Devoir surveillé n°3

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x-z, y+z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Déterminer le rang de f.
4. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer f^{-1}.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $u_0 = e - 1$.
2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\forall t \in [0\,;1]\,, \quad (1-t)^n \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n e$$

et en déduire que

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
a. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!(e - S_n)$.
c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \dfrac{1}{n \times n!}$.
e. Conclure que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3. Soit $p \in \,]0\,;1[$. On considère une pièce de monnaie ayant une probabilité p de tomber sur PILE.

1. On lance successivement deux fois la pièce et on note à chaque fois le résultat (PILE ou FACE) obtenu.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu PILE au cours de ces deux lancers. Reconnaître la loi de X et justifier votre réponse.

b. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X = k)$ pour toutes les valeurs k prises par X. Montrer en particulier que $\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1 - p)$.

2. Une *manche* consiste à lancer deux fois successivement la pièce et on nomme « succès » le fait d'obtenir deux résultats différents et « échec » celui d'obtenir deux résultats identiques.
Quelle est la probabilité de « succès » de cette expérience de Bernoulli ?

3. On répète indéfiniment des manches ci-dessus. Chaque manche est supposée indépendante des autres. On note N la variable aléatoire égale au nombre de manches effectuées jusqu'à l'obtention d'un premier succès.

a. Dans le cas où les tirages successifs sont PP, FF, PP, PP, FF, PF, FP, PP, ... (on a abrégé PILE en P et FACE en F), donner la valeur de N.

b. Reconnaître la loi de N et donner l'expression de $\mathbf{P}(N = k)$ pour toutes les valeurs k prises par N.

c. Donner, si elles existent, l'espérance et la variance de N.

4. Alice et Bob jouent à l'aide de la pièce précédente. Ils réalisent une manche comme ci-dessus puis une deuxième si la première manche est constituée de deux résultats identiques. Alice gagne si une des deux manches a donné PF et Bob gagne si une des deux manches a donné FP. Dans les autres cas, la partie est nulle.
Par exemple, si on lance la pièce et qu'on obtient la séquence suivante : FF, PF alors Alice est gagnante.

a. Calculer, en fonction de p, la probabilité qu'Alice gagne lors de la première manche.

b. Montrer que la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche (en particulier, aucun de joueur ne remporte la première manche) est égale à :

$$p(1 - p)(p^2 + (1 - p)^2).$$

c. Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de p, le jeu est équitable.

5. Dans cette question, on suppose que $p = \frac{1}{2}$ et on lance successivement trois fois la pièce. On note S la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours des trois lancers. On note également T la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient aucun PILE lors des trois lancers et égale au rang d'apparition du premier PILE obtenu sinon.
Par exemple, si le résultat des trois lancers est F, P, F alors $S = 1$ et $T = 2$.

a. Reconnaître la loi de S. Donner son espérance.

b. Quelles sont les valeurs possibles pour T ?

c. Calculer $\mathbf{P}(S = 3)$, $\mathbf{P}(T = 0)$ et $\mathbf{P}((S = 3) \cap (T = 0))$. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?