

Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.

Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3 . Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

3. a. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ .

c. En déterminant la limite de la suite (u_{n+1}) de deux façons différentes, déterminer la valeur de ℓ .

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , une expression explicite de v_n puis de u_n en fonction de n .

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de S_n en fonction de n .

b. Déterminer la limite de (S_n) .

Exercice 2.

Partie A. – Puissance d’une matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
b. Montrer que $M = PDP^{-1}$.
2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $M^n = PD^nP^{-1}$.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner les quatre coefficients de D^n .
c. Dédire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n , on a :

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B. – Étude d’une expérience aléatoire

On considère deux urnes U et V contenant chacune deux jetons, l’un portant le numéro 0 et l’autre portant le numéro 1. On procède à des échanges successifs de jetons. Plus précisément, lors de chaque étape, on choisit au hasard un jeton dans U et un jeton dans V et on les échange d’urne.

Par exemple, si lors du premier échange, on choisit le jeton 0 dans l’urne U et le jeton 1 dans l’urne V , alors après leur échange, l’urne U contiendra deux jetons 1 et l’urne V deux jetons 0.

Pour tout entier naturel n , on considère les événements :

- A_n : « à l’issue de n échanges, l’urne U contient deux jetons 0 »,
- B_n : « à l’issue de n échanges, l’urne U contient un jeton 0 et un jeton 1 »,
- C_n : « à l’issue de n échanges, l’urne U contient deux jetons 1 »,

et on note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de A_n , B_n et C_n . Au vu de la configuration initiale, on a : $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1. a. Montrer que $a_1 = \frac{1}{4}$. Calculer de même b_1 et c_1 .
b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$. Calculer de même $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.
En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n.$$

- c. Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?
b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}b_n.$$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} = MX_n$.
b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = M^n X_0$.
c. En utilisant le **2.c.** de la **Partie A**, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

- d. Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n .

Exercice 3. On pose, pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$:

$$f(x) = x \ln(1+x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, et que sa dérivée f' est également dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de f en -1 .
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
- b.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
- b.** Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

- c.** En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
3. **a.** Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel $x > -1$.
- b.** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
4. On pose

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

- a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx.$$

- b.** Vérifier que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

- c.** En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx$.
- d.** Calculer l'intégrale I .
5. On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in] -1 ; +\infty[, \quad f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

On pose alors, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx.$$

- a.** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$$

- b.** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

- c.** Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.