TB2 **samedi 5 octobre 2024**

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. On rappelle que si a, b, c et d sont des réels et si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors la transposée de M, notée ${}^tM$, est définie par ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tM = -M$.
On note E l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Les matrices suivantes appartiennent-elles à E ? On justifiera ses réponses.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = I_2$$

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Justifier que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$.

4. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

5. On appelle F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M$.
Déterminer $E \cap F$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f'(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

c. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en déduire, pour tout réel $x \geqslant 1$, le signe de $f(x)$.

d. Déterminer le sens de variation de (u_n).

4. On considère les fonctions g et h définies sur $[1\,;+\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 1 \qquad g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x^2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) + \frac{2}{3x^3}.$$

On admet que g et h sont dérivables sur $[1\,;+\infty[$.

a. Démontrer que

$$\forall x \geqslant 1 \qquad g'(x) = \frac{2x+1}{x^3(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad h'(x) = -\frac{3x+2}{x^4(1+x)^2}.$$

b. En déduire les variations de g et h sur $[1\,;+\infty[$.

c. En s'inspirant de la question **3.c.**, déterminer, pour tout réel $x \geqslant 1$, le signe de $g(x)$ et celui de $h(x)$.

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

e. Utiliser la question précédente pour montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - u_{n+1})$.

f. Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_k - u_{k+1})$ en fonction de u_n et en déduire que (u_n) est convergente. On note γ sa limite.

g. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier $N \geqslant n$,

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

h. Conclure que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$