⧫ Sujet 31

On considère une population d'individus hermaphrodites.

On note a_0 la proportion de mâles dans la population de départ et b_0 la proportion de femelles. Chaque individu a une probabilité $\frac{1}{4}$ de changer de sexe une fois par an. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la proportion de mâles dans la population à la fin de l'année n et b_n la proportion de femelles dans la population à la fin de l'année n .

Partie 1

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Que peut-on dire de la suite $(a_n + b_n)$?

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = a_n - \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions explicites de a_n et b_n en fonction de n.

5. Quelles sont les limites des deux suites (a_n) et (b_n) ?

Partie 2

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

On pose, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre X_{n+1}, M et X_n.

2. Montrer que 1 une valeur propre de M et déterminer un vecteur propre de M associé à cette valeur propre.

3. Trouver une valeur propre x de M telle que $0 < x < 1$.

4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

6. Retrouver les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution.

Partie 1

1. Chaque année, $\frac{3}{4}$ des individus mâles restent mâles et $\frac{1}{4}$ des femmes deviennent mâles donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n}$.
De même, chaque année, $\frac{3}{4}$ des individus femelles restent femelles et $\frac{1}{4}$ des mâles deviennent femelles donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n = a_n + b_n$ donc la suite $\boxed{(a_n + b_n) \text{ est constante}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$t_{n+1} = a_{n+1} - \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Or, comme $(a_n + b_n)$ est constante, $a_n + b_n = a_0 + b_0$ donc $b_n = a_0 + b_0 - a_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}(a_0 + b_0 - a_n) - \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{4}a_n + \frac{a_0 + b_0}{4} - \frac{1}{4}a_n - \frac{a_0 + b_0}{2} \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{a_0 + b_0}{4} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{a_0 + b_0}{2}\right) = \frac{1}{2}t_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(t_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{2}}$.

4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Or, $t_0 = a_0 - \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{a_0 - b_0}{2}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{a_0 - b_0}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{a_0 + b_0}{2} + t_n$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{a_0 + b_0}{2} + \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}}.$$

De plus, on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_0 + b_0 - a_n$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \frac{a_0 + b_0}{2} - \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}}.$$

5. Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$ donc, par quotient et somme,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{a_0 + b_0}{2}}.$$

Partie 2

1. Par définition,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

2. On peut constater que $M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ donc, comme le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est non nul, on en déduit que $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } M \text{ et que } \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ en est un vecteur propre associé}}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M-\lambda I_2) = \begin{vmatrix}\frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda\end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{16} = \frac{9}{16} - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{16} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}.$$

Comme 1 est valeur propre de M, 1 est racine du trinôme $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$ donc celui-ci se factorise par $X-1$. On vérifie alors que $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = (X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)$ donc on conclut que $\boxed{x = \frac{1}{2} \text{ est une autre valeur propre de } M}$.

Autre solution. On pouvait également utiliser Python :

```
import numpy as np

M = np.array([[3/4,1/4], [1/4,3/4]])
print(np.linalg.eig(M))
```

qui affiche

```
(array([1. , 0.5]), array([[ 0.70710678,
   -0.70710678],
[ 0.70710678,  0.70710678]]))
```

on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1\,;\frac{1}{2}\}}$.

4. On a vu que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. De plus, le résultat donné par Python semble indiqué de $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\frac{1}{2}$. Vérifions-le :

$$M\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

ce qui confirme que $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$.

5. La suite $\left(\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}\right)$ est une suite géométrique de matrices de raison D donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = D^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n = PDP^{-1}X_n$ donc, en multipliant par P^{-1} à gauche, $P^{-1}X_{n+1} = DP^{-1}X_n$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = P^{-1}X_n$. Alors, d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = D^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}.$$

Or, comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \frac{v_0}{2^n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ et $v_n = \frac{v_0}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
Or, par définition,

$$X_n = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n - v_n \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - v_n$ et $b_n = u_n + v_n$. Ainsi, par sommes de limites, (a_n) et (b_n) tendent vers u_0.
Enfin, $\det(P) = 2$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 - b_0 \end{pmatrix}$$

et ainsi $u_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. On retrouve donc que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{a_0 + b_0}{2}}.$$

⧫ Sujet 32

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\varphi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que φ est linéaire.

3. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de A.

6. Justifier que φ est diagonalisable.

7. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

8. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Solution.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, il existe des réels a, b et c tels que $P = aX^2 + bX + c$. Dès lors, $P' = 2aX + b$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= (2X+1)(aX^2+bX+c) - (X^2-1)(2aX+b) \\ &= 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX + aX^2 + bX + c - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b) \\ &= (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + b + c\end{aligned}$$

donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]}$.

2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (2X+1)(\lambda P + Q) - (X^2-1)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda(2X+1)P + (2X+1)Q - (X^2-1)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(2X+1)P + (2X+1)Q - \lambda(X^2-1)P' - (2X-1)Q' \\ &= \lambda((2X+1)P - (X^2-1)P') + (2X+1)Q - (X^2-1)Q' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

3. $\boxed{\text{La base canonique de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } (1, X, X^2)}$.

4. On a

- $\varphi(1) = (2X+1) \times 1 - (X^2-1) \times 0 = 1 + 2X$
- $\varphi(X) = (2X+1) \times X - (X^2-1) \times 1 = 1 + X + X^2$
- $\varphi(X^2) = (2X+1) \times X^2 - (X^2-1) \times 2X = 2X + X^2$

donc la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

5. <u>1^re^ méthode : par le calcul</u>. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le système

$$(S) = \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 2x + y + 2z = \lambda y \\ y + z = \lambda z \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 & L_1 \\ 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_2 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (1-\lambda)x + y = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \\ \left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) y - (1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1-\lambda}{2} L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) y - (1-\lambda)z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -(1-\lambda)\left(2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_3 - \left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) L_2 \end{cases}$$

Ainsi, (S) n'est pas de rang 3 si et seulement si $-(1-\lambda)\left(2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} -(1-\lambda)\left(2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}\right) = 0 &\iff 1-\lambda = 0 \text{ ou } 2 - \frac{(1-\lambda)^2}{2} = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } (1-\lambda)^2 = 4 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } 1-\lambda = 2 \text{ ou } 1-\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\,;-1\,;3\}}$.

