

Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.

Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3 . Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

3.
 - a. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel ℓ .
 - c. En déterminant la limite de la suite (u_{n+1}) de deux façons différentes, déterminer la valeur de ℓ .
4. On pose pour tout, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

- a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , une expression explicite de v_n puis de u_n en fonction de n .
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

- a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de S_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de (S_n) .

Solution.

1. Par définition, $u_2 = u_{1+1} = \frac{1+1}{3 \times 1} \times u_1$ donc $\boxed{u_2 = \frac{4}{9}}$ et $u_3 = \frac{2+1}{3 \times 2} \times u_2$ donc $\boxed{u_3 = \frac{2}{9}}$.
2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».
 - **Initialisation.** Comme $u_1 = \frac{2}{3} > 0$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n > 0$. De plus, comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$ donc $n+1 > 0$ et $3n > 0$. Ainsi, par quotient et produit, $\frac{n+1}{3n} u_n > 0$ i.e. $u_{n+1} > 0$. Dès lors, $u_{n+1} > 0$.
 - **Conclusion.** Par la principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3n}u_n - u_n = \frac{n+1-3n}{3n}u_n = \frac{1-n}{3n}u_n.$$

Or, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $1-n \leq 0$ et $3n > 0$. De plus, grâce au résultat de la question précédente, $u_n > 0$ donc, par quotient et produit, $\frac{1-n}{3n}u_n \leq 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

On conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ .

c. D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et, d'autre part, $\frac{n+1}{3n} \sim \frac{n}{3n} \sim \frac{1}{3}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$ donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3n}u_n = \frac{1}{3}\ell$. Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}) , $\ell = \frac{1}{3}\ell$ donc $\frac{2}{3}\ell = 0$ i.e. $\ell = 0$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \frac{n+1}{3n} \times \frac{1}{n+1}u_n = \frac{1}{3n}u_n = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{3}v_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Son premier terme est $v_1 = \frac{u_1}{1}$

soit $v_1 = \frac{2}{3}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n =$

nv_n donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2n}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \stackrel{j=k-1}{=} \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^j \stackrel{\frac{1}{3} \neq 1}{=} \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

donc $S_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b. Étant donné que $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par différence, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 2.

Partie A. – Puissance d’une matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1.
 - a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
 - b. Montrer que $M = PDP^{-1}$.
2.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $M^n = PD^nP^{-1}$.
 - b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner les quatre coefficients de D^n .
 - c. Dédire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n , on a :

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B. – Étude d’une expérience aléatoire

On considère deux urnes U et V contenant chacune deux jetons, l’un portant le numéro 0 et l’autre portant le numéro 1. On procède à des échanges successifs de jetons. Plus précisément, lors de chaque étape, on choisit au hasard un jeton dans U et un jeton dans V et on les échange d’urne.

Par exemple, si lors du premier échange, on choisit le jeton 0 dans l’urne U et le jeton 1 dans l’urne V , alors après leur échange, l’urne U contiendra deux jetons 1 et l’urne V deux jetons 0.

Pour tout entier naturel n , on considère les événements :

- A_n : « à l’issue de n échanges, l’urne U contient deux jetons 0 »,
- B_n : « à l’issue de n échanges, l’urne U contient un jeton 0 et un jeton 1 »,
- C_n : « à l’issue de n échanges, l’urne U contient deux jetons 1 »,

et on note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de A_n , B_n et C_n . Au vu de la configuration initiale, on a : $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1.
 - a. Montrer que $a_1 = \frac{1}{4}$. Calculer de même b_1 et c_1 .
 - b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$. Calculer de même $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.
En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n.$$

- c. Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

2.
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}b_n.$$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} = MX_n$.
 - b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = M^n X_0$.

c. En utilisant le **2.c.** de la **Partie A**, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

d. Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n .

Solution.

Partie A. – Puissance d’une matrice

1. a. Comme $\det(P) = 3 \times 1 - 2 \times 0 = 3 \neq 0$, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

b. On a

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $PDP^{-1} = M$.

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{H}(n)$: « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».

• **Initialisation.** D’une part, $M^0 = I_2$ et, d’autre part, $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors,

$$M^{n+1} = M^n M = (PD^nP^{-1})(PD^{-1}P) = PD^n(P^{-1}P)D = PD^nI_2D = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

b. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$ i.e. $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$M^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2(-\frac{1}{2})^n & 3(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

Partie B. – Étude d’une expérience aléatoire

1. a. Notons X_1 la variable aléatoire égale au numéro tiré dans l’urne U au premier tirage et Y_1 la variable aléatoire égale au numéro tiré dans l’urne V au premier tirage. Alors, $A_1 = (X_1 = 1) \cap (Y_1 = 0)$ donc, comme ces deux événements sont indépendants,

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(Y_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ i.e. } a_1 = \frac{1}{4}.$$

De même, $B_1 = ((X_1 = 0) \cap (Y_1 = 0)) \cup ((X_1 = 1) \cap (Y_1 = 1))$ donc, comme cette union est disjointe, $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}((X_1 = 0) \cap (Y_1 = 0)) + \mathbf{P}((X_1 = 1) \cap (Y_1 = 1))$ et, par

indépendante, $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(Y_1 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(Y_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

soit $b_1 = \frac{1}{2}$.

