Devoir surveillé n°3

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x-z, y+z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer $\ker(f)$.

3. Déterminer le rang de f.

4. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer f^{-1}.

Solution.

1. Soit $u = (x_1, y_1, z_2)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lambda u + v = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

donc

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2), \lambda x_1 + x_2 - (\lambda z_1 + z_2), \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2) \\ &= (\lambda(x_1 - y_1) + x_2 - y_2, \lambda(x_1 - z_1) + x_2 - z_2, \lambda(y_1 + z_1) + y_2 + z_2) \\ &= \lambda(x_1 - y_1, x_1 - z_1, y_1 + z_1) + (x_2 - y_2, x_2 - z_2, y_2 + z_2) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(f) &\iff (x-y, x-z, y+z) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x \\ z = x \\ x + x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\ker(f) = \{(0,0,0)\}}$.

3. D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f))$. Or, comme $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, $\dim(\ker(f)) = 0$ donc $\boxed{\text{rg}(f) = 3}$.

4. Comme $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^3$ donc, par propriété, $\boxed{f \text{ est un automorphisme}}$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x - y = a & L_1 \\ x - z = b & L_2 \\ y + z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = a & L_1 \\ y - z = b - a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = a & L_1 \\ y - z = b - a & L_2 \\ 2z = c - (b - a) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = a \\ y - \frac{a-b+c}{2} = b - a \\ z = \frac{a-b+c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + y \\ y = \frac{a-b+c}{2} + \frac{2b-2a}{2} \\ z = \frac{a-b+c}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a + \frac{-a+b+c}{2} \\ y = \frac{-a+b+c}{2} \\ z = \frac{a-b+c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b+c}{2} \\ y = \frac{-a+b+c}{2} \\ z = \frac{a-b+c}{2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{x+y+z}{2}, \frac{-x+y+z}{2}, \frac{x-y+z}{2}\right) \end{array}}.$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{e}^{\,t} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $u_0 = e - 1$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\forall t \in [0\,;1]\,, \quad (1-t)^n \leqslant (1-t)^n \, \mathrm{e}^{\,t} \leqslant (1-t)^n e$$

et en déduire que

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

a. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!(e - S_n)$.

c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \dfrac{1}{n \times n!}$.

e. Conclure que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Solution.

1. Par définition,

$$u_0 = \int_0^1 (1-t)^0 e^t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0$$

donc $\boxed{u_0 = e - 1}$.

2. **a.** Soit $t \in [0\,;1]$. Alors, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^1$ i.e. $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant e$. Dès lors, en multipliant par $(1-t)^n \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{(1-t)^n \leqslant (1-t)^n\,\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)e}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n e \,\mathrm{d}t$$

i.e. par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant e \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

donc on conclut que

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}}.$$

b. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions

$$u : t \longmapsto (1-t)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad v!t \longmapsto \mathrm{e}^t$$

qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ avec

$$u' : t \longmapsto -(n+1)(1-t)^n \qquad \text{et} \qquad v' : t \longmapsto \mathrm{e}^t.$$

Ainsi, en intégrant par parties,

$$u_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n\,\mathrm{e}^t \mathrm{d}t = 0 - \mathrm{e}^0 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t$$

donc $\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n - 1}$.

4. a. Par théorème, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = e}$. De plus, comme $\lim_{n\to+\infty} n \times n! = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n \times n!} = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = e}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n!(e - S_n)$ ».
Initialisation. D'une part, $u_0 = e - 1$ et, d'autre part, $S_0 = \frac{1}{0!} = 1$ donc $0!(e - S_0) = 1 \times (e-1) = e - 1$. Ainsi, $u_0 = 0!(e - S_0)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, grâce à la question **3.**,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 = (n+1) \times n!(e - S_n) - 1 = (n+1)!(e - S_n) - 1 \\ &= (n+1)!\left[e - S_n - \frac{1}{(n+1)!}\right] = (n+1)!(e - S_{n+1}) \end{aligned}$$

car

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = S_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n!(e - S_n)}.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu précédemment que $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)!}$ donc, comme $\frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$, $S_{n+1} \geqslant S_n$ et ainsi $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(S_n + \frac{1}{n \times n!}\right) \\ &= S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n^2 + n + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme (S_n) est croissante et converge vers e, $S_{n+1} \leqslant e$ i.e. $S_n + \frac{1}{(n+1)!} \leqslant e$ soit encore $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n$.