2^de méthode : à l'aide de Python

Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.array([[1,1,0], [2,1,2], [0,1,1]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([-1.,  1.,  3.]), array([[ 4.08248290e-01,
     7.07106781e-01,  4.08248290e-01],
[-8.16496581e-01,  3.74983192e-16,  8.16496581e
   -01],
[ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,  4.08248290e
   -01]]))
```

on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1\,;1\,;3\}}$.

6. La matrice A est une matrice carrée d'ordre 3 qui admet 3 valeur propre distinctes donc, par théorème, A est diagonalisable. Comme A est la matrice de φ dans la base canonique, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

7. Comme 0 n'est pas pas valeur propre de φ, $\ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ donc $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$. Comme φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et qui $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$.

8. Pour déterminer les sous-espaces propres, on reprend le système échelonné en remplaçant λ par les valeurs propres.

Pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} .$$

Ainsi, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\boxed{E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - X^2)}$.

Pour $\lambda = -1$, on obtient

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} .$$

Ainsi, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\boxed{E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - 2X + X^2)}$.

Pour $\lambda = 3$, on obtient

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} .$$

Ainsi, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\boxed{E_3(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 + 2X + X^2)}$.

⧫ Sujet 33

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n) \end{cases} .$$

1. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle. Essayer plusieurs valeurs de u_0.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arctan(x) - x$.

- **a.** Étudier le sens de variation de g.
- **b.** En déduire le signe de g.
- **c.** Dresser la tableau de variations de g, en précisant les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge. Que vaut alors sa limite ℓ ?

4. On suppose dans cette question que $u_0 \geqslant 0$.

- **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
- **b.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
- **c.** En déduire que la suite (u_n) converge.

5. Que se passe-t-il si $u_0 < 0$?

Solution.

1. On peut écrire un programme en Python pour obtenir les premières valeurs de (u_n). La fonction arctan se trouve dans le module `math`. Pour connaître la syntaxe en Python, on peut écrire dans la console

```
>>> import math
>>> dir(math)
```

ce qui permet d'afficher la liste de toutes les fonctions contenus dans le module `math`. En l'occurence, en Python, la fonction arctan est notée `atan`.
On peut donc utiliser la fonction suivante : selectlanguageenglish

