Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{aX^2 + (b-a)X - b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Les polynômes $Q = X - 1$, $R = X^2 + X - 2$ et $S = X + 1$ appartiennent-ils à F ? Appartiennent-ils à G ?

2. **a.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
b. Justifier que $\dim(F) < \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
c. Montrer que (Q, R) est une famille libre de F et en déduire la dimension de F.

3. **a.** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
b. Déterminer une base de G.
c. Montrer que $G \subset F$ et en déduire que $F = G$.

Solution.

1. Comme $Q(1) = 1 - 1 = 0$, $R(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$ et $S(1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$, on peut affirmer que $\boxed{\text{les polynômes } Q \text{ et } R \text{ appartiennent à } F \text{ et } S \text{ n'appartient pas à } F}$.
De même, on peut voir que $Q = 0X^2 + (1-0)X - 1$ et $R = 1X^2 + (2-1)X - 2$ donc $\boxed{Q \text{ et } R \text{ appartiennent à } F}$. En revanche, s'il existe deux réels a et b tels que $S = aX^2 + (b-a)X - b$ alors, comme $(1, X, X^2)$ est libre, $a = 0$, $b - a = 1$ et $-b = 1$ donc $a = 0$, $b - a = 1$ et $b = -1$ ce qui est contradictoire car $-1 - 0 = -1 \neq 1$. Ainsi, $\boxed{S \notin G}$.

2. **a.** Tout d'abord, par définition, $F \subset \mathbb{R}_2[X]$.
Ensuite, par définition, $O_{\mathbb{R}_2[X]}(1) = 1$ donc $0_{\mathbb{R}_2[X]} \in F$.
Enfin, considérons deux éléments P_1 et P_2 de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par définition,

$$(\lambda P_1 + P_2)(1) = \lambda P_1(1) + P_2(1) = \lambda 0 + 0 = 0$$

car $P_1 \in F$ et $P_2 \in F$. Ainsi, $\lambda P_1 + P_2 \in F$.
On conclut donc que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X]}$.

b. Il s'ensuit que $\dim(F) \leqslant \dim(\mathbb{R}_2[X])$ avec égalité si et seulement si $F = \mathbb{R}_2[X]$. Or, on a vu que $S \notin F$ donc, comme $S \in \mathbb{R}_2[X]$, $F \neq \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, $\boxed{\dim(F) < \dim(\mathbb{R}_2[X])}$.

c. Les polynômes Q et R ne sont pas colinéaires car ils sont non nuls et de degré différents donc (Q, R) est libre. Comme Q et R appartiennent à F, on en déduit que $\dim(F) \geqslant 2$. Or, comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ et comme $\dim(F)$ est un entier, on déduit de la question précédente que $\boxed{\dim(F) = 2}$.

3. **a.** Remarquons que

$$G = \{a(X^2 - X) + b(X - 1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((X^2 - X, X - 1))$$

donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X]}$.

b. La question précédente assure également que $(X^2-X, X-1)$ est une famille génératrice de G. De plus, les vecteurs X^2-X et $X-1$ sont non nuls et de degré différents donc ils forment une famille libre. Ainsi, $\boxed{(X^2-X, X-1) \text{ est une base de } G}$.

c. Soit $P \in G$. Alors, il existe deux réels a et b tels que $P = aX^2 + (b-a)X - b$ donc $P(1) = a1^2 + (b-a)1 - b = a + b - a - b = 0$ donc $P \in F$. Ainsi, $\boxed{G \subset F}$. De plus, on déduit de la question précédente que $\dim(G) = 2$ donc $\dim(F) = \dim(G)$ et donc, puisque $G \subset F$, par propriété, $\boxed{F = G}$.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n(1-u_n).$$

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 et u_2.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. On note f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

5. Montrer que (u_n) est convergente puis que sa limite est égale à 0.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$.

- **a.** Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k^2 en fonction de u_{k+1} et de u_k.
- **b.** Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1}{2} - u_{n+1}$.
- **c.** La série $\sum u_n^2$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer la somme de cette série.

Solution.

1. Par définition,

- $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{4}}$;
- $u_2 = \dfrac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{3}{16}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

3. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) = x - x^2$. Ainsi, la fonction f est dérivable sur $[0\,;1]$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = 1 - 2x$. Dès lors, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - 2x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2x \iff \frac{1}{2} \geqslant x.$$

On en déduit que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. De plus, $f(0) = 0(1-0) = 0$ et $f(1) = 1(1-1) = 0$ donc on aboutit au tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Remarque. La fonction $x \longmapsto x(1-x)$ étant un polynôme du second degré donc le coefficient dominant est $a=-1$, on sait qu'elle est croissante puis décroissante avec changement de variation en $-\dfrac{1}{2\times(-1)} = -\dfrac{1}{2}$ donc on pouvait donner le tableau de variation de f sans calculer sa dérivée.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ ».

