TB2 **samedi 7 octobre 2023**

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdit.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1 (d'après le sujet du Concours A – TB – 2019)**.**

1. Étude d'une suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner la valeur de sa limite.

2. Étude d'une deuxième suite

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{2v_n}{1+2v_n}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2v_n} + 1$.

c. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

d. Déterminer un équivalent simple de $(v_n - \ell)$.

Exercice 2 (d'après le sujet du Concours A – TB – 2009)**.** Dans tout cet exercice, on considère les matrices $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On considère les vecteurs $u = (1,1,2)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Que représente la matrice P pour la famille (u, v, w) ?

c. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que P est inversible ?

Dans la suite, on admettra que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et que $T = P^{-1}AP$.

2. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $MA = AM$ et on pose $N = P^{-1}MP$.
   a. En utilisant le fait que $T = P^{-1}AP$, montrer que $NT = TN$.
   b. On écrit la matrice N sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des réels.
   Calculer NT et TN et en déduire que $\begin{cases} b = c = d = g = h = 0 \\ e = i \end{cases}$.
   c. Conclure que M est de la forme $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}e + f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e - f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e + f & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e - f & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e \\ -a + e & a - e & a \end{pmatrix}$.
   On admettra qu'inversement toute matrice de cette forme vérifie $MA = AM$.
3. On note $C(A)$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$.
   a. Déduire de **2.c.** des matrices R, S et T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $C(A) = \mathrm{Vect}(R, S, T)$.
   b. Conclure que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

Exercice 3 (d'après le sujet du Concours A – TB – 2011)**.** On considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \,]1\,;+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1} \end{cases}.$$

1. **Étude de la limite**
   a. Soit a un réel tel que $a > 1$. Quel est le signe de $\dfrac{1}{a-1}$?
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 1$.
   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k$, montrer que $x_n \geqslant n + 1$.
   d. Montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.
2. **Recherche d'un équivalent**
   a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}$.
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$
   c. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 2$,
   $$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
   et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1) + 1.$$
   d. Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$n + 1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1).$$
   e. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis un équivalent simple de x_n.