Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. Déterminer, en argumentant, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2+3$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} x^3-x^2+3$ **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$

Solution.

a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x)=+\infty}$.

b) Par croissance comparée, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)=0}$.

c) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x+1=1$ et ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=0}$.

d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc $\mathrm{e}^x+1\underset{x\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^x$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\underset{x\to+\infty}{\sim}1$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=1}$.

e) Comme $x^3-x^2+3\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-x^2+3=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-x^2+3=+\infty}$.

f) Comme $x^3-x^2+3\underset{x\to 0}{\sim}3$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}x^3-x^2+3=3}$.

g) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+1=+\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}=0}$.

h) Comme $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}=+\infty$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}=+\infty}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de f sur I. On ne demande pas de justifier que les fonctions sont dérivables.

a) $f: x\longmapsto x^3,\quad I=\mathbb{R}$ **b)** $f: x\longmapsto\sqrt{x},\quad I=\mathbb{R}_+^*$ **c)** $f: x\longmapsto\cos(x),\quad I=\mathbb{R}$

d) $f: x\longmapsto\dfrac{1}{x^2},\quad I=\mathbb{R}_+^*$ **e)** $f: x\longmapsto\ln(x^2+1),\quad I=\mathbb{R}$ **f)** $f: x\longmapsto(2-3x)^5,\quad I=\mathbb{R}$

g) $f: x\longmapsto x\,\mathrm{e}^x,\quad I=\mathbb{R}$ **h)** $f: x\longmapsto\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+1},\quad I=\mathbb{R}$ **k)** $f: x\longmapsto\dfrac{2}{(x+1)\ln(x+1)},\quad I=\mathbb{R}_+^*$

Solution.

a) Pour tout réel x,$f'(x)=3x^2$.

b) Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Pour tout réel x, $f'(x)=-\sin(x)$.

d) Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

e) Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

f) Pour tout réel x, $f'(x)=5\times(-3)\times(2-3x)^4=-15(2-3x)^4$.

g) Pour tout réel x, $f'(x)=1\times\mathrm{e}^x+x\times\mathrm{e}^x=(x+1)\,\mathrm{e}^x$.

h) Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2x\,\mathrm{e}^{x^2}\times(\mathrm{e}^{x^2}+1)-\mathrm{e}^{x^2}\times2x\,\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^{x^2}+1)^2}=\dfrac{2x\,\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^{x^2}+1)^2}$

k) Pour tout rée $x>0$, $f'(x)=2\times\dfrac{1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}}{(x+1)^2\ln^2(x+1)}=\dfrac{2\ln(x+1)+2}{(x+1)^2\ln^2(x+1)}$.

Exercice 3 (d'après le sujet du Concours A – TB – 2021). On définit deux fonctions f et g en posant, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

A. Étude des fonctions f et g

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Calculer la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
3. On *admet* que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Prouver que $g' = f$.
4. Exprimer de même f' en fonction de g.
5. **a.** Si x est un réel, donner le signe de e^{x}, puis donner le signe de e^{-x}.

   b. Donner le signe de la fonction f sur $]-\infty\,;+\infty[$.
6. **a.** Déduire de ce qui précède le sens de variation de la fonction g sur $]-\infty\,;+\infty[$.

   b. Quel est le signe de g sur $]-\infty\,;+\infty[$?
7. Donner le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\,;+\infty[$.
8. Dresser le tableau des variations de f sur $]-\infty\,;+\infty[$. On fera en particulier apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la valeur de $f(0)$.

B. Établissement de formules

On considère la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la relation suivante :

$$u(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2.$$

On admettra que les fonctions $x \longmapsto (f(x))^2$ et $x \longmapsto (g(x))^2$ sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a la relation $2f(x)g(x) = g(2x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto (f(x))^2$.
3. Pour tout réel x, calculer $u'(x)$.
4. En déduire que, pour tout réel x, on a $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.

Solution.

A. Étude des fonctions f et g

1. Sachant que $\mathrm{e}^{0} = 1$, $f(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $g(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$.
2. Notons $k : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. La fonction k est la composée de la fonction affine $x \longmapsto -x$ suivie de la fonction exp, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\boxed{k'(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\,\mathrm{e}^{-x}}$.
3. Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - (-\,\mathrm{e}^{-x})}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = f(x)$ donc $\boxed{g' = f}$.
4. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + (-\,\mathrm{e}^{-x})}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = g(x)$ donc $\boxed{f' = g}$.
5. **a.** Par théorème, pour tout réel x, $\boxed{\mathrm{e}^{x} > 0}$ donc $\boxed{\mathrm{e}^{-x} > 0}$.

   b. On en déduit que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} > 0$ donc, comme $2 > 0$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}}$.
6. **a.** Ainsi, $g' = f > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

   b. Sachant que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = 0$, $g(x) < 0$ pour tout $x < 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

7. Or, $f' = g$ donc $f'(x) < 0$ pour tout $x < 0$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\,;0] \text{ et strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

8. D'une part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc, par somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$. Comme f est paire, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

On aboutit donc au tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

B. Établissement de formules

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2f(x)g(x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{e^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{(\mathrm{e}^{x})^2 - (\mathrm{e}^{-x})^2}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}$$

donc $\boxed{2f(x)g(x) = g(2x)}$.

2. Notons $F : x \longmapsto (f(x))^2$. Alors, pour tout réel x, $F'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x) = 2g(x)f(x)$ donc, d'après la question précédente, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F'(x) = g(2x)}$.

3. Notons $G : x \longmapsto (g(x))^2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = 2 \times g'(x) \times g(x) = 2f(x)g(x) = g(2x).$$

Ainsi, pour tout réel x, $u'(x) = F'(x) - G'(x) = g(2x) - g(2x)$ donc $\boxed{u'(x) = 0}$.

4. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que u est constante sur $\mathbb{R}$. Or,

$$u(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

On conclut donc que, pour tout réel x, $u(x) = 1$ c'est-à-dire $\boxed{(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1}$.