- **Initialisation.** Par définition, $u_0 = \dfrac{1}{2} \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, $u_n \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ donc $u_n \in [0\,;1]$ et, dès lors, par la question précédente, $f(u_n) \in \left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $u_{n+1} \in \left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$ et ainsi $u_{n+1} \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$. On conclut donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right].}$$

5. On a vu que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ. Dès lors, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Or, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $1-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\ell$ donc, par produit, $u_n(1-u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-\ell)$ i.e. $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-\ell)$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on conclut que $\ell = \ell(1-\ell)$ donc $\ell = \ell - \ell^2$ donc $-\ell^2 = 0$ et finalement $\ell = 0$. Ainsi, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

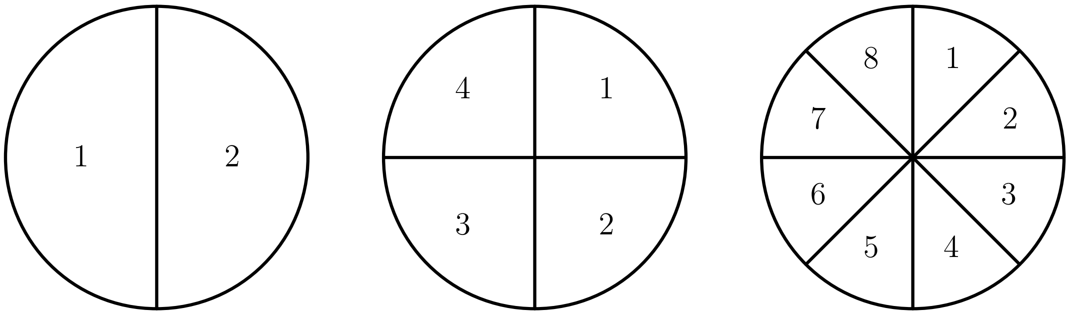
6. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, $u_{k+1} = u_k(1-u_k) = u_k - u_k^2$ donc $u_k^2 = u_k - u_{k+1}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_k^2 = u_k - u_{k+1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})$ donc, en reconnaissant une somme téléscopique, $S_n = u_0 - u_{n+1}$. Comme $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \dfrac{1}{2} - u_{n+1}}.$$

c. On a vu que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, par somme, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum u_n^2 \text{ converge et } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 3. Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cribles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



cible A　　　cible B　　　cible C

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droite de passer à la cible B ; dans le cas contraire, on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin, le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que, pour une cible donnée, les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'évènement : « lors du lancer de la n-ème fléchette, le joueur tire vers la cible A ». On définit de même les évènements B_n et C_n. On note enfin a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.

Le joueur commençant par la cible A, on a $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et $c_1 = 0$.

1. **a.** Calculer les probabilités a_2 et b_2.

b. Calculer a_3 et vérifier que $b_3 = \dfrac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n.$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

a. Montrer que $v_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n$.

b. En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, une expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, une expression de b_n en fonction de n.

d. Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

e. En déduire la limite de la suite (c_n).

Solution.

1. a. Le joueur fait un deuxième tire sur la cible A si et seulement s'il a atteint le secteur 2 au premier tire donc, par équiprobabilité, $\boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$ et, de même, $\boxed{b_2 = \frac{1}{2}}$.

b. Considérons le système complet d'évènements $(A_2,\ B_2)$. D'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3 \mid A_2) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}$$

donc $\boxed{a_3 = \frac{1}{4}}$. De même,

$$\mathbf{P}(B_3) = \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B_3 \mid A_2) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(B_3 \mid B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

donc $\boxed{b_3 = \frac{5}{8}}$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$. Au lancer n, le joueur tire sur une et une seule des trois cibles donc (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements. Par le formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid C_n)\\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 + c_n \times 0\end{aligned}$$

donc $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n}$. De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n)\\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} + c_n \times 0\end{aligned}$$

donc $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n}$.

3. D'après la question précédente, la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_1 = 1$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

4. a. Par définition, $v_1 = 2^0 b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2$ donc $\boxed{v_1 = 2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 2^{n+1-1}b_{n+1} + 2 = 2^n\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n\right) + 2 = 2^n \times \frac{1}{2}a_n + 2^n \times \frac{3}{4}b_n + 2\\ &= 2^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2^{n-1} \times 2 \times \frac{3}{4}b_n + 2 = \left(2 \times \frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2^{n-1} \times \frac{3}{2}b_n + 2\\ &= 1^{n-1} + \frac{3}{2} \times 2^{n-1}b_n + 2 = \frac{3}{2} \times 2^{n-1}b_n + 3\\ &= \frac{3}{2}\left(2^{n-1}b_n + 2\right)\end{aligned}$$

donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n}$.

b. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$ donc, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^{n-1} b_n + 2$ donc $2^{n-1} b_n = v_n - 2$ donc $b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}}$. On déduit donc de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2\right] = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$.

d. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\boxed{a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ et, de même, $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\boxed{b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n + c_n = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 1 - a_n - b_n$ et donc, par somme de limites, on déduit de la question précédente que $\boxed{c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$.