Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1 (Algèbre - d'après le concours de l'Institut National d'Agronomie - voie TB - 1990)**.**
On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P+(1-X)P' \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer le noyau de f et en donner une base.

3. Déduire de la question précédente la dimension de l'image de f puis déterminer une base de cet espace.

Solution.

1. Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)+(1-X)(\lambda P+Q)' = \lambda P+Q+(1-X)(\lambda P'+Q') \\ &= \lambda(P+(1-X)P')+(Q+(1-X)Q') = \lambda f(P)+f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors, il existe des réels a, b, c et d tels que $P = aX^3+bX^2+cX+d$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff aX^3+bX^2+cX+d+(1-X)(3aX^2+2bX+c) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff aX^3+bX^2+cX+d+3aX^2+2bX+c-3aX^3-2bX^2-cX = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff -2aX^3+(-b+3a)X^2+2bX+d+c = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \end{aligned}$$

Comme la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est libre, on en déduit que

$$P \in \ker(f) \begin{cases} -2a = 0 \\ -b+2a = 0 \\ 2b = 0 \\ d+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = -c \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\ker(f) = \{cX-c \mid c \in \mathbb{R}\}}$. On remarque que $\ker(f) = \{c(X-1) \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X-1)$ et $X-1 \neq 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ donc $\boxed{\{X-1\} \text{ est une base de } \ker(f)}$.

3. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 1$ donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\ker(f)) = 4-1$$

i.e. $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3}$.

Par propriété, la famille $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or, $f(1) = f(X) = 1$, $f(X^2) = X^2+(1-X)(2X) = -X^2+2X$ et $f(X^3) = X^3+(1-X)(3X^2) = -2X^3+3X^2$ donc $(1, -X^2+2X, -2X^3+3X^2)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle est de cardinal $3 = \dim(\mathrm{Im}(f))$, on conclut que $\boxed{(1, -X^2+2X, -2X^3+3X^2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$.

Exercice 2 (Analyse - d'après le concours de l'Institut National d'Agronomie - voie TB - 1991).
On considère l'application

$$g: \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}$$

1. En utilisant un équivalent, montrer que g est continue en 0.

2. a. Déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

b. En déduire que g est dérivable en 0.

c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de g au point d'abscisse 0 ainsi que les positions de $\mathscr{C}_f$ et T au voisinage de ce point.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que, pour tout $t \in [0\,;x]$, $\dfrac{1}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{1+x}$ et en déduire, en intégrant par rapport à t, que $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{x+1}$.

b. Justifier que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer, pour tout $x>0$, $g'(x)$.

c. En déduire les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

Solution.

1. $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ donc, par quotient, $g(x) \sim_{x\to 0} \dfrac{x}{x} \sim_{x\to 0} 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ i.e. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$ donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$.

2. a. Au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\boxed{g(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)}$.

b. On en déduit que, pour tout $x>0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - 1}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

c. On déduit du développement limité de g qu'une équation de T est $\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x + 1}$ que, de plus, au voisinage de 0, le signe de $g(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)$ est le signe de $\dfrac{x^2}{3}$ i.e. est positif donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } T \text{ au voisinage du point d'abscisse } 0}$.

3. a. Pour tout $t \in [0\,;x]$, $0 \leqslant t \leqslant x$ donc $1 \leqslant 1+t \leqslant 1+x$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{1+x}$. Comme $x \geqslant 0$, on en déduit, par croissance de l'intégrale, que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \geqslant \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dt$ i.e. $[\ln(1+t)]_0^x \geqslant \dfrac{1}{1+x}(x-0)$ c'est-à-dire, comme $\ln(1)=0$, $\boxed{\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{1+x}}$.

b.
La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables donc g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel $x>0$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x) \times 1}{x^2} \text{ i.e. } \boxed{g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}.$$

D'après le résultat de la question **a.**, pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leqslant 0$ donc, comme $x^2 > 0$, on conclut que, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) \leqslant 0$.