```
def suite(x0,n) :
  u=x0
  for k in range(n) :
    print(u)
    u=atan(u)
```

En testant plusieurs valeur de x_0 et de n, on peut conjecturer que (u_n) est décroissante sur $x_0 \leqslant 0$ et croissante sinon et que, dans tous les cas, (u_n) semble converger vers 0.

2. a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$

De plus, g' ne s'annule qu'en 0 donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$.

b. On remarque que $g(0) = \arctan(0) - 0 = 0$ donc, comme g est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{g(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;0] \text{ et } g(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in [0\,;+\infty[}$.

c. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Ainsi, on aboutit au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors, d'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, d'autre part, comme arctan est continue sur $\mathbb{R}$, $\arctan(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(\ell)$ i.e. $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(\ell)$. Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\arctan(\ell) = \ell$ donc $g(\ell) = 0$. Or, comme g est strictement décroissante, g est injective sur $\mathbb{R}$ donc, comme $g(0) = 0$, 0 est l'unique antécédent de 0 par g. On conclut donc que $\boxed{\ell = 0}$.

4. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».
Initialisation. Par hypothèse, $u_0 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n \geqslant 0$ donc, comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\arctan(u_n) \geqslant \arctan(0)$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc, d'après la question **2.b.**, $g(u_n) \leqslant 0$ i.e. $\arctan(u_n) - u_n \leqslant 0$ soit $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

c. Comme (u_n) est décroissant et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

5. Si $u_0 < 0$, on montre comme précédemment par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$ et on en déduit, en utilisant la question **2.** que (u_n) est croissante. Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par 0 donc (u_n) est convergente.

⧫ Sujet 34

On dispose de deux urnes A et B ainsi que de deux boules portant respectivement les numéros 0 et 1.

Initialement, l'urne A contient les deux boules et l'urne B est vide.

À chaque tour, on lance un dé équilibré à 6 faces et on effectue un éventuel déplacement d'une boule entre les urnes selon les règles suivantes :

- si le résultat du dé est 1 ou 2, on change d'urne la boule numérotée 0,
- si le résultat du dé est 3 ou 4, on change d'urne la boule numérotée 1,
- si le résultat du dé est 5 ou 6, on ne modifie pas le contenu des urnes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par :

- p_n la probabilité que l'urne A contienne les 2 boules après l'étape n ;
- q_n la probabilité que l'urne A ne contienne que la boule numérotée 0 après l'étape n ;
- r_n la probabilité que l'urne A ne contienne que la boule numérotée 1 après l'étape n ;
- t_n la probabilité que l'urne A ne contienne aucune boule après l'étape n.

Partie I

1. Donner les valeurs de p_0, q_0, r_0 et t_0.

2. Déterminer les valeurs de p_1, q_1, r_1 et t_1.

3. Montrer qu'il existe une matrice R telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre M, p_n, q_n, r_n, t_n et p_0, q_0, r_0, t_0.

Partie II

On considère les trois matrices suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer UV et VU.

2. Calculer U^2 puis U^3 et émettre une conjecture sur l'expression explicite de U^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer cette conjecture.

3. Calculer V^2 puis V^3 puis V^4 et émettre une conjecture sur l'expression explicite de V^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer cette conjecture.

4. Exprimer R en fonction de U et V puis, en admettant que la formule du binôme de Newton s'applique, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de R^n en fonction de n.

5. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de p_n, q_n, r_n, t_n en fonction de n.

Solution.

Partie I

1. Initialement, l'urne A contient les deux boules donc $\boxed{p_0 = 1 \text{ et } q_0 = r_0 = t_0 = 0}$.

2. Les deux boules restent dans l'urne A si on obtient 5 ou 6 avec le dé donc $\boxed{p_1 = \dfrac{1}{3}}$. L'urne A ne contient plus que la boule numérotée 0 si on obtient 3 ou 4 avec le dé donc $\boxed{q_1 = \dfrac{1}{3}}$. L'urne A ne contient plus que la boule numérotée 1 si on obtient 1 ou 2 avec le dé donc $\boxed{r_1 = \dfrac{1}{3}}$. Enfin, il n'est pas possible de déplacer les deux boules en un seul tour donc $\boxed{t_1 = 0}$.

3. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n (resp. Q_n, R_n et T_n) : « l'urne A contient les deux boules (resp. uniquement la boule 0, uniquement la boule 1, aucune boule) après l'étape n ».
Soit $n \in \mathbb{N}$. Les évènement E_n, F_n, G_n et H_n forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbf{P}(E_{n+1}) = \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(E_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(E_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(E_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times \frac{1}{3} + r_n \times \frac{1}{3} + t_n \times 0 \\ &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \mathbf{P}(F_{n+1}) = \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(F_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(F_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(F_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times \frac{1}{3} + r_n \times 0 + t_n \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}t_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mathbf{P}(G_{n+1}) = \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(G_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times 0 + r_n \times \frac{1}{3} + t_n \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}r_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \mathbf{P}(H_{n+1}) = \mathbf{P}(E_n)\mathbf{P}_{E_n}(H_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}_{F_n}(H_{n+1}) + \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(H_{n+1}) + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}_{H_n}(H_{n+1}) \\ &= p_n \times 0 + q_n \times \frac{1}{3} + r_n \times \frac{1}{3} + t_n \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n \\ \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}t_n \\ \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{t_n} \\ \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$ convient.

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ donc (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes donc, opur tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ t_0 \end{pmatrix}}.$$

Partie II

1. Le calcul donne

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$VU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{UV = VU = U}$.

2. Le calcul donne

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{U^2 = 4U}$. Dès lors, $U^3 = U^2U = (4U)U = 4U^2 = 4(4U)$ donc $\boxed{U^3 = 16U}$.
On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 4^{n-1}U$.
Montrons-le par récurrence.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $U^n = 4^{n-1}U$ ».
Initialisation. $4^{1-1}U = 4^0U = U$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$U^{n+1} = U^nU = (4^{n-1}U)U = 4^{n-1}U^2 = 4^{n-1}(4U) = 4^{n-1}U$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ U^n = 4^{n-1}U}$.

3. Le calcul donne

$$V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{V^2 = I_4}$. Dès lors, $V^3 = V^2 V = I - 4V$ donc $\boxed{V^3 = V}$.
On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V^n = I_4$ si n est pair et $V^n = V$ si n est impair.
Montrons-le par récurrence.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $V^n = I_4$ si n est pair et $N^n = V$ si n est impair ».
