Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdit.

Exercice 1. Déterminer, en argumentant, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2+3$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} x^3-x^2+3$ **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de f sur I. On ne demande pas de justifier que les fonctions sont dérivables.

a) $f : x \longmapsto x^3,\quad I=\mathbb{R}$ **b)** $f : x \longmapsto \sqrt{x},\quad I=\mathbb{R}_+^*$ **c)** $f : x \longmapsto \cos(x),\quad I=\mathbb{R}$

d) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2},\quad I=\mathbb{R}_+^*$ **e)** $f : x \longmapsto \ln(x^2+1),\quad I=\mathbb{R}$ **f)** $f : x \longmapsto (2-3x)^5,\quad I=\mathbb{R}$

g) $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x,\quad I=\mathbb{R}$ **h)** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+1},\quad I=\mathbb{R}$ **k)** $f : x \longmapsto \dfrac{2}{(x+1)\ln(x+1)},\quad I=\mathbb{R}_+^*$

Exercice 3 (d'après le sujet du Concours A – TB – 2021)**.** On définit deux fonctions f et g en posant, pour tout réel x :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

A. Étude des fonctions f et g

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

2. Calculer la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

3. On *admet* que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Prouver que $g'=f$.

4. Exprimer de même f' en fonction de g.

5. **a.** Si x est un réel, donner le signe de e^x, puis donner le signe de e^{-x}.

b. Donner le signe de la fonction f sur $]-\infty\,;+\infty[$.

6. **a.** Déduire de ce qui précède le sens de variation de la fonction g sur $]-\infty\,;+\infty[$.

b. Quel est le signe de g sur $]-\infty\,;+\infty[$?

7. Donner le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\,;+\infty[$.

8. Dresser le tableau des variations de f sur $]-\infty\,;+\infty[$. On fera en particulier apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la valeur de $f(0)$.

B. Établissement de formules

On considère la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la relation suivante :

$$u(x)=\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2.$$

On admettra que les fonctions $x \longmapsto \left(f(x)\right)^2$ et $x \longmapsto \left(g(x)\right)^2$ sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a la relation $2f(x)g(x)=g(2x)$.

2. Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \left(f(x)\right)^2$.

3. Pour tout réel x, calculer $u'(x)$.

4. En déduire que, pour tout réel x, on a $\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=1$.