des n sauts.

A. Étude de D dans des cas particuliers

1. Quel est le numéro de la case la plus à droite sur laquelle la puce puisse se retrouver ? On rappelle que la puce part de la case 0 et effectue n sauts.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a. Indiquer ce que signifient, en français, chacun des trois événements suivants :

$$(D = 0),\ (D = 1),\ (D = 2).$$

Donner leurs probabilités.

Remarque : l'un de ces trois événements a une probabilité nulle.

b. Donner aussi $P(D = -1)$ et $P(D = -2)$.

c. Calculer alors, dans le cas $n = 2$, l'espérance et la variance de D.

3. Lorsque $n = 3$, donner l'ensemble des valeurs prises par D et la loi de D.

B. Étude de D dans le cas général

On revient au cas général, n est donc un entier naturel non nul quelconque.

1. On appelle X le nombre de fois, parmi les n sauts effectués, où la puce va à droite. En reconnaissant une loi usuelle, donner la loi de X. (On ne demande pas d'en rappeler la formule).

2. On appelle Y le nombre de fois, parmi les n sauts, où la puce va à gauche. Exprimer Y en fonction de X.

3. Expliquer, de façon très claire, pourquoi on a la relation $D = 2X - n$. On rappelle que la puce part de la case numérotée 0.

4. Donner l'espérance et la variance de D en fonction de n. Interpréter la valeur trouvée pour l'espérance.

Solution.

A. Étude de D dans des cas particuliers

1. La puce se déplace le plus à droite possible si elle fait n sauts vers la droite et, dans ce cas, $\boxed{\text{elle se retrouve sur la case numéro } n}$.

2. a. L'évènement $(D = 0)$ signifie : « la puce se trouve sur la case n°0 après 2 sauts », l'évènement $(D = 1)$ signifie : « la puce se trouve sur la case n°1 après deux sauts » et l'évènement $(D = 2)$ signifie : « la puce se trouve sur la case n°2 après 2 sauts ».

Leurs probabilités sont $\boxed{\mathbf{P}(D = 0) = \dfrac{1}{2},\ \mathbf{P}(D = 1) = 0 \text{ et } \mathbf{P}(D = 2) = \dfrac{1}{4}}$.

b. De même, $\boxed{\mathbf{P}(D=-1)=0 \text{ et } \mathbf{P}(D=-2)=\frac{1}{4}}$.

c. Ainsi,

$$\mathbf{E}(D)=\sum_{k=-2}^{2} k\mathbf{P}(D=k)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(D)=0}$. Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(D^2)=\sum_{k=-2}^{2} k^2\mathbf{P}(D=k)=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=2$$

donc, par la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(D)=\mathbf{E}(D^2)-\mathbf{E}(D)^2=2-0^2$ i.e. $\boxed{\mathbf{V}(D)=2}$.

3. Si $n=3$ alors $D(\Omega)=\{-3,-1,1,3\}$ et la loi de D est donnée par le tableau suivant :

k	-3	-1	1	3
$\mathbf{P}(D=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B. Étude de D dans le cas général

1. Chaque saut est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ en prenant comme succès « la puce effectue un saut vers la droite ». Comme les sauts sont indépendants, la variable aléatoire $\boxed{X \text{ qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale } \mathscr{B}(n,\frac{1}{2})}$.

2. Il y a en tout n sauts donc $X+Y=n$ et ainsi $\boxed{Y=n-X}$.

3. La puce effectue X saut vers gauche et Y saut vers la droite donc $D=X\times 1+Y\times(-1)$. Or, on a vu que $Y=n-X$ donc $D=X+(n-X)\times(-1)=X-n+X$ i.e. $\boxed{D=2X-n}$.

4. Comme $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,\frac{1}{2})$, $\mathbf{E}(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$ et $\mathbf{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$.
Ainsi, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(D)=2\mathbf{E}(X)-n$ donc $\boxed{\mathbf{E}(D)=0}$. Ainsi, la valeur moyenne de la case finale est 0, ce qui traduit la symétrie de la situation par rapport à cette case.
Par homogénéité de la variance, $\mathbf{V}(D)=2^2\mathbf{V}(X)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(D)=n}$.