Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On rappelle que si a, b, c et d sont des réels et si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors la transposée de M, notée ${}^tM$, est définie par ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tM = -M$.
On note E l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Les matrices suivantes appartiennent-elles à E ? On justifiera ses réponses.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = I_2$$

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Justifier que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$.

4. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

5. On appelle F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M$.
Déterminer $E \cap F$.

Solution.

1. Comme ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tA = -A$ donc $\boxed{A \in E}$.

Comme ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $-B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, ${}^tB \neq -B$ donc $\boxed{B \notin E}$.

Comme ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $-C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tC \neq -C$ donc $\boxed{C \notin E}$.

Comme ${}^tD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $-D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ${}^tD \neq -D$ donc $\boxed{D \notin E}$.

2. Par définition, $E \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, ${}^t0_2 = 0_2 = -0_2$ donc $0_2 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit M et N deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$${}^t(\lambda M + N) = {}^t(\lambda M) + {}^tN = \lambda {}^tM + {}^tN = \lambda(-M) + (-N) = -(\lambda M + N)$$

donc $\lambda M + N \in E$.
Ainsi, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

3. Par définition,

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = -a,\ c = -b,\ b = -c \text{ et } d = -d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; 2a = 0,\ c = -b,\ \text{et } 2d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = 0,\ c = -b,\ \text{et } d = 0 \right\} \end{aligned}$$

donc $\boxed{E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}}$.

4. Ainsi, $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$ donc $E = \mathrm{Vect}(A)$. Or, $A \neq 0_2$ donc (A) est libre et ainsi $\boxed{(A) \text{ est une base de } E}$. Par suite, $\boxed{\dim(E) = 1}$.

5. Soit $M \in E \cap F$. Alors, comme $M \in E$, il existe un réel b tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. De plus, $M \in F$ donc ${}^tM = M$ i.e. $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $b = -b$ donc $b = 0$ et, par suite, $M = 0_2$. Réciproquement, ${}^t0_2 = 0_2 = -0_2$ donc $0_2 \in E \cap F$.
On conclut que $\boxed{E \cap F = \{0_2\}}$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f'(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

c. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en déduire, pour tout réel $x \geqslant 1$, le signe de $f(x)$.

d. Déterminer le sens de variation de (u_n).

4. On considère les fonctions g et h définies sur $[1\,;+\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 1 \qquad g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x^2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) + \frac{2}{3x^3}.$$

On admet que g et h sont dérivables sur $[1\,;+\infty[$.

a. Démontrer que

$$\forall x \geqslant 1 \qquad g'(x) = \frac{2x+1}{x^3(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad h'(x) = -\frac{3x+2}{x^4(1+x)^2}.$$

b. En déduire les variations de g et h sur $[1\,;+\infty[$.

c. En s'inspirant de la question **3.c.**, déterminer, pour tout réel $x \geqslant 1$, le signe de $g(x)$ et celui de $h(x)$.

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

e. Utiliser la question précédente pour montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - u_{n+1})$.

f. Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_k - u_{k+1})$ en fonction de u_n et en déduire que (u_n) est convergente. On note γ sa limite.

g. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

h. Conclure que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

Solution.

1. $u_1 = 1 - \ln(1)$ donc $\boxed{u_1 = 1}$, $u_2 = 1 + \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{3}{2} - \ln(2)}$ et $u_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ln(3)$ donc $\boxed{u_3 = \dfrac{11}{6} - \ln(3)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

3. **a.** Pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x})} \\ &= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{-x + (1+x)}{x(1+x)^2} \end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}}$.

b. On en déduit que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1\,;+\infty[}$.

c. D'une part, lim $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln en 1 donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$ donc, par différence, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

Ainsi, on a prouvé que f est croissante sur $[1\,;+\infty[$ et que f tend vers 0 en $+\infty$ donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [1\,;+\infty[,\ f(x) \leqslant 0}$.

