Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.

Exercice 1. Déterminer, en argumentant, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2}$ **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$

Solution.

a) Par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0}$.

b) Par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0}$.

c) Par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = +\infty}$.

e) Comme $\dfrac{x^3+2x-1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x$ donc on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x+1}{x^2} = +\infty}$.

f) D'une part, par continuité des fonctions polynômes en 0, $\lim\limits_{x\to0} x^3+2x-1 = -1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2} = -\infty}$.

g) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc, en divisant par $x^2+1>0$, $\dfrac{-1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$. Or, $\lim\limits_{x\to+-\infty} \dfrac{-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1} = 0}$.

h) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car, pour tout réel x, $x^2+1\neq0$) et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1} = \dfrac{\sin(0)}{0^2+1} = 0}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de f sur I. On ne demande pas de justifier que les fonctions sont dérivables.

a) $f : x \longmapsto x^4$, $I=\mathbb{R}$ **b)** $f : x \longmapsto \sqrt{x+2}$, $I =]-2\,;\infty[$

c) $f : x \longmapsto \sin(3x)$, $I=\mathbb{R}$ **d)** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $I=\mathbb{R}_+^*$

e) $f : x \longmapsto \ln(x^2+1)$, $I=\mathbb{R}$ **f)** $f : x \longmapsto (3-2x)^4$, $I=\mathbb{R}$

g) $f : x \longmapsto x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, $I=\mathbb{R}$ **h)** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+1}$, $I=\mathbb{R}$

i) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$, $I =]1\,;+\infty[$ **j)** $f : x \longmapsto \arctan(x^2)$, $I=\mathbb{R}$

Solution.

a) Pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3$.

b) Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

c) Pour tout réel x, $f'(x) = 3\cos(3x)$.

d) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

e) Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

f) Pour tout réel x, $f'(x) = 4 \times (-2) \times (3-2x)^3 = -8(3-2x)^3$.

g) Pour tout réel x, $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + x^2(-\mathrm{e}^{-x}) = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

h) Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{2x\,\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{x^2}+1) - \mathrm{e}^{x^2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^{x^2}+1)^2} = \frac{2x\,\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{x^2}+1-\mathrm{e}^{-x^2})}{(\mathrm{e}^{x^2}+1)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{2x\,\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^{x^2}+1)^2}$.

i) Pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\dfrac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$.

j) Pour tout réel x, $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{1+(x^2)^2}$ i.e. $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^x}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

2. **a.** Calculer la dérivée de f et déterminer, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

b. Dresser le tableau de variation de f, en faisant apparaître les limites précédentes.

c. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser puis déterminer la bijection réciproque de f.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (x-2)(\mathrm{e}^x+1)+4.$$

On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer g' puis g''.

b. Déterminer les variations de g' puis le signe de g'.

c. En déduire les variations de g puis le signe de g.

d. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

e. En utilisant le signe de g, étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et T.

Solution.

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^x = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4}$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage $+\infty$.

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
On en déduit que la droite d'équation $y=0$ (i.e. l'axe des abscisse) est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage $+\infty$.

2. a. Pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{4\,\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}$. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ et $(1+\mathrm{e}^{x})^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.

b. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On aboutit donc au tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de f	4 $\searrow$ 0

c. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ donc, par le théorème de la bijection continue, $\underline{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0\,;4[}$.
Soit $y \in\,]0\,;4[$. Alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{x}} \iff y(1+\mathrm{e}^{x}) = 4 \\ &\underset{y\neq 0}{\iff} 1+\mathrm{e}^{x} = \frac{4}{y} \iff \mathrm{e}^{x} = \frac{4}{y} - 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{x} = \frac{4-y}{y} \end{aligned}$$

Or, comme $0 < y < 4$, $4-y > 0$ et $y > 0$ donc, par quotient, $\dfrac{4-y}{y} > 0$. Ainsi,

$$y = g(x) \iff x = \ln\left(\frac{4-y}{y}\right)$$

Ainsi, la bijection réciproque de f est

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f^{-1}: &]0\,;4[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{4-x}{x}\right) \end{array}}.$$

3. a. Pour tout réel x,

$$g'(x) = 1\times(\mathrm{e}^{x}+1) + (x-2)\times\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}+1+x\,\mathrm{e}^{x}-2\,\mathrm{e}^{x}$$

donc $\boxed{g'(x) = x\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}+1}$.
Pour tout réel x,

$$g''(x) = 1\times\mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}$$

donc $\boxed{g''(x) = x\,\mathrm{e}^{x}}$.

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc le signe de $g''(x)$ est le signe de x. Ainsi, $g''(x) \leqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_-$ et $g''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ donc $\underline{g' \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+}$.
Dès lors, g atteint en 0 un minimum global sur $\mathbb{R}$. Or, $g'(0) = 0-1+1 = 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g'(x) \geqslant 0}$.

c. On en déduit que $\boxed{g \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$. Or, $g(0) = -2 \times 2 + 4 = 0$ donc la fonction $\boxed{g \text{ est négative sur } \mathbb{R}_- \text{ et positive sur } \mathbb{R}_+}$.

d. L'équation réduite de T est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -\frac{4}{2^2}x + \frac{4}{2}$$

soir $\boxed{y = -x + 2}$.

e. Pour tout réel x,

$$f(x) - (-x + 2) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^x} + x - 2 = \frac{4 + (x - 2)(1 + \mathrm{e}^x)}{1 + \mathrm{e}^x} = \frac{g(x)}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

Or, pour tout réel x, $1 + \mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $f(x) - (-x + 2)$ est le signe de $g(x)$.
Ainsi, $f(x) - (-x + 2) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ et $f(x) - (-x + 2) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
On conclut que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } T \text{ sur } \mathbb{R}_- \text{ et au-dessus de } T \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.