Enfin, $C_1 = (X_1 = 0) \cap (Y_1 = 1)$ donc, par indépendance, on obtient, comme pour A_1 ,

$c_1 = \frac{1}{4}$.

- b. Si l'évènement A_n est réalisé alors l'urne U contient deux jetons 0 et l'urne V deux jetons 1. Ainsi, on échange nécessairement un jeton 0 de l'urne U avec un jeton 1 de l'urne V au $(n+1)$ -ième tirage donc, à l'issue de celui-ci, l'urne U contient un jeton 0 et un jeton 1 i.e. B_{n+1} est réalisé. On en déduit que $\mathbf{P}_{A_n}(B_{n+1}) = 1$. Pour la même raison, on a également $\mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1}) = 1$. Enfin, si B_n est réalisé alors la composition des urnes est identique à celle de départ donc $\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{2}$.

Comme (A_n, B_n, c_n) est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1\end{aligned}$$

donc $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$.

- c. On a vu que si A_n est réalisé alors B_{n+1} se réalise de façon certaine donc $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \mathbf{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$. De la même façon, $\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 0$. Enfin, si B_n est réalisé, la composition des urnes est la même qu'au départ donc $\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \mathbf{P}(C_1) = \frac{1}{4}$. Dès lors, en utilisant comme précédemment la formule des probabilités totales, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0\end{aligned}$$

donc $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0\end{aligned}$$

donc $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$.

2. a. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, $\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n) = 1$ i.e. $a_n + b_n + c_n = 1$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédent que $a_n + b_n = 1 - c_n$ donc, d'après le résultat de la question 1.b., $b_{n+1} = 1 - b_n + \frac{1}{2}b_n$ i.e. $b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}b_n$.
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{2}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}$$

i.e. $X_{n+1} = MX_n$.

b. La suite (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison M donc on en déduit que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$.

c. Ainsi, par le résultat de la question **2.c.** de la **Partie A**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2(-\frac{1}{2})^n & 3(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

donc, en identifiant les coefficients d'indices 2,1, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{3} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

d. D'après le résultat de la question **1.c.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = c_{n+1}$. De plus, $a_0 = b_0 = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n$. Or, d'après le résultat de la question **2.a.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n + c_n = 1 - b_n = 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) = \frac{1}{3} \left(2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

i.e., puisque $a_n = c_n$,

$$2a_n = \frac{1}{3} \left(2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

On conclut donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = c_n = \frac{1}{6} \left(2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

Exercice 3. On pose, pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$:

$$f(x) = x \ln(1+x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, et que sa dérivée f' est également dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. a. Déterminer la limite de f en -1 .
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

- c. En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
3. a. Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel $x > -1$.
b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

4. On pose

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx.$$

b. Vérifier que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx$.

d. Calculer l'intégrale I .

5. On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in] -1; +\infty[, \quad f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

On pose alors, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx.$$

a. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

c. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Solution.

1. a. Comme $\lim_{x \rightarrow -1} 1+x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$, par composition, $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$.

Ainsi, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty}$.

On en déduit que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$. Ainsi, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

2. a. Pour tout réel $x > -1$, $f'(x) = 1 \times \ln(1+x) + x \times \frac{1}{1+x}$ i.e. $\boxed{f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$.

b. Pour tout réel x , $f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x+1+x-x}{(1+x)^2}$ i.e.

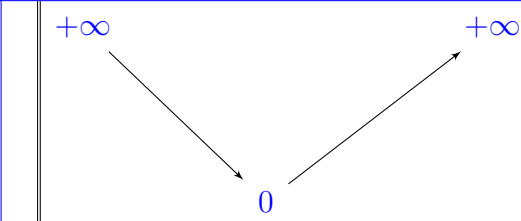
$$\boxed{f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}}.$$

c. Pour tout réel $x > -1$, $x+2 > 0$ et $(1+x)^2 > 0$ donc, par quotient, $f''(x) > 0$. Ainsi,

$\boxed{f' \text{ est strictement croissante sur }] -1; +\infty[}$.

3. a. On a $f'(0) = \ln(1) + 0$ donc $\boxed{f'(0) = 0}$. Comme f' est strictement croissante sur $] -1; +\infty[$, on en déduit que, pour tout $x \in] -1; 0[$, $f'(x) < 0$, que $f'(0) = 0$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

b. On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	-1	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de f			

4. a. Considérons les fonction $u : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto \ln(1+x)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$ avec $u' : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} \ln(2) - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx.$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx}.$$

- b. Pour tout réel $x > -1$,

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x+1} = \frac{x^2 - 1^2 + 1}{x+1}$$

donc

$$\boxed{x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}}.$$

- c. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx &= \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 x - 1 dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + [\ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 - 0 + (\ln(2) - 0) \end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln(2) - \frac{1}{2}}.$$

- d. On conclut que $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4}$ soit $\boxed{I = \frac{1}{4}}$.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; 1]$. Alors, $0 \leq x \leq 1$ donc $1 \leq 1+x \leq 2$ et, par croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$, $\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$ i.e. $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$. En multipliant cette double inégalité par $x^n \geq 0$, on conclut que

$$\boxed{0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, dx$$

i.e., par linéarité,

$$0 \leq I_n \leq \ln(2) \int_0^1 x^n \, dx.$$

Or, $\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$ donc on conclut que

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}.$$

c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, on déduit de la question précédente que $\boxed{I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$.