Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{aX^2 + (b-a)X - b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Les polynômes $Q = X - 1$, $R = X^2 + X - 2$ et $S = X + 1$ appartiennent-ils à F ? Appartiennent-ils à G ?

2. **a.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Justifier que $\dim(F) < \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

c. Montrer que (Q, R) est une famille libre de F et en déduire la dimension de F.

3. **a.** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer une base de G.

c. Montrer que $G \subset F$ et en déduire que $F = G$.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n(1 - u_n).$$

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 et u_2.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. On note f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

5. Montrer que (u_n) est convergente puis que sa limite est égale à 0.

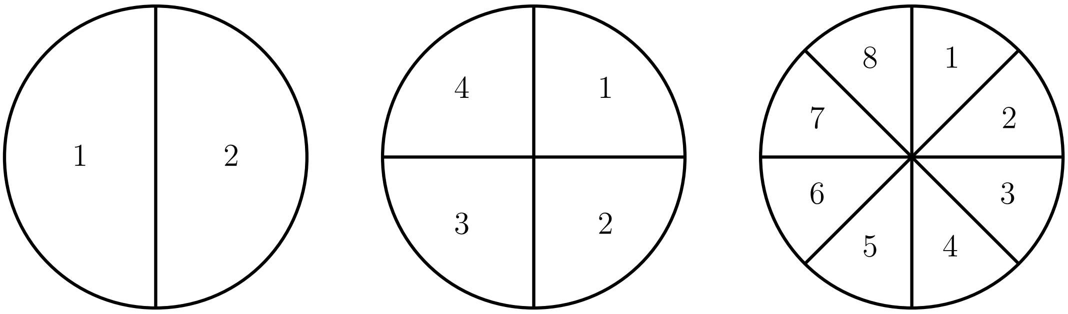
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$.

a. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k^2 en fonction de u_{k+1} et de u_k.

b. Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1}{2} - u_{n+1}$.

c. La série $\sum u_n^2$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer la somme de cette série.

Exercice 3. Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cribles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



cible A   cible B   cible C

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droite de passer à la cible B ; dans le cas contraire, on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin, le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que, pour une cible donnée, les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'évènement : « lors du lancer de la n-ème fléchette, le joueur tire vers la cible A ». On définit de même les évènements B_n et C_n. On note enfin a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.

Le joueur commençant par la cible A, on a $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et $c_1 = 0$.

1. **a.** Calculer les probabilités a_2 et b_2.

b. Calculer a_3 et vérifier que $b_3 = \dfrac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n.$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

a. Montrer que $v_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n$.

b. En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, une expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, une expression de b_n en fonction de n.

d. Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

e. En déduire la limite de la suite (c_n).