De même, comme (T_n) est décroissante et converge e, $e \leqslant T_n$ i.e. $e \leqslant S_n + \frac{1}{n \times n!}$ soit encore $e - S_n \leqslant \frac{1}{n \times n!}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \frac{1}{n \times n!}}.$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n! > 0$, on déduit de la question précédente que

$$\frac{n!}{(n+1)!} \leqslant n!(e - S_n) \leqslant \frac{n!}{n \times n!}$$

i.e., par le résultat de la question **4.b.** et en utilisant le fait que $(n+1)! = n! \times (n+1)$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en multipliant par $n > 0$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant nu_n \leqslant 1$ donc, comme $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, par le théorème d'encadrement, $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Autrement dit, $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}}$.

Exercice 3. Soit $p \in \,]0\,;1[$. On considère une pièce de monnaie ayant une probabilité p de tomber sur PILE.

1. On lance successivement deux fois la pièce et on note à chaque fois le résultat (PILE ou FACE) obtenu.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu PILE au cours de ces deux lancers. Reconnaître la loi de X et justifier votre réponse.

b. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X = k)$ pour toutes les valeurs k prises par X. Montrer en particulier que $\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1-p)$.

2. Une *manche* consiste à lancer deux fois successivement la pièce et on nomme « succès » le fait d'obtenir deux résultats différents et « échec » celui d'obtenir deux résultats identiques.
Quel est la probabilité de « succès » de cette expérience de Bernoulli ?

3. On répète indéfiniment des manches ci-dessus. Chaque manche est supposée indépendante des autres. On note N la variable aléatoire égale au nombre de manches effectuées jusqu'à l'obtention d'un premier succès.

a. Dans le cas où les tirages successifs sont PP, FF, PP, PP, FF, PF, FP, PP, ... (on a abrégé PILE en P et FACE en F), donner la valeur de N.

b. Reconnaître la loi de N et donner l'expression de $\mathbf{P}(N = k)$ pour toutes les valeurs k prisent par N.

c. Donner, si elles existent, l'espérance et la variance de N.

4. Alice et Bob jouent à l'aide de la pièce précédente. Ils réalisent une manche comme ci-dessus puis une deuxième si la première manche est constituée de deux résultats identiques. Alice gagne si une des deux manches a donné PF et Bob gagne si une des deux manches a donné FP. Dans les autres cas, la partie est nulle.
Par exemple, si on lance la pièce et qu'on obtient la séquence suivante : FF, PF alors Alice est gagnante.

a. Calculer, en fonction de p, la probabilité qu'Alice gagne lors de la première manche.

b. Montrer que la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche (en particulier, aucun de joueur ne remporte la première manche) est égale à :

$$p(1-p)(p^2 + (1-p)^2).$$

c. Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de p, le jeu est équitable.

5. Dans cette question, on suppose que $p = \frac{1}{2}$ et on lance successivement trois fois la pièce. On note S la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours des trois lancers. On note également T la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient aucun PILE lors des trois lancers et égale au rang d'apparition du premier PILE obtenu sinon.
Par exemple, si le résultat des trois lancers est F, P, F alors $S = 1$ et $T = 2$.

a. Reconnaître la loi de S. Donner son espérance.

b. Quelles sont les valeurs possibles pour T ?

c. Calculer $\mathbf{P}(S = 3)$, $\mathbf{P}(T = 0)$ et $\mathbf{P}((S = 3) \cap (T = 0))$. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Solution.