Ceci est également vrai pour $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$ donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) \leqslant 0$ donc $\boxed{g \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty[}$.

Exercice 3 (Probabilités - d'après le concours Agro-Véto voie A - TB - 2022)**.** On se donne cinq variables aléatoires deux à deux indépendantes X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 qui suivent chacune une loi de Poisson de même paramètre $\lambda > 0$.

Première partie : loi d'une somme de deux variables aléatoires

On pose $Y = X_1 + X_2$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\mathbf{P}(X_1 = k)$.

2. Rappeler les valeurs de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{V}(X_1)$ et en déduire $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

3. Soit k un entier naturel. Montrer que :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)).$$

4. Soit k un entier naturel et j un entier naturel inférieur ou égal à k. Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)$. On détaillera les calculs en justifiant.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \lambda^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!}.$$

6. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout entier naturel k,

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} = 2^k.$$

7. En déduire la loi de Y ; on reconnaîtra une loi classique dont on précisera bien le (ou les) paramètre(s).

Seconde partie : somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$. On suppose que, pour tout entier i compris entre 1 et 5, les variables aléatoires N et X_i sont indépendantes. On pose $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.

On attire l'attention des candidats sur le fait que la variable aléatoire T est définie comme la somme d'un nombre *aléatoire* de variables aléatoires. À ce stade, on ne peut donc pas calculer $E(T)$ en invoquant directement la linéarité de l'espérance.

1. Rappeler la formule donnant la loi de la variable aléatoire N.

2. Rappeler la valeur de l'espérance de N.

3. Donner la probabilité de l'évènement $(N \geqslant i)$ pour chaque entier i compris entre 1 et 5.

4. Pour tout entier i compris entre 1 et 5, on définit U_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $N \geqslant i$, et qui vaut 0 sinon. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U_i.
5. Calculer, pour tout entier i compris entre 1 et 5, $E(U_i)$ en fonction de i.
6. Prouver l'égalité :
$$T = \sum_{i=1}^{5} U_i X_i.$$
7. Calculer $E(U_i X_i)$ pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$. On justifiera.
8. Donner alors la valeur de $E(T)$.

Solution.

Première partie

1. Par définition, $\boxed{\mathbf{P}(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$.
2. Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2)$ soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = 2\lambda}$. De plus, comme X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes, $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(Y) = 2\lambda}$.
3. La famille $(X_1 = j)_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,
$$P(Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X_1 = j) \cap (Y = k)).$$
Or, pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}(X_1 = j) \cap (Y = k) &= (X_1 = j) \cap (X_1 + X_2 = k) \\ &= (X_1 = j) \cap (j + X_2 = k) \\ &= (X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)\end{aligned}$$
donc
$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)).$$
De plus, si $j > k$ alors $k - j < 0$ donc, comme X_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_2 = k - j) = \varnothing$ donc $(X_1 = j) \cap (X_2 = k - j) = \varnothing$ et ainsi $\mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)) = 0$. On conclut donc que
$$\boxed{\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j))}.$$
4. Comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes,
$$\mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)) = \mathbf{P}(X_1 = j)\mathbf{P}(X_2 = k - j)$$
et, comme X_1 et X_2 suivent une loi de Poisson de paramètre λ,
$$\mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!} = \mathrm{e}^{-\lambda-\lambda}\frac{\lambda^{j+k-j}}{j!(k-j)!}$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)) = \mathrm{e}^{-2\lambda}\frac{\lambda^k}{j!(k-j)!}}.$$

5. On déduit des deux questions précédentes que

$$\mathbf{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{k}\mathbf{P}((X_1=j)\cap(X_2=k-j))=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{e}^{-2\lambda}\frac{\lambda^k}{j!(k-j)!}$$

donc, par linéarité de la somme, $\boxed{\mathbf{P}(Y=k)=\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}}$.