Initialisation. $V^0 = I_4$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, si n est pair, $n+1$ est impair et $V^{n+1} = V^n V = I_4 V = V$. Si n est impair, $n+1$ est pair et $V^{n+1} = V^n V = VV = V^2 = I - 4$. Ainsi, $V^{n+1} = V$ si $n+1$ est impair et $V^{n+1} = I_4$ si $n+1$ est pair donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V^n = I_4$ si n est pair et $V^n = V$ si n est impair.

4. On remarque que $\boxed{R = U - V}$. On en déduit en appliquant la formule du binôme de Newton (ce qui est possible ici car U et V commutent), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R^n = (U-V)^n = (U + (-V))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k (-V)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U^k V^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $n-k$ est pair, alors $U^k V^{n-k} = U^k I_4 = U^k$ et, si $n-k$ est impair, alors $U^k V^{n-k} = U^k V = U^{k-1}(UV) = U^{k-1} U = U^k$ donc

$$\begin{aligned} R^n &= (-1)^n V^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U^k V^{n-k} = (-1)^n V^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U^k \\ &= (-1)^n V^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (4^{k-1} U) = (-1)^n V^n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k} \right) U. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k 4^{-1} (-1)^{n-k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) = \frac{1}{4} \left((4-1)^n - (-1)^n \right) \\ &= \frac{3^n - (-1)^n}{4} \end{aligned}$$

donc

$$R^n = (-1)^n V^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} U.$$

On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } R^n = I_4 + \frac{3^n - 1}{4} U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3 \end{pmatrix}}$$

et

$$\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } R^n = -V + \frac{3^n + 1}{4} U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 \\ 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 & 3^n+1 \\ 3^n+1 & 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 \\ 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 \end{pmatrix}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair alors

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}R\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} R^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n-1 & 3^n+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4 \times 3^n} \begin{pmatrix} 3^n+3 \\ 3^n-1 \\ 3^n-1 \\ 3^n-1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{p_n = \frac{3^n+1}{4 \times 3^n} \qquad \text{et} \qquad q_n = r_n = t_n = \frac{3^n-1}{4 \times 3^n}}.$$

Si n est impair alors

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}R\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} R^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 \\ 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n-3 & 3^n+1 \\ 3^n-1 & 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 \\ 3^n-3 & 3^n+1 & 3^n+1 & 3^n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4 \times 3^n} \begin{pmatrix} 3^n+1 \\ 3^n+1 \\ 3^n+1 \\ 3^n-3 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{p_n = q_n = r_n = \frac{3^n+1}{4 \times 3^n} \qquad \text{et} \qquad t_n = \frac{3^n-3}{4 \times 3^n}}.$$

⧫ Sujet 35

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On effectue des tirages successifs de la manière suivante :

1. si on tire une boule blanche, on la replace dans l'urne et on rajoute une boule blanche,

2. si on tire une boule noire, on la replace dans l'urne mais on ne rajoute rien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages.

1. **a.** Donner la loi de X_1.

b. Déterminer la loi de X_2. (On pourra utiliser la formule des probabilités totales en conditionnant selon les valeurs de X_1.)

c. Déterminer la loi de X_3. (On pourra utiliser la formule des probabilités totales en conditionnant selon les valeurs de X_2.)

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner l'univers image de X_n.

b. Conjecturer la valeur de $\mathbf{P}(X_n = n)$.

c. Montrer que $(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)$.

d. Après n tirages n'ayant amené que des boules noires, donner le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires de l'urne.
En déduire $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$.

e. Calculer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$. En déduire une expression de $\mathbf{P}(X_n = 0)$ en fonction de n.

f. Après n tirages ayant amené k boules blanches, où $1 \leqslant k \leqslant n$, donner le nombre de boules et le nombre de boules blanches de l'urne.

g. En déduire, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k + 1)$.

h. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer $\mathbf{P}^{(}X_{n+1} = k + 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = k + 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = k)$.
Démontrer ensuite la conjecture de la question **2.b.**.

Solution.

1. a. Au premier tirage, on tire soit une boule blanche soit une boule de façon équiprobable donc $\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{1}{2}}$.

b. Au bout de 2 tirages, on a tiré 0, 1 ou 2 boules blanches donc $X_2(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$.

- $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0$ car $X_2 \geqslant X_1$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 2) = 0$ car $X_2 \leqslant X_1 + 1$;
- $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$;

On en déduit le tableau suivant donnant la loi conjointe de (X_1, X_2) et celle de X_2 :

X_2 \ X_1	0	1	Loi de X_2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Loi de X_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

c. De même, $X_3(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}$ et si $j \notin \{i, i+1\}$, $\mathbf{P}(X_2 = i, X_3 = j) = 0$. De plus,

- $\mathbf{P}(X_2 = 0, X_3 = 0) = \mathbf{P}(X_2 = 0)\mathbf{P}_{(X_2=0)}(X_3 = 0) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 0, X_3 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 0)\mathbf{P}_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 1)\mathbf{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 1) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{36}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 1, X_3 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 1)\mathbf{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{18}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 2, X_3 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 2)\mathbf{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$;
- $\mathbf{P}(X_2 = 2, X_3 = 3) = \mathbf{P}(X_2 = 2)\mathbf{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 3) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$;

On en déduit le tableau suivant donnant la loi conjointe de (X_2, X_3) et celle de X_3 :

X_3 \ X_2	0	1	2	Loi de X_3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{36}$	0	$\frac{19}{72}$
2	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{13}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Loi de X_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Au bout de n tirage, on a tiré entre 0 et n boules blanches donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

b. On a vu que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{On peut conjecturer que } \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n+1}}$.

c. Pour comme $X_{n+1} \geqslant X_n \geqslant 0$, si $X_{n+1} = 0$ alors $X_n = 0$. Autrement dit, on a l'inclusion $(X_{n+1} = 0) \subset (X_n = 0)$ donc $\boxed{(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)}$.

d. Si les n premiers tirages n'ont amené que des boules noires, la composition de l'urne n'a pas changé donc $\boxed{\text{il a toujours 1 boule blanche et 1 boule noire}}$.