1. a. Les deux lancers successifs constitue un schéma de Bernoulli en prenant comme succès S : « Obtenir PILE ». Ainsi, comme X compte le nombre de succès, $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(2, p)}$.

b. On en déduit que :

- $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^{2-0} = 1 \times 1 \times (1-p)^2$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X = 0) = (1-p)^2}$.
- $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^{2-1} = 2 \times p \times (1-p)$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1-p)}$.
- $\mathbf{P}(X = 2) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^{2-2} = 1 \times p^2 \times (1-p)^0$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X = 2) = p^2}$.

2. La probabilité de « succès » est la probabilité d'obtenir 1 PILE et 1 FACE donc cette probabilité est $\boxed{\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1-p)}$.

3. a. Dans le cas évoqué, N vaut 6.

b. La variable aléatoire N donne le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli infini donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathscr{G}(2p(1-p))}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ P(N = k) = 2(1-p)(1 - 2p(1-p))^{k-1}}$.

c. Par propriété, on a donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{2p(1-p)} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \dfrac{1 - 2p(1-p)}{(2p(1-p))^2}}$.

4. a. Alice gagne lors de la première manche si et seulement si on obtient PF lors de la première manche. Par indépendance des lancers, $\boxed{\text{cette probabilité est donc } p(1-p)}$.

b. Notons A l'évènement « Obtenir deux résultats identiques lors de la première manche » et B l'évènement « Alice gagne lors de la second manche ». D'une part, A est réalisé si et seulement si on obtient PP ou FF lors de la première manche donc

$$\mathbf{P}(A) = \mathrm{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 0) = p^2 + (1-p)^2.$$

De plus, $\mathbf{P}(B \mid A)$ est la probabilité d'obtenir PF lors de la seconde manche, sachant qu'il y a une seconde manche, donc $\mathbf{P}(B \mid A) = p(1-p)$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = (p^2 + (1-p)^2) \times p(1-p)$$

donc $\boxed{\text{la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde partie est } p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)}$.

c. L'évènement « Alice gagne la partie » est la réunion disjointe des évènements « Alice gagne lors de la première manche » et « Alice gagne lors de la seconde manche » donc la probabilité qu'Alice gagne est

$$p(1-p) + p(1-p)(p^2 + (1-p)^2) = p(1-p)\left[1 + p^2 + (1-p)^2\right].$$

Le même raisonnement s'applique à Bob en échangeant le rôle de PILE et FACE donc la probabilité que Bob gagne la partie est

$$(1-p)p\left[1+(1-p)^2+p^2\right].$$

Ainsi, Alice et Bob ont la même probabilité de gagner la partie donc on conclut que, $\boxed{\text{quelle que soit la valeur de } p\text{, le jeu est équitable}}$.

5. a. Comme dans la question **1.a.**, $\boxed{S \hookrightarrow \mathscr{B}(3, \frac{1}{2}) \text{ et donc } \mathbf{E}(S) = \frac{3}{2}}$.

b. Par définition, $T(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

c. Par définition, $\mathbf{P}(S=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3} = 1 \times \frac{1}{2^3} \times 1$ donc $\boxed{\mathbf{P}(S=3) = \frac{1}{8}}$.

L'évènement $(T=0)$ est l'évènement « n'obtenir que des FACE » donc

$$\mathbf{P}(T=0) = \mathbf{P}(T=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(T=0) = \frac{1}{8}}$.

Enfin $(S=3)\cap(T=0) = \varnothing$ car si, $S=3$, on a obtenu P, P, P donc $T=1$. Dès lors, $\boxed{\mathbf{P}((S=3)\cap(T=0)) = 0}$.

Ainsi, $\mathbf{P}((S=3)\cap(T=0)) \neq \mathbf{P}(S=3)\mathbf{P}(T=0)$ donc $\boxed{S \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes}}$.