# Corrigé du devoir surveillé n°4

**Exercice 1** (Algèbre – d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2019)**.**

Dans tout ce qui suit, on pourra identifier, selon la convention habituelle, un élément de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne qui lui est canoniquement associée.

On se donne les matrices $J$ et $P$ suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $I_3$ désignera la matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**1.** Montrer que la matrice $P$ est inversible et que son inverse vérifie :

$$P^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ est un nombre réel non nul que l'on précisera.

**2.** Montrer que 0 est valeur propre de la matrice $J$ ; on note $E_0$ le sous-espace propre associé.

**3.** Déterminer une base de $E_0$.

**4.** Montrer que $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de $J$. Déterminer la valeur propre associée.

**5.** Calculer le rang de $J - 3I_3$. En déduire la dimension du sous-espace propre $E_3$ ($E_3$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3).

**6.** Montrer que $J$ est diagonalisable : en particulier, donner une matrice $D$ diagonale telle que $PD = JP$.

**7.** Calculer aussi $P^{-1}J^nP$ pour tout entier naturel $n$ non nul (on attend le résultat sous la forme d'une matrice $3 \times 3$ dont on donnera les coefficients).

**8.** Grâce à ce qui précède, et sans effectuer de récurrence, prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $J^n = 3^{n-1}J$.

**Solution.**

**1.** 1$^{\text{ère}}$ méthode. Soit $a$, $b$ et $c$ des réels. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x + z = a & L_1 \\ -x + y + z = b & L_2 \\ -y + z = c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x + z = a & L_1 \\ y + 2z = b + a & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -y + z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = a & L_1 \\ y + 2z = b + a & L_2 \\ 3z = c + b + a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{a+b+c}{3} = a & L_1 \\ y + 2(\frac{a+b+c}{3}) = b + a \\ z = \frac{a+b+c}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2a-b-c}{3} \\ y = \frac{a+b-2c}{3} \\ z = \frac{a+b+c}{3} \end{cases}$$

On en déduit que $P$ est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ i.e.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

<u>2<sup></sup></u>

2$^{\text{nde}}$ méthode. Posons $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$$

donc $P \times \frac{1}{3}Q = I_3$ ce qui montre que $P$ est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$ i.e.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

**2.** 1$^{\text{ère}}$ méthode. Comme les trois colonnes de $J$ sont égales, l'espace engendré par ses trois colonnes est $\text{Im}(J) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, par le théorème du rang, $\dim(\ker(J)) = 3 - \dim(\text{Im}(J)) = 3 - 1 = 2$. Or, par définition, $E_0 = \ker(J)$ donc $\dim(E_0) = 2 > 0$ ce qui montre que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A}$.

2$^{\text{nde}}$ méthode. Soit $x$, $y$ et $z$ trois réels. Alors,

$$J\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff x + y + z = 0.$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul tel que $JX = 0$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J}$.

**3.** Ce qui précède assure que

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - y\right\} \\ &= \left\{(x, y, -x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E_0 = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))}$. $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $E_0$.

**4.** $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, comme $(1, 1, 1)$ n'est pas le vecteur nul, on conclut que $\boxed{(1, 1, 1) \text{ est un vecteur propre de } J \text{ associé à la valeur propre } 3}$.

**5.** Posons $K = J - 3I_3$. Ainsi, $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ donc

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x+y+z=0 & L_1 \\ x-2y+z=0 & L_2 \\ x+y-2z=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x-2y+z=0 & L_2 \\ -2x+y+z=0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-2z=0 & \\ -3y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y-3z=0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z & L_1 \\ -3y+3z=0 & L_2 \\ 0=0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Ainsi, le système a deux pivots dont le rang de $K$ est 2. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(E_3) = \dim(\ker(K)) = 3-2$ i.e. $\boxed{\dim(E_3) = 1}$.

**6.** On a $\dim(E_0) + \dim(E_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc, par théorème, $\boxed{J \text{ est diagonalisable}}$. On remarque que $1 + (-1) + 0 = 0$ et $0 + 1 + -1 = 0$ donc $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 0. De plus, on a vu que $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3 donc $PD = JP$ (ou, de façon équivalente, $D = P^{-1}JP$) avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**7.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, $P^{-1}J^nP = D^n$ donc, comme $D$ est diagonale,

$$\boxed{P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}.$$

**8.** On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$J^n = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{3^n}{3}J$$

donc, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ J^n = 3^{n-1}J}$.