On en déduit que $\boxed{\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}}$.

e. Comme $(X_{n+1} = 0) = (X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}(X_n = 0)\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 0).$$

Ainsi, la suite $(\mathbf{P}(X_k = 0))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. De plus, $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

f. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages, alors on a ajouté k boules blanches : $\boxed{\text{il y a donc } k+2 \text{ boules dont } k+1 \text{ sont blanches}}$.

g. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On déduit de la question précédente que $\boxed{\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k+1}{k+2}}$.

h. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'évènement $(X_{n+1} = k+1)$ est réalisé si $X_n = k+1$ et on tire une boule noire au $(n+1)$-ème tirage ou $X_n = k$ et on tire une boule blanche au $(n+1)$-ème tirage. On en déduit que

$$(X_{n+1} = k+1) = [(X_n = k+1) \cap (X_{n+1} = k+1)] \cup [(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k+1)]$$

donc, comme cette union est disjointe,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = k+1) &= \mathbf{P}((X_n = k+1) \cap (X_{n+1} = k+1)) + \mathbf{P}((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k+1)) \\ &= \mathbf{P}(X_n = k+1)\mathbf{P}_{(X_n=k+1)}(X_{n+1} = k+1) \\ &\qquad\qquad + \mathbf{P}(X_n = k)\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) \\ &= \mathbf{P}(X_n = k+1) \times \frac{1}{k+3} + \mathbf{P}(X_n = k) \times \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1} = k+1) = \frac{1}{k+3}\mathbf{P}(X_n = k+1) + \frac{k+1}{k+2}\mathbf{P}(X_n = k)}.$$

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$; « $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n+1}$ ».

Initialisation. Comme $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, d'après le résultat précédent

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1) = \frac{1}{n+3}\mathbf{P}(X_n = n+1) + \frac{n+1}{n+2}\mathbf{P}(X_n = n).$$

Or, $X_n \leq n$ donc $(X_n = n+1) = \varnothing$ donc

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1) = \frac{1}{n+3} \times 0 + \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n+1}}.$$

⧫ Sujet 36

Lors d'une course nocturne, un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de coureurs passent la ligne d'arrivée entre minuit et une heure du matin. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on modélise l'heure d'arrivée du coureur numéro i par une variable aléatoire U_i de loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$. On suppose que toutes les variables aléatoires U_i sont mutuellement indépendantes. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_{U_i} la fonction de répartition de U_i et f_{U_i} une fonction densité de U_i.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner l'expression d'une fonction de densité de U_i et l'espérance de U_i.

2. Calculer la probabilité qu'un coureur arrive entre 00h20 et 00h30.

3. On définit pour $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire T_k égale au temps du k-ième coureur le plus rapide. On note F_k la fonction de répartition de T_k.

- **a.** Soit $t \in [0\,;1]$. Exprimer l'évènement $(T_1 > t)$ à l'aide des variables aléatoires U_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
  En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t)$.
- **b.** Que vaut $F_1(t)$ lorsque $t > 1$? lorsque $t < 0$? lorsque $t \in [0\,;1]$?
- **c.** En déduire l'expression d'une fonction de densité de T_1.
- **d.** Lorsqu'il y a 12 coureurs en lice, calculer l'espérance de T_1.

4. Pour tout réel $t \in [0\,;1]$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de coureurs arrivés dans l'intervalle de temps $[0\,;t]$. Dans toute cette question, on considère un réel $t \in [0\,;1]$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$.

- **a.** Reconnaître la loi de N_t.
- **b.** Exprimer l'événement $(T_k \leqslant t)$ en fonction de N_t et de k.
- **c.** Justifier que $\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$.
- **d.** Montrer que $F_k(t) = 1 - F_{n-k+1}(1-t)$.
- **e.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathbf{E}(T_k) = \displaystyle\int_0^1 (1 - F_k(x))\,\mathrm{d}x$.

Solution.

1. Une densité de U_i est la fonction f_{U_i} définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{U_i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Par propriété, $\boxed{\mathbf{E}(U_i) = \dfrac{1}{2}}$.

2. Comme 20 min $= \frac{1}{3}$ h et 30 min $= \frac{1}{2}$ h, la probabilité que le coureur i arrive entre 0h20 et 0h30 est

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} \leqslant U_i \leqslant \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité qu'un coureur arrive entre 0h20 et 0h30 est } \dfrac{1}{6}}$.

3. a. L'évènement $(T_1 > t)$ est réalisé si le coureur le plus rapide arrive après l'instant t, ce qui signifie que tous les coureur arrivent après l'instant t. Ainsi,

$$\boxed{(T_1 > t) = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i > t)}.$$

Comme les variables U_i sont mutuellement indépendantes, on en déduit que

$$\mathbf{P}(T_1 > t) = \mathbf{P}(U_1 > t)\mathbf{P}(U_2 > t) \cdots \mathbf{P}(U_n > t).$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(U_i > t) = \int_t^1 1 \,\mathrm{d}x = 1 - t$$

donc $\mathbf{P}(T_1 > 1) = (1-t)^n$. Comme $(T_1 \leqslant t) = \overline{(T_1 > t)}$, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{P}(T_1 \leqslant t) = 1 - (1-t)^n.}$$

b. Si $t > 1$, l'évènement $(T_1 \leqslant t)$ est un évènement certain donc $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t) = 1$ i.e. $\boxed{F_1(t) = 1}$.

Si $t < 0$, l'évènement $(T_1 \leqslant t)$ est un évènement impossible donc $\mathbf{P}(T_1 \leqslant t) = 0$ i.e. $\boxed{F_1(t) = 0}$.

Si $t \in [0\,;1]$, d'après la question précédente, $\mathbf{P}(T_1 < t) = 1 - (1-t)^n$ donc $\boxed{F_1(t) = 1 - (1-t)^n}$.

c. Pour tout $t \in \,]-\infty\,;0[$, $F_1'(t) = 0$, pour tout $t \in \,]1\,;+\infty[$, $F_1'(t) = 0$ et, pour tout $t \in \,]0\,;1[$, $F_1'(t) = n(1-t)^{n-1}$ donc une densité de T_1 est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

d. Comme g nulle en-dehors du segment $[0\,;1]$, T_1 admet une espérance et

$$\mathbf{E}(T_1) = \int_0^1 tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 12t(1-t)^{11}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -(1-t)^{12}$. Ce sont des polynômes donc elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto 12(1-t)^{11}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$\mathbf{E}(T_1) = \Big[-t(1-t)^{12}\Big]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-(1-t)^{12})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{12}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{13}}{13}\right]_0^1$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(T_1) = \dfrac{1}{13}}$.

4. a. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire égale à 1 si le coureur k arrive dans l'intervalle de temps $[0\,;1]$ et 0 sinon. Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(U_k \leqslant t) = 1 - \mathbf{P}(U_k > t) = t$. Comme les variables U_k sont mutuellement indépendantes, il en est de même des variables X_k donc, comme $N_t = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, on conclut que $\boxed{N_t \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } t}$.

b. L'évènement $(T_k \leqslant t)$ est réalisé si les k premiers coureurs sont arrivés dans l'intervalle de temps $[0\,;t]$ donc $\boxed{(T_k \leqslant t) = (N_t \geqslant k)}$.

c. On en déduit que

$$\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \mathbf{P}(N_t \geqslant k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k}^{n} (N_t = i)\right)$$