6. En reconnaissant un coefficient binomial puis un binôme de Newton,

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}1^j1^{k-j}=(1+1)^k$$

donc

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}=2^k}.$$

7. Soit $k\in\mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que $k!\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}=2^k$ donc $\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}=\frac{2^k}{k!}$. Ainsi, d'après la question **3.**,

$$\mathbf{P}(Y=k)=\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^k\times\frac{2^k}{k!}=\mathrm{e}^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^k}{k!}$$

donc $\boxed{Y \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } 2\lambda}$.

Seconde partie

1. Par définition, $\boxed{\text{pour tout } j\in[\![1,5]\!],\ \mathbf{P}(N=j)=\frac{1}{5}}$.

2. Par propriété, $\boxed{\mathbf{E}(N)=\frac{5+1}{2}=3}$.

3. Soit $i\in[\![1,5]\!]$.

$$\mathbf{P}(N\geqslant i)=\mathbf{P}(N=i)+\mathbf{P}(N=i+1)+\cdots+\mathbf{P}(N=5)=(5-i+1)\times\frac{1}{5}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(N\geqslant i)=\frac{6-i}{5}}$.

4. Soit $i\in[\![1,5]\!]$. Par définition, $\boxed{U_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p=\frac{6-i}{5}}$.

5. On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(U_i)=p=\frac{6-i}{5}}$.

6. Soit $\omega\in\Omega$. Posons $k=N(\omega)$. Alors, d'une part,

$$T(\omega)=\sum_{i=1}^{k}X_i(\omega)$$

et, d'autre part,

$$\left(\sum_{i=1}^{5} U_i X_i\right)(\omega) = \sum_{i=1}^{5} U_i(\omega) X_i(\omega)$$

Or, par définition, pour tout entier i compris entre 1 et 5, $U_i(\omega) = 1$ si $N(\omega) \geqslant i$ c'est-à-dire si $k \geqslant i$ et $U_i(\omega) = 0$ si $i > k$. Ainsi,

$$\left(\sum_{i=1}^{5} U_i X_i\right)(\omega) = \sum_{i=1}^{k} 1 \times X_i(\omega) + \sum_{i=k+1}^{5} 0 \times X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{k} 1 \times X_i(\omega) = T(\omega).$$

Ainsi, on a bien $\boxed{T = \sum_{i=1}^{5} U_i X_i}$.

7. Soit $i \in [\![1, 5]\!]$. Montons que U_i et X_i sont indépendantes. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, comme N et U_i sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((U_i = 0) \cap (X_i = k)) &= \mathbf{P}((N < i) \cap (X_i = k)) \\ &= \mathbf{P}(N < i)\mathbf{P}(X_i = k) \\ &= \mathbf{P}(U_i = 0)\mathbf{P}(X_i = k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((U_i = 1) \cap (X_i = k)) &= \mathbf{P}((N \geqslant i) \cap (X_i = k)) \\ &= \mathbf{P}(N \geqslant i)\mathbf{P}(X_i = k) \\ &= \mathbf{P}(U_i = 1)\mathbf{P}(X_i = k) \end{aligned}$$

donc U_i et X_i sont indépendantes.

Dès lors, $\boxed{\mathbf{E}(U_i X_i) = \mathbf{E}(U_i)\mathbf{E}(X_i) = \frac{6-i}{5}\lambda}$.

8. On conclut que

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{5} \frac{6-i}{5}\lambda = \frac{\lambda}{5}\sum_{i=1}^{5}(6-i) = \frac{\lambda}{5}\sum_{j=1}^{5} j = \frac{\lambda}{5}\frac{5(5+1)}{2} \text{ soit } \boxed{\mathbf{E}(T) = 3\lambda}.$$

Remarque. On peut remarquer que $\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$. Ceci n'est pas un hasard mais un cas particulier d'une propriété appelée formule de Wald qui assure que si (X_i) est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi et si N est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ et indépendante de X_i pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1).$$