**Exercice 2** (Probabilités – d'après le sujet du concours de l'Institut National d'Agronomie – voie TB – 1991)**.**

Dans tout cet exercice, $r$ et $\alpha$ sont des réels strictement positifs.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha r^\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

**1.** Montrer que $f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on note $X$ une variable aléatoire admettant $f$ comme densité.

**2.** On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$.
Montrer que, pour tout réel $x$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{r}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \geqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**3.** Démontrer que $X$ admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$ et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{\alpha r}{\alpha - 1}.$$

**4. a.** Démontrer que $X^2$ admet une espérance si et seulement si $\alpha > 2$ et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{\alpha r^2}{\alpha - 2}.$$

**b.** En déduire que $X$ admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$ et calculer, dans ce cas, $\mathbf{V}(X)$.

**5.** On considère la variable aléatoire $Y = \ln\left(\dfrac{X}{r}\right)$ et on note $F_Y$ sa fonction de répartition.

**a.** Démontrer que, pour tout réel $x$, $F_Y(x) = F_X(r\,\mathrm{e}^x)$ et déduire alors de la question **2.** que, pour tout réel $x$,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**b.** Calculer, pour tout $x \neq 0$, $F_Y'(x)$.

**c.** En déduire la loi de $Y$. On reconnaîtra une loi usuelle.

**Solution.**

**1.** La fonction $f$ est nulle sur $]-\infty\,;r[$. De plus, pour tout $t \in [r\,;+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\alpha r^\alpha}{t^{\alpha+1}}$ donc $f$ est continue et positive sur cet intervalle. On en déduit que $f$ est positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \geqslant r$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_r^x \frac{\alpha r^\alpha}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \alpha r^\alpha \int_r^x \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \alpha r^\alpha \left[-\frac{1}{\alpha t^\alpha}\right]_r^x = \alpha r^\alpha \left(-\frac{1}{\alpha x^\alpha} + \frac{1}{\alpha r^\alpha}\right) \\ &= -\frac{r^\alpha}{x^\alpha} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}$.

**2.** Pour tout réel $x$,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $f$ est nulle sur $]-\infty\,;r[$, si $x < r$ alors $F_X(x) = 0$. De plus, d'après le calcul précédent, si $x \geqslant r$ alors $F_X(x) = -\dfrac{r^\alpha}{x^\alpha} + 1 = 1 - \left(\dfrac{r}{x}\right)^\alpha$.
On conclut donc que, pour tout réel $x$,

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{r}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \geqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

**3.** Comme $f$ est nulle sur $]-\infty\,;r[$, la variable aléatoire $X$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_r^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or, pour tout $t \geqslant r$, $tf(t) = \dfrac{\alpha r^\alpha}{t^\alpha}$ donc, par le critère de Riemann, $\displaystyle\int_r^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \int_r^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \geqslant r$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_r^x tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_r^x \frac{\alpha r^\alpha}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \alpha r^\alpha \int_r^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \alpha r^\alpha \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_r^x \\ &= -\frac{\alpha r^\alpha}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + \frac{\alpha r^\alpha}{(\alpha-1)r^{\alpha-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\alpha r}{\alpha-1}\end{aligned}$$

car $\alpha - 1 > 0$. Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{\alpha r}{\alpha-1}}$.

**4. a.** Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $X^2$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_r^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or, pour tout $t \geqslant r$, $t^2 f(t) = \dfrac{\alpha r^\alpha}{t^\alpha}$ donc, par le critère de Riemann, $\displaystyle\int_r^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. De plus, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_r^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \geqslant r$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_r^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_r^x \frac{\alpha r^\alpha}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t = \alpha r^\alpha \int_r^x \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t = \alpha r^\alpha \left[-\frac{1}{\alpha-2}\frac{1}{t^{\alpha-2}}\right]_r^x \\ &= -\frac{\alpha r^\alpha}{(\alpha-2)x^{\alpha-2}} + \frac{\alpha r^\alpha}{(\alpha-2)r^{\alpha-2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\alpha r^2}{\alpha-2}\end{aligned}$$

car $\alpha - 2 > 0$. Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(X^2) = \dfrac{\alpha r^2}{\alpha-2}}$.

