TB2 **samedi 16 décembre 2023**

Devoir surveillé n°3

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdit.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1 (Algèbre - d'après le concours de l'Institut National d'Agronomie - voie TB - 1990)**.**
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P + (1-X)P' \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer le noyau de f et en donner une base.

3. Déduire de la question précédente la dimension de l'image de f puis déterminer une base de cet espace.

Exercice 2 (Analyse - d'après le concours de l'Institut National d'Agronomie - voie TB - 1991)**.**
On considère l'application

$$g : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. En utilisant un équivalent, montrer que g est continue en 0.

2. **a.** Déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

b. En déduire que g est dérivable en 0.

c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de g au point d'abscisse 0 ainsi que les positions de $\mathscr{C}_f$ et T au voisinage de ce point.

3. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que, pour tout $t \in [0\,;x]$, $\dfrac{1}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{1+x}$ et en déduire, en intégrant par rapport à t, que $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{x+1}$.

b. Justifier que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer, pour tout $x > 0$, $g'(x)$.

c. En déduire les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 3 (Probabilités - d'après le concours Agro-Véto voie A - TB - 2022)**.** On se donne cinq variables aléatoires deux à deux indépendantes X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 qui suivent chacune une loi de Poisson de même paramètre $\lambda > 0$.

Première partie : loi d'une somme de deux variables aléatoires

On pose $Y = X_1 + X_2$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\mathbf{P}(X_1 = k)$.

2. Rappeler les valeurs de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{V}(X_1)$ et en déduire $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

3. Soit k un entier naturel. Montrer que :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}((X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)).$$

4. Soit k un entier naturel et j un entier naturel inférieur ou égal à k. Calculer la probabilité de l'évènement $(X_1 = j) \cap (X_2 = k - j)$. On détaillera les calculs en justifiant.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \lambda^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!}.$$

6. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout entier naturel k,

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} = 2^k.$$

7. En déduire la loi de Y ; on reconnaîtra une loi classique dont on précisera bien le (ou les) paramètre(s).

Seconde partie : somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$. On suppose que, pour tout entier i compris entre 1 et 5, les variables aléatoires N et X_i sont indépendantes. On pose $T = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

On attire l'attention des candidats sur le fait que la variable aléatoire T est définie comme la somme d'un nombre *aléatoire* de variables aléatoires. À ce stade, on ne peut donc pas calculer $E(T)$ en invoquant directement la linéarité de l'espérance.

1. Rappeler la formule donnant la loi de la variable aléatoire N.

2. Rappeler la valeur de l'espérance de N.

3. Donner la probabilité de l'évènement $(N \geqslant i)$ pour chaque entier i compris entre 1 et 5.

4. Pour tout entier i compris entre 1 et 5, on définit U_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $N \geqslant i$, et qui vaut 0 sinon. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U_i.

5. Calculer, pour tout entier i compris entre 1 et 5, $\mathbf{E}(U_i)$ en fonction de i.

6. Prouver l'égalité :

$$T = \sum_{i=1}^{5} U_i X_i.$$

7. Calculer $\mathbf{E}(U_i X_i)$ pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$. On justifiera.

8. Donner alors la valeur de $\mathbf{E}(T)$.