d. On a vu en question **2.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$ donc, d'après le résultat précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. **a.** On peut remarquer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $g(x) = -f(x) - \frac{1}{2x^2}$ donc, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{2}{2x^3} = -\frac{1}{x(1+x)^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{-x^2 + (1+x)^2}{x^3(1+x)^2} = \frac{-x^2 + 1 + 2x + x^2}{x^3(1+x)^2}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 1,\ g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^3(1+x)^2}}$. Dès lors, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} h'(x) = g'(x) - \frac{2\times 3}{3x^4} &= \frac{2x+1}{x^3(1+x)^2} - \frac{2}{x^4} \\ &= \frac{x(2x+1)-2(1+x)^2}{x^4(1+x)^2} \\ &= \frac{2x^2+x-2-4x-2x^2}{x^4(1+x)^2} \end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ h'(x) = -\dfrac{3x+2}{x^4(1+x)^2}}$.

b. On en déduit que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $g'(x) \geqslant 0$ et $h'(x) \leqslant 0$. Dès lors, on conclut que $\boxed{g \text{ est croissante sur } [1\,;+\infty[\text{ et } h \text{ est décroissante sur } [1\,;+\infty[}$.

c. On a vu que, pour tout réel x, $g(x) = -f(x) - \dfrac{1}{2x^2}$ donc, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$, par différence, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Comme g est croissante sur $[1\,;+\infty[$, on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 1,\ g(x) \leqslant 0}$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x^3} = 0$ donc, par différence, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Or, h est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 1,\ h(x) \geqslant 0}$.

d. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) \leqslant 0$ i.e. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant 0$.

Or, on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n - u_{n+1} = -\left(\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, $u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(n) \geqslant 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{2}{3n^3} \geqslant 0$ et ainsi $u_n - u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{2n^2}$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{2}{3n^3} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}}$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n^2} > 0$ donc, en divisant l'inégalité précédente par $\dfrac{1}{n^2}$, il vient

$$\frac{\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3}}{\frac{1}{2n^2}} \leqslant \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{1}{2n^2}} \leqslant 1$$

i.e.

$$2n^2\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3}\right) \leqslant \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{1}{2n^2}} \leqslant 1$$

soit

$$1 - \frac{4}{3n} \leqslant \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{1}{2n^2}} \leqslant 1.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{4}{3n}=1$ donc, par le théorème d'encadrement, $\dfrac{u_n-u_{n+1}}{\frac{1}{2n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi, $\boxed{u_n-u_{n+1}\sim \dfrac{1}{2n^2}}$.

Par théorème, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par le théorème sur les équivalents, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n-u_{n+1}) \text{ converge}}$.

f. En reconnaissant une somme téléscopique, pour tout entier $n\geqslant 2$, $S_n=u_1-u_{n-1+1}$ i.e. $\boxed{S_n=1-u_n}$.

Ainsi, pour tout entier $n\geqslant 2$, $u_n=1-S_n$ et, d'après la question précédente, (S_n) converge donc, par différence, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

g. Soit un entier $k\geqslant 2$. Alors,

$$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k-(k-1)}{k(k-1)}=\frac{1}{k(k-1)}.$$

Or, $0<k-1<k$ donc, en multipliant par $k>0$, $0<k(k-1)<k^2$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{k(k-1)}>\dfrac{1}{k^2}$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout entier } k\geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}}$.

Soit un entier $n\geqslant 2$ et un entier $N\geqslant n$. Alors, d'après le résultat précédent, $\sum\limits_{k=n}^{N}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\sum\limits_{k=n}^{N}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)$. En reconnaissant une somme téléscopique, on en déduit que $\sum\limits_{k=n}^{N}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{N}$ et ainsi, comme $\dfrac{1}{N}\geqslant 0$, $\boxed{\sum\limits_{k=n}^{N}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{n-1}}$.

h. D'après les résultats de **3.d.** et **4.d.**, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_k-u_{k+1}\leqslant\dfrac{1}{2n^2}$.

Soit un entier $n\geqslant 2$ et un entier $N\geqslant n$. En sommant les inégalités précédentes, on en déduit que $0\leqslant\sum\limits_{k=n}^{N}(u_k-u_{k+1})\leqslant\sum\limits_{k=n}^{N}\dfrac{1}{2k^2}$. Dès lors, en reconnaissant une somme téléscopique, $0\leqslant u_n-u_{N+1}\leqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=n}^{N}\dfrac{1}{k^2}$ donc $0\leqslant u_n-u_{N+1}\leqslant\dfrac{1}{2(n-1)}$. Finalement, en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{0\leqslant u_n-\gamma\leqslant\frac{1}{2(n-1)}}.$$