**b.** Par le formule de König-Huygens, on en déduit que $X$ admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 &= \frac{\alpha r^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha r}{\alpha-1}\right)^2 = \frac{\alpha(\alpha-1)^2 r^2 - \alpha^2(\alpha-2)r^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \\ &= \frac{((\alpha-1)^2 - \alpha(\alpha-2))\alpha r^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{(\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 2\alpha)\alpha r^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{V}(X) = \dfrac{\alpha r^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}}$.

**5. a.** Pour tout réel $x$, par croissance de la fonction exponentielle et par positivité de $r$,

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\ln\left(\frac{X}{r}\right) \leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{r} \leqslant \mathrm{e}^x\right) = \mathbf{P}(X \leqslant r\,\mathrm{e}^x)$$

i.e. $\boxed{F_Y(x) = F_X(r\,\mathrm{e}^x)}$.

Or, comme $r > 0$, $r\,\mathrm{e}^{x} \geqslant r$ si et seulement si $\mathrm{e}^{x} \geqslant 1$ i.e. $x \geqslant 0$. On en déduit donc que, pour tout réel $x < 0$, $F_Y(x) = 0$ et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$F_Y(x) = 1 - \left(\frac{r}{r\,\mathrm{e}^{x}}\right)^{\alpha} = 1 - \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{\alpha} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}.$$

Ainsi, pour tout réel $x$,

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

**b.** Pour tout réel $x < 0$, $F'_Y(x) = 0$ et, pour tout réel $x > 0$, $F'_Y(x) = -(-\alpha)\,\mathrm{e}^{-\alpha x} = \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$. Ainsi, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\boxed{F'_Y(x) = \begin{cases} \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}.$$

**c.** On en déduit qu'un densité de $Y$ est la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

On conclut que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)}$.

**Exercice 3** (Analyse – d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2007)**.**

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;+\infty[$, par $f(x) = \ln(1+x)$.
Déterminer les variations de $f$ ainsi que ses limites en $-1$ et en $+\infty$.

**2.** On considère la fonction $g$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
Étudier les variations de $g$ et en déduire le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in\, ]-1\,;+\infty[$.

**3.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

**b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** En déduire que $(u_n)$ converge puis déterminer sa limite.

**d.** Déterminer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Solution.**

**1.** Les fonctions $x \longmapsto 1+x$ et ln sont croissantes respectivement sur $]-1\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[$ donc, par composition, $\boxed{f \text{ est croissante sur } ]-1\,;+\infty[}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} 1+x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} 1+x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$.

**2.** La fonction $g$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > -1$,

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

Or, pour tout réel $x > -1$, $1 + x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-x$. Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \in\, ]-1\,;0]$ et $g'(x) \leqslant 0$ pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$. On en déduit que $\boxed{g \text{ est croissante sur } ]-1\,;0] \text{ et décroissante sur } [0\,;+\infty[}$.

En particulier, $g$ atteint son maximum en $x = 0$ et ce maximum vaut $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ donc, pour tout réel $x > -1$, $g(x) \leqslant 0$ i.e. $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) - x \leqslant 0}$.

**3. a.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n$ : « $u_n$ est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

Par définition, $u_0 = 1$ donc $P_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n$ est vraie. Alors, $u_n$ est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Dès lors, $1 + u_n > 0$ donc $\ln(1 + u_n)$ existe ce qui assure que $u_{n+1}$ est bien défini. De plus, comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 2$ donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1) \leqslant \ln(1+u_n) \leqslant \ln(2)$ i.e. $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \ln(2)$. Comme $\ln(2) < \ln(e) = 1$, on conclut que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc $P_{n+1}$ est vraie.

Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n > -1$ donc, par la question **2.**, $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

**c.** La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geqslant 0}$.

Comme $f$ est continue (car dérivable) sur $]-1\,;+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$. Or, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(\ell) = \ell$ i.e. $g(\ell) = 0$. Or, comme la dérivée de $g$ ne s'annule qu'en $x = 0$, $g$ est strictement monotone sur chacun des deux intervalles $]-1\,;0]$ et $[0\,;+\infty[$. On en déduit que $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.

**d.** On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit, par composition, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1}$.