donc, comme les évènements $(N_t = i)$ sont deux à deux incompatibles,

$$\boxed{\mathbf{P}(T_k \leqslant t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}}.$$

d. Ainsi,

$$\begin{aligned} F_k(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} &\underset{j=n-i}{=} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{n-j} t^{n-j}(1-t)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} t^{n-j}(1-t)^j = 1 - \sum_{j=n-k+1}^{n} \binom{n}{j} (1-t)^j (1-(1-t))t^{n-j}. \end{aligned}$$

Or, l'expression trouvée dans la question précédente est valable pour tout $t \in [0\,;1]$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$ donc, comme $1-t \in [0\,;1]$ et $n-k+1 \in [\![1,n]\!]$, on conclut que

$$\boxed{F_k(t) = 1 - F_{n-k+1}(1-t)}.$$

e. Comme T_k est à valeurs dans $[0\,;1]$, sa densité est nulle en-dehors de cet intervalle. Ainsi, comme F_k est une primitive d'une densité de T_k,

$$\mathbf{E}(T_k) = \int_0^1 xF_k'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère les fonctions $u : x \longmapsto x$ et F_k qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ (car F_k est un polynôme) donc, en intégrant par parties,

$$\mathbf{E}(T_k) = [xF_k(x)]_0^1 - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x = F_k(1) - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, l'évènement $(T_k \leqslant 1)$ est une évènement certain donc $F_k(1) = 1$ et ainsi

$$\mathbf{E}(T_k) = 1 - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x$$

et, par linéarité de l'intégrale, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{E}(T_k) = \int_0^1 (1 - F_k(x))\,\mathrm{d}x}.$$

⧫ Sujet 37

1. On souhaite empiler, les uns sur les autres, des dés cubiques et de même taille. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, lorsque $k-1$ dés ont déjà été empilés, la probabilité que le k-ième dé ne fasse pas écrouler l'édifice lors de sa pose est de $\frac{1}{k}$. On note N le nombre de dés empilés avant que l'édifice ne s'écroule (on ne comptera pas le dernier dé, responsable de la chute de l'édifice).

- **a.** Déterminer l'univers image de N que l'on le notera $N(\Omega)$.
- **b.** Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note

  A_i : « Lors de sa pose, le i-ème dé empilé n'a pas fait s'écrouler l'édifice. »

  Pour tout $k \in N(\Omega)$, écrire l'évènement $(N = k)$ à partir des évènements A_i.
- **c.** Déterminer la loi de N et vérifier qu'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) = 1$$

  .
- **d.** Montrer que $N + 1$ admet une espérance et déterminer sa valeur.
- **e.** En déduire que N admet une espérance et déterminer sa valeur.

2. On dispose de 4 dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 4. Les faces de chacun de ces 4 dés sont numérotées de 1 à 6. On lance les 4 dés simultanément. On reprend les dés avec lesquels on n'a pas obtenu 6 que l'on relance simultanément, et ainsi de suite jusqu'à avoir quatre 6 sur la table. On note T le nombre lancers effectués. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on note T_i le nombre de lancers effectués pour obtenir la face 6 avec le dé numéro i.

- **a.** Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, déterminer la loi de T_i et donner (si elles existent) son espérance et sa variance.
- **b.** Exprimer T en fonction de T_1, T_2, T_3 et T_4.
- **c.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{P}(T \leqslant k)$.
- **d.** En déduire la loi de T.

Solution.

1. a. Il faut poser au moins un dé sur un autre pour que l'édifice s'écroule donc $\boxed{N(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\boxed{(N = k) = A1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}}$.

c. D'après la formule des probabilités composées, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N = k) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k}(\overline{A_{k+1}})\\
&= 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{k!} \times \frac{k+1-1}{k+1}
\end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(N = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en faisant apparaître une somme téléscopique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(n = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) = 1}$.

d. Par le théorème de transfert, $N+1$ admet un espérance si et seulement si la série $\sum(k+1)\mathbf{P}(N = k)$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (k+1)\mathbf{P}(N = k) &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)k}{(k+1)k(k-1)!}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{N+1 \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(N+1) = e}$.

e. Comme $N = (N+1) - 1$, par linéarité de l'espérance, N admet une espéranc est $\mathbf{E}(N) = \mathbf{E}(N+1) - 1$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(N) = e - 1}$.

2. a. Soit $i \in [\![1, 4]\!]$. La succession de lancers du dé numéro i constitue un schéma de Bernoulli (éventuellement infini) en prenant comme succès « Obtenir 6 ». Ainsi, la variable T_i qui donne le rang du premier succès pour le dé numéro i suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Par théorème, $\mathbf{E}(T_i) = \frac{1}{\frac{1}{6}}$ soit $\boxed{\mathbf{E}(T_i) = 6}$ et $\mathbf{V}(T_i) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2} = \frac{5}{6} \times 6^2$ soit $\boxed{\mathbf{V}(T_i) = 30}$.

b. La variable aléatoire T est le nombre de lancers nécessaires pour que les 4 dés donnent 6 donc $\boxed{T = \max(T_1, T_2, T_3, T_4)}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(T \leqslant k) = (\max(T_1, T_2, T_3, T_4) \leqslant k) = (T_1 \leqslant k) \cap (T_2 \leqslant k) \cap (T_3 \leqslant k) \cap (T_4 \leqslant k)$$

donc, comme T_1, T_2, T_3 et T_4 sont mutuellement indépendantes et on la même loi

$$\mathbf{P}(T \leqslant k) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant k)\mathbf{P}(T_2 \leqslant k)\mathbf{P}(T_3 \leqslant k)\mathbf{P}(T_4 \leqslant k) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant k)^4.$$

Or,

$$\mathbf{P}(T_1 \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6} \underset{n=j-1}{=} \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n} = \frac{1}{6} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(T \leqslant k) = \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^4}$.

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(T \leqslant k) - \mathbf{P}(T \leqslant k-1)$$

donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{P}(T = k) = \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^4 - \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right]^4}.$$

⧫ Sujet 38

Nous allons étudier deux modèles utilisés pour décrire l'évolution d'une population.

Partie I. Modèle de Maltus

Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$:

$$(E_1) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad y'(t) = ay(t).$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1)

2. Soit $y_0 > 0$. Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

3. Soit y la solution de (E_1) déterminée dans la question **2.**.

a. Déterminer, si elle existe, la limite de y en $+\infty$.

b. Déterminer une fonction g telle que $t \longmapsto g(y(t))$ soit une fonction affine dont on exprimera les coefficients en fonction de a et de y_0.

Partie II. Modèle de Verhulst

Soit $r > 0$ et $K > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$:

$$(E_2) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

On cherchera uniquement les solutions de (E_2) à valeurs dans $]0\,;K[$ c'est-à-dire les solutions y telles que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < y(t) < K$.

1. Soit $y \in \mathscr{C}^1([0\,;+\infty[)$ une fonction à valeurs dans $]0\,;K[$. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on pose $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$. Montrer que y est solution de (E_2) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$(E_3) \quad \forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad z'(t) = -rz(t) + \frac{r}{K}.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_3).

