Devoir surveillé n°4

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1 (Exercice d'analyse)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

A. Étude de f

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Construire le tableau de variation de f.

5. Justifier que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

6. Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

B. Résolution d'une équation

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, dans cette partie, l'équation (E_n) d'inconnue x :

$$f(x) = n.$$

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (qu'on ne cherchera pas ici à calculer). Préciser la valeur de u_0.

2. Soit n un entier naturel non nul.

- **a.** Calculer $f(\ln(n))$.
- **b.** En déduire que $u_n \geqslant \ln(n)$.
- **c.** Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 (Exercice d'algèbre)**.** Dans cet exercice, on considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé.

On rappelle que si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors on définit le produit scalaire $u \cdot v$ et la norme $\|u\|$ par :

$$u \cdot v = xx' + yy' \qquad \text{et} \qquad \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Calculer le produit $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.

2. Montrer, sans faire aucun calcul, que la matrice M est diagonalisable.

3. **a.** Résoudre l'équation $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Donner les valeurs propres de f.

4. On définit les vecteurs $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

a. Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Que remarque-t-on ?

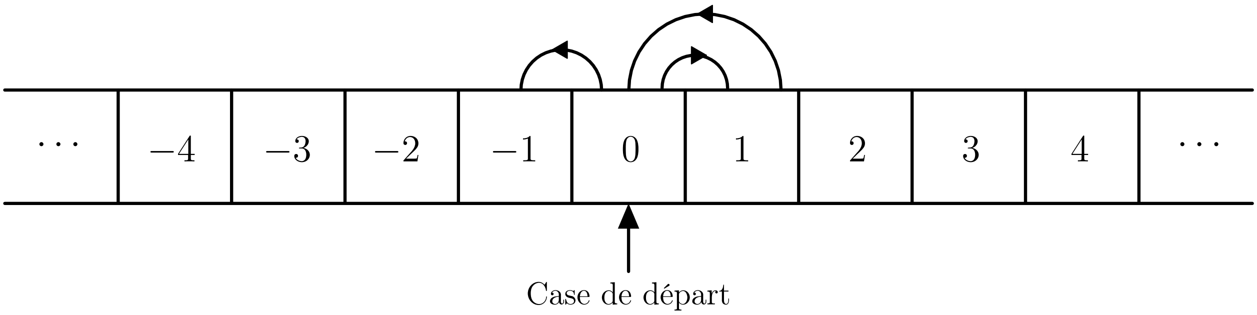
b. Montrer que les deux vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux et calculer leur norme. Montrer aussi que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que la matrice représentative de f dans la base (e_1, e_2) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Calculer $u \cdot e_1$ et $u \cdot e_2$ et en déduire, en fonction de x et y, les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2).

Exercice 3 (Exercice de probabilité)**.** Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. Une puce se déplace sur une bande formée de cases numérotées ainsi :



À chaque seconde, la puce effectue l'une des deux actions suivantes :

— ou bien elle saute d'une case vers la droite (on dira que la puce « va à droite »),

— ou bien elle saute d'une case vers la gauche (on dira que la puce « va à gauche »).

Ces choix s'effectuent aléatoirement. On suppose que la probabilité que la puce aille à gauche est $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est $\frac{1}{2}$, et que les différents sauts de la puce sont indépendants.

Dans tout le problème, on étudie le comportement de la puce sur n secondes, de la première seconde à la n-ième seconde. Ainsi, la puce effectue n sauts en tout. De plus, on suppose que la puce, avant les n sauts, part de la case numérotée 0.

Par exemple, sur la figure ci-dessus, la puce a effectué $n = 3$ sauts : le premier saut est vers la droite, et les deux suivants sont vers la gauche.

On appelle D la variable aléatoire désignant le numéro de la case sur laquelle la puce se retrouve au bout des n sauts.

A. Étude de D dans des cas particuliers

1. Quel est le numéro de la case la plus à droite sur laquelle la puce puisse se retrouver ? On rappelle que la puce part de la case 0 et effectue n sauts.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a. Indiquer ce que signifient, en français, chacun des trois évènements suivants :

$$(D = 0), \ (D = 1), \ (D = 2).$$

Donner leurs probabilités.

Remarque : l'un de ces trois évènements a une probabilité nulle.

b. Donner aussi $P(D = -1)$ et $P(D = -2)$.

c. Calculer alors, dans le cas $n = 2$, l'espérance et la variance de D.

3. Lorsque $n = 3$, donner l'ensemble des valeurs prises par D et la loi de D.

B. Étude de D dans le cas général

On revient au cas général, n est donc un entier naturel non nul quelconque.

1. On appelle X le nombre de fois, parmi les n sauts effectués, où la puce va à droite. En reconnaissant une loi usuelle, donner la loi de X. (On ne demande pas d'en rappeler la formule).

2. On appelle Y le nombre de fois, parmi les n sauts, où la puce va à gauche. Exprimer Y en fonction de X.

3. Expliquer, de façon très claire, pourquoi on a la relation $D = 2X - n$. On rappelle que la puce part de la case numérotée 0.

4. Donner l'espérance et la variance de D en fonction de n. Interpréter la valeur trouvée pour l'espérance.