Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.

Exercice 1. Déterminer, en argumentant, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2}$ **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de f sur I. On ne demande pas de justifier que les fonctions sont dérivables.

a) $f : x \longmapsto x^4, \quad I = \mathbb{R}$ **b)** $f : x \longmapsto \sqrt{x+2}, \quad I =]-2\,;\infty[$

c) $f : x \longmapsto \sin(3x), \quad I = \mathbb{R}$ **d)** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}, \quad I = \mathbb{R}_+^*$

e) $f : x \longmapsto \ln(x^2+1), \quad I = \mathbb{R}$ **f)** $f : x \longmapsto (3-2x)^4, \quad I = \mathbb{R}$

g) $f : x \longmapsto x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad I = \mathbb{R}$ **h)** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+1}, \quad I = \mathbb{R}$

i) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}, \quad I =]1\,;+\infty[$ **j)** $f : x \longmapsto \arctan(x^2), \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{x}}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

2. a. Calculer la dérivée de f et déterminer, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

b. Dresser le tableau de variation de f, en faisant apparaître les limites précédentes.

c. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser puis déterminer la bijection réciproque de f.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (x-2)(\mathrm{e}^{x}+1)+4.$$

On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer g' puis g''.

b. Déterminer les variations de g' puis le signe de g'.

c. En déduire les variations de g puis le signe de g.

d. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

e. En utilisant le signe de g, étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et T.