3. Soit $y_0 \in]0\,;K[$. Déterminer la solution de (E_2) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

4. Soit y la solution de (E_2) déterminée dans la question **3.**.

a. Déterminer, si elle existe, la limite de y en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction $h : t \longmapsto \ln\left(\frac{y(t)}{K-y(t)}\right)$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est une fonction affine sur $[0\,;+\infty[$ dont on exprimera les coefficients en fonction de r, K et y_0.

Partie III : Application et identification de modèles

On observe empiriquement l'évolution de la croissance de bactéries *Lactobacillus*.

temps (heures)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (UFC.mL^{-1})	0,52	0,83	1,37	2,29	3,71	6,11	10,06

On observe empiriquement l'évolution de la croissance du nombre de plants d'algues *Fucus serratus*.

temps (jours)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (en milliers)	0,12	0,73	3,54	8,03	9,68	9,97	10,04

Les modèles étudiés ci-dessus pourraient-ils décrire l'évolution de la croissance des bactéries *Lactobacillus* ou des algues *Fucus serratus* ?

Dans chaque cas, quel modèle correspondrait alors le mieux ?

Solution.

Partie I. Modèle de Malthus

1. L'équation (E_1) est équivalente à

$$\forall t \in [0\,;+\infty[\quad y'(t) - ay(t) = 0$$

donc, par théorème, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{t \longmapsto C\mathrm{e}^{at} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.

2. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$. Alors,

$$f(0) = y_0 \iff C\mathrm{e}^0 = y_0 \iff C = y_0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E_1) \text{ telle que } y(0) = y_0 \text{ est } t \longmapsto y_0\mathrm{e}^{at}}$.

3. a. Comme $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} at = +\infty$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{at} = +\infty$. Comme $y_0 > 0$, on en déduit, par produit, que $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty}$.

b. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) > 0$ car $y_0 > 0$ et $\ln(y(t)) = \ln(y_0\mathrm{e}^{at}) = \ln(y_0) + \ln(\mathrm{e}^{at}) = \ln(y_0) + at$ donc $\boxed{t \longmapsto \ln(y(t)) \text{ est une fonction affine}}$ dont le coefficient directeur est a et l'ordonnée à l'origine est $\ln(y_0)$.

Partie II. Modèle de Verhulst

1. Comme y ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$, z est bien définie sur $[0\,;+\infty[$ et, comme y est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, z l'est aussi et, pour tout réel $t \geqslant 0$, $z'(t) = -\dfrac{y'(t)}{y(t)^2}$. Ainsi, z est solution de (E_3) si et seulement si, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$-\frac{y'(t)}{y(t)^2} = -r \times \frac{1}{y(t)} + \frac{r}{K}$$

ce qui équivaut, en multipliant par $-y(t)^2 \neq 0$, à

$$y'(t) = ry(t) - \frac{r}{K}y(t)^2$$

i.e.

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

Ainsi, on a montré que $\boxed{z \text{ est solution de } (E_3) \text{ si et seulement si } y \text{ est solution de } (E_2)}$.

2. L'équation (E_3) est équivalente à : pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $z'(t) + rz(t) = \dfrac{r}{K}$. L'équation homogène associée est (H) : pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $z'(t) + rz(t) = 0$. L'ensemble des solutions de (H) est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-rt} \mid C \in \mathbb{R}\}$

On cherche une solution particulière de (E_3) soit la forme d'une fonction constante $h : t \longmapsto a$ où $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $h'(t) + rh(t) = 0 + ra = ra$ donc, pour que h soit solution de (E_3), il suffit que $ra = \dfrac{r}{K}$ i.e. que $a = \dfrac{1}{K}$. Ainsi, $h : t \longmapsto \dfrac{1}{K}$ est une solution particulière de (E_3).

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-rt} + \frac{1}{K} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$.

3. Une fonction y est solution de (E_2) si et seulement si $\dfrac{1}{y}$ est solution de $(E_3$à ce qui équivaut à dire qu'il existe une réel C tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{y(t)} = C\mathrm{e}^{-rt} + \dfrac{1}{K} = \dfrac{CK\mathrm{e}^{-rt}+1}{K}$. Ainsi, y est solution de (E_2) si et seulement s'il existe un réel C tel que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) = \dfrac{K}{CK\mathrm{e}^{-rt}+1}$. De plus, on a alors $y(0) = \dfrac{K}{CK+1}$ donc

$$y(0) = y_0 \iff \frac{K}{CK+1} = y_0 \iff \frac{K}{y_0} = CK+1 \iff CK = \frac{K}{y_0} - 1 \iff C = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}.$$

Ainsi, $y(0) = y_0$ si et seulement si $C = \dfrac{K-y_0}{Ky_0}$ donc la solution de (E_2) telle que $y(0) = y_0$ est $y : t \longmapsto \dfrac{K}{\frac{K-y_0}{y_0}\mathrm{e}^{-rt}+1}$ soit encore

$$\boxed{y : t \longmapsto \frac{Ky_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}+y_0}}.$$

Remarque : en toute rigueur, il faudrait vérifier que la fonction obtenue est bien à valeur dans $]0\,;K[$. C'est relativement clair car $K > y_0$ donc, d'une part, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$ et, d'autre part, pour tout réel $t \geqslant 0$, $(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt} > 0$ donc $(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}+y_0 > y_0$ donc $y(t) < K$.

4. a. Comme $r > 0$, par le même raisonnement que dans la question **3.a.**, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$ donc, par produit, somme et quotient de limite, $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = K}$.

b. Remarquons que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < y(t) < K$ donc $\frac{y(t)}{K-y(t)} > 0$. Ainsi, h est bien définie sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{K-y(t)} &= \frac{Ky_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{rt}+y_0} \times \frac{1}{K - \frac{Ky_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{rt}+y_0}} \\ &= \frac{Ky_0}{K(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}+Ky_0-Ky_0} \\ &= \frac{y_0}{(K-y_0)\mathrm{e}^{-rt}} = \frac{y_0}{K-y_0}\mathrm{e}^{rt}\end{aligned}$$

donc, pour tout réel $t \geqslant 0$, $h(t) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K-y_0}\mathrm{e}^{rt}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K-y_0}\right) + \ln(\mathrm{e}^{rt})$ soit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad h(t) = rt + \ln\left(\frac{y_0}{K-y_0}\right)}.$$

Partie III : Application et identification de modèles

temps (heures)	0	2	4	6	8	10	12
quantité (UFC.mL^{-1})	0,52	0,83	1,37	2,29	3,71	6,11	10,06
ln(quantité)	−0,65	−0,19	0,31	0,83	1,31	1,81	2,31

On constate que le logarithme népérien de la quantité de bactéries a une croissance linéaire avec un taux d'accroissement d'environ 0,25 donc on peut modéliser l'évolution par le modèle de Malthus avec $a = 0{,}25$. Ainsi, on obtient que la population à l'instant t est modélisé par le fonction $y : t \longmapsto 0{,}52\mathrm{e}^{0{,}25t}$.

temps (jours)	0	2	4	6	8	10
quantité (en milliers)	0,12	0,73	3,54	8,03	9,68	9,97
ln(quantité/(1 − quantité))	$-4{,}41$	$-2{,}54$	$-0{,}6$	1.41	3,41	5,8

La population semble se stabiliser autour de $K = 10$. On constate que le logarithme népérien de la quantité divisée par 10 moins la quantité a un croissance relativement linéaire avec un taux d'accroissement d'environ 1 donc on peut modéliser l'évolution par le modèle de Verhulst avec $r = 1$. Ainsi, on obtient que la population à l'instant t est modélisée par la fonction $y : t \longmapsto \dfrac{1{,}2}{9{,}88\mathrm{e}^{-t} + 0{,}12}$.

⧫ Sujet 39

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et $(v_n)_{n\geqslant 3}$ telles que pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant n \leqslant v_n \\ f_n(u_n) = 0 \\ f_n(v_n) = 0 \end{cases}.$$

3. À l'aide d'une modélisation numérique ou graphique, conjecturer le comportement asymptotique de (u_n), (v_n), $\left(\frac{n}{v_n}\right)$.

4. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

5. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{v_n}$.

6. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 3$:

$$1 < u_n < e.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

c. Démontrer la conjecture faite sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d. Montrer que

$$\ln(u_n) \sim u_n - 1$$

et en déduire que

$$u_n - 1 \sim \frac{1}{n}.$$

Solution.

1. La fonction f_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$f_n'(x) = 1 - n \times \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x}.$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, f_n est du signe de $x - n$ donc $f_n'(x) < 0$ si $x \in]0\,;n[$, $f_n'(n) = 0$ et $f_n'(x) < 0$ si $x \in]n\,;+\infty[$.

On en déduit que f_n est strictement décroissante sur $]0\,;n]$ et strictement croissante sur $[n\,;+\infty[$.

De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(x) = -\infty$ et $n > 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -n\ln(x) = +\infty$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, pour tout $x > 0$, $f_n(x) = x\left[1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$. Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par combinaison linéaire, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - n\frac{\ln(x)}{x} = 1$ et ainsi, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

On aboutit donc au tableau suivant :

x	0	n	$+\infty$
Variation de f_n	$+\infty$ ↘	$n - n\ln(n)$	↗ $+\infty$

2. Supposons $n \geqslant 3$. Alors, $\ln(n) \geqslant \ln(e) = 1$ donc $n - n\ln(n) \leqslant 0$. Sur chacun des deux intervalles $]0\,;n]$ et $[n\,;+\infty[$, la fonction f_n est continue (car dérivable) et strictement monotone donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur $[n - n\ln(n)\,;+\infty[$. Ainsi, il existe un unique $u_n \in]0\,;n]$ et un unique $v_n \in [n\,;+\infty[$ tels que $f(u_n) = f(v_n) = 0$.

On en déduit l'existence des deux suites de l'énoncé.

3. En traçant les courbes des fonctions f_n pour différentes valeurs de n à l'aide de GeoGebra, $\boxed{\text{on peut conjecturer que } \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1,\ \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \tfrac{n}{v_n} = +\infty}$.

4. Par définition, pour tout $n \geqslant 3$, $v_n \geqslant n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f_n(v_n) = 0$ donc $v_n - n\ln(v_n) = 0$ i.e. $v_n = n\ln(v_n)$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{v_n}{n} = \ln(v_n)$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par composition, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = +\infty$. Par inverse, on conclut que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{v_n} = 0}$.

6. a. Soit un entier $n \geqslant 3$. D'une part, $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0$ et, d'autre part, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ (car $n \geqslant 3 > e$) donc, comme $f_n(u_n) = 0$, $f(1) > f_n(u_n) > f(e)$. La fonction f_n étant strictement décroissante sur $]0\,;n[$ et cet intervalle contenant les trois nombres 1, u_n et e, on en déduit que $\boxed{1 < u_n < e}$.

b. Soit un entier $n \geqslant 3$. Alors,

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1)\ln(u_n) = u_n - n\ln(u_n) - \ln(u_n) = f_n(u_n) - \ln(u_n)$$

donc, comme $f_n(u_n) = 0$, $f_{n+1}(u_n) = -\ln(u_n)$. Or, on a vu à la question précédente que $u_n > 1$ donc $\ln(u_n) > 0$ et ainsi, $f_{n+1}(u_n) < 0$. Autrement dit, $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Or, u_n et u_{n+1} appartiennent à $]0\,;n+1]$ et f_{n+1} est décroissante sur cet intervalle donc $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) est convergente. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f_n(u_n) = 0$ donc $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$. Or, la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln(u_n)} = 1$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

d. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln(u_n) = \ln(1+(u_n-1))$ et, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Dès lors, par théorème, $\boxed{\ln(u_n) \sim u_n - 1}$.

Par ailleurs, comme on l'a vu précédemment, pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$ donc, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n \sim 1$ et ainsi, par quotient d'équivalent, $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{n}$.

Par transitivité de la relation d'équivalence, on ne déduit que $\boxed{u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}}$.

⧫ Sujet 40

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Justifier que A est diagonalisable et expliciter une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. *On veillera à ce que les coefficients de P soient des entiers.*

3. Calculer P^{-1}.

4. Soit x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $x(0) = 11$, $y(0) = 7$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = -10x(t) + 18y(t) \\ y'(t) = -6x(t) + 11y(t) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une équation différentielle vérifiée par a et une équation différentielle vérifiée par b.

b. Déterminer, pour tout réel t, $a(t)$ et $b(t)$.

c. En déduire, pour tout réel t, $x(t)$ et $y(t)$.

5. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 9\mathrm{e}^{2t}$.

a. Écrire en Python une fonction qui calcule $f(t)$ où t est réel passé en entrée de la fonction.

b. Calculer $f(0{,}5)$ et $f(1)$.

c. Montrer que l'équation $f(t) = 30$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

d. En utilisant l'outil informatique, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution.

1. **Méthode 1 : par le calcul**

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -10-\lambda & 18 \\ -6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (-10-\lambda)(11-\lambda)-(-6)\times 18 \\ &= -110+10\lambda-11\lambda+\lambda^2+108 \\ &= \lambda^2-\lambda-2\end{aligned}$$

   Le discriminant du trinôme X^2-X-2 est $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-2)=9>0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 1}=-1 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 1}=2$$

   On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{-1\,;2\}}$.

   Méthode 2 : à l'aide de Python

   Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.array([[-10, 18], [-6, 11]])
print(np.linalg.eig(A))
```

   qui affiche

```
(array([-1.,  2.]), array([[-0.89442719,
    -0.83205029],
[-0.4472136 , -0.5547002 ]]))
```

   on obtient que $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{-1\,;2\}}$.

2. La matrice A est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet 2 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

   Pour déterminer P, on cherche une base de vecteurs propres de A.

   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$AV=-V \iff \begin{cases} -10X+18y=-x \\ -6x+11y=-y \end{cases} \iff \begin{cases} 18y=9x \\ 12y=6x \end{cases} \iff x=2y$$

   Ainsi, $V_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

$$AV=2V \iff \begin{cases} -10X+18y=2x \\ -6x+11y=2y \end{cases} \iff \begin{cases} 18y=12x \\ 9y=6x \end{cases} \iff y=\frac{2}{3}x$$

   . Ainsi, $V_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

   On en déduit que $\boxed{\text{si } D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ alors } A=PDP^{-1}}$.

3. Comme $\det(P) = 2\times 2 - 1\times 3 = 1$, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

4. a. Pour tout réel t,

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) - 3y(t) \\ -x(t) + 2y(t) \end{pmatrix}$$

ddnