Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1 (d'après le Sujet Agro-Véto – TB – 2019)**.**

1. Étude d'une suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner la valeur de sa limite.

2. Étude d'une deuxième suite

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{2v_n}{1+2v_n}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2v_n} + 1$.

c. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

d. Déterminer un équivalent simple de $(v_n - \ell)$.

Solution.

1. a. $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 1 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 1$ soit $\boxed{u_1 = 3}$ et $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 1 = \dfrac{1}{2} \times 3 + 1$ soit $\boxed{u_2 = \dfrac{5}{2}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}a_n$$

donc (a_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Or, $a_0 = u_0 - 2 = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2 \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + a_n$ donc on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

d. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ donc, par somme, (u_n) converge et $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$.

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $v_n > 0$ ».

Initialisation. Comme $v_0 = \dfrac{1}{4} > 0$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $v_n > 0$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $v_{n+1} > 0$. Comme $v_n > 0$, $2v_n > 0$ et $1 + 2v_n > 0$ donc par quotient $v_{n+1} > 0$ i.e. $v_{n+1} > 0$ et ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n > 0}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{2v}{1+2v_n}} = \frac{1+2v_n}{2v_n} = \frac{1}{2v_n} + \frac{2v_n}{2v_n}$$

i.e. $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{1}{2v_n} + 1}$.

c. On remarque que $\dfrac{1}{v_0} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{v_n} + 1$ donc $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ a le même terme initial et vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n) donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_n} = u_n$ donc $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2$, par quotient, (v_n) est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}}$.

d. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2^{n-1}}}$ donc

$$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2^{n-1}}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - \left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{2\left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)} = \frac{-\frac{1}{2^{n-1}}}{4 + \frac{1}{2^n}}.$$

Or, comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc, par quotient et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \dfrac{1}{2^n} = 4$ et ainsi $4 + \dfrac{1}{2^n} \sim 4$. On conclut que $v_n - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{-\frac{1}{2^{n-1}}}{4} = -\dfrac{1}{2^2 \times 2^{n-1}}$ i.e. $\boxed{v_n - \dfrac{1}{2} \sim -\dfrac{1}{2^{n+1}}}$.

Exercice 2 (d'après le sujet Agro-Véto – TB – 2009)**.** Dans tout cet exercice, on considère les matrices $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On considère les vecteurs $u = (1,1,2)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Que représente la matrice P pour la famille (u, v, w) ?

c. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que P est inversible ?

Dans la suite, on admettra que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et que $T = P^{-1}AP$.

2. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $MA = AM$ et on pose $N = P^{-1}MP$.

a. En utilisant le fait que $T = P^{-1}AP$, montrer que $NT = TN$.

b. On écrit la matrice N sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des réels.

Calculer NT et TN et en déduire que $\begin{cases} b = c = d = g = h = 0 \\ e = i \end{cases}$.

c. Conclure que M est de la forme $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}e + f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e - f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e + f & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e - f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e \\ -a + e & a - e & a \end{pmatrix}$.

3. On note $C(A)$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$.

a. Déduire de **2.c.** des matrices R, S et T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $C(A) = \text{Vect}(R, S, T)$.

b. Conclure que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

Solution.

1. a. Soit a, b et c des réels tels que $au + bv + cw = (0,0,0)$. Alors, $(a+b+c, a+b, 2a+c) = (0,0,0)$ donc

$$(S) \begin{cases} a+b+c=0 & L_1 \\ a+b=0 & L_2 \\ 2a+c=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c & L_1 \\ -c=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2b-c=0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}.$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ donc $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est libre}}$. De plus, il s'agit d'une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 donc, par théorème, $\boxed{(u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

b. La matrice P est la matrice de la famille (u,v,w) dans la base canonique.

c. Comme (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, $\text{rg}(u,v,w) = 3$ donc $\text{rg}(P) = 3$ et ainsi $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

2. a. On a

$$\begin{aligned} NT &= (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = P^{-1}M(P^{-1}P)AP = P^{-1}MI_3AP \\ &= P^{-1}MAP = P^{-1}AMP = P^{-1}A(PP^{-1})MP = (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) \end{aligned}$$

donc $\boxed{NT = TN}$.

b. D'une part

$$NT = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & b+2c \\ d & 2e & e+2f \\ g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$$TN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

Comme $NT = TN$, on en déduit que

$$\begin{cases} 2b = b \\ b + 2c = c \\ d = 2d + g \\ 2e = 2e + h \\ e + 2f = 2f + i \\ g = 2g \\ h + 2i = 2i \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = -g \\ h = 0 \\ e = i \\ g = 0 \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\begin{cases} b = c = d = g = h = 0 \\ e = i \end{cases}}.$$

c. Ainsi, $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ donc, comme $N = P^{-1}MP$, $M = PNP^{-1}$ et ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & a & a \\ e+2f & e-2f & -e \\ 2e & -2e & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a+3e+2f & a-e-2f & a-e \\ -a+e+2f & a+e-2f & a-e \\ -2a+2e & 2a-2e & 2a \end{pmatrix}$$

Ainsi, M est de la forme

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}e + f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e - f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e + f & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e - f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e \\ -a+e & a-e & a \end{pmatrix}}.$$

3. a. D'après la question précédente, $M \in C(A)$ si et seulement si s'il existe des réels a, e et f tels que

$$M = a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit qu'en posant

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(R, S, T)}$.

b. Ceci montre que $C(A)$ est un espace vectoriel et que (R, S, T) en est une famille génératrice. Considérons trois réels a, b et c tels que $aR + bS + cT = 0_3$. Alors,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b + c & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - c & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ -a+b & a-b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $a = 0$ puis $a - b = 0$ donc $b = 0$ et enfin $-\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b + c = 0$ donc $c = 0$. Ainsi, $a = b = c = 0$ donc la famille (R, S, T) est libre. Dès lors, (R, S, T) est une base de $C(A)$ et donc $\boxed{\dim(C(A)) = 3}$.

Exercice 3 (d'après le sujet Agré-Véto – TB – 2011)**.** On considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \left]1\,;+\infty\right[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1} \end{cases}.$$

1. Étude de la limite

a. Soit a un réel tel que $a > 1$. Quel est le signe de $\dfrac{1}{a-1}$?

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 1$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k$, montrer que $x_n \geqslant n + 1$.

d. Montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.

2. Recherche d'un équivalent

a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

c. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1) + 1.$$

d. Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$n + 1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1).$$

e. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis un équivalent simple de x_n.

Solution.

1. a. Comme $a > 1$, $a - 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{a-1} > 0$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $x_n > 1$ ».

Initialisation. Comme $x_0 \in \left]1\,;+\infty\right[$, par définition, $x_0 > 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $x_n > 1$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie i.e. que $x_{n+1} > 1$. Comme $x_n > 1$, $\dfrac{1}{x_n - 1} > 0$ donc $x_{n+1} > x_n + 1 > 2$ et, à plus forte raison, $x_{n+1} > 1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n > 1}$.

c. D'une part, on reconnaît une somme téléscopique donc $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = x_n - x_0$ et, autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} - x_k = 1 + \dfrac{1}{x_k - 1}$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \dfrac{1}{x_k - 1} = n + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k - 1}$. On en déduit donc que $x_n - x_0 = n + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k - 1}$ et donc $x_n = n + x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k - 1}$.

Or, par hypothèse, $x_0 > 1$ et, pour tout entier naturel k, $\dfrac{1}{x_k - 1} > 0$ donc $x_n > n + 1$.

À plus forte raison, $\boxed{x_n \geqslant n + 1}$.

d. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty}$, on en déduit, par le théorème de comparaison, que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty}$.

2. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $x_k \geqslant k + 1$ donc $x_k - 1 \geqslant k > 0$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,; +\infty[$, $\frac{1}{x_k - 1} \leqslant \frac{1}{k}$. Or, par définition, $x_{k+1} = x_k + 1 + \frac{1}{x_k - 1}$ donc $x_{k+1} - x_k - 1 = \frac{1}{x_k - 1}$. Ainsi, on conclut que $\boxed{x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}}$.

b. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente que

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or, par linéarité de la somme et en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} - x_k - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} - x_k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = x_n - x_1 - (n - 1)$$

donc on conclut que

$$x_n - x_1 - (n - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

c. Soit un entier $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k - 1\,; k]$, $k \geqslant t > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,; +\infty[$, $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$. Comme $k - 1 < k$, par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Alors, d'une part,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\left(k - (k - 1)\right) = \frac{1}{k}$$

et d'autre part,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k - 1).$$

Ainsi, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k - 1) - \ln(k)$ donc, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \ln(k - 1) = \ln(n - 1) - \ln(1) = \ln(n - 1).$$

Comme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$, on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n-1)}.$$

d. D'après les question **2.b.** et **2.c**, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1) + 1$$

donc $x_n \leqslant x_1 + n - 1 + 1 + \ln(n-1) = x_1 + n + \ln(n-1)$. De plus, on a vu dans la question **1.c.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant n+1$ donc on conclut que, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 2,\ n+1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)}$.

e. On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n}.$$

Or, comme x_1 est constant, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. De plus, pour tout $n \geqslant 2$, par croissance de ln, $0 \leqslant \ln(n-1) \leqslant \ln(n)$ donc en, divisant par $n > 0$, $0 \leqslant \frac{\ln(n-1)}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$. Mais, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{n} = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n} = 1$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1}$.

Par définition, on conclut que $\boxed{x_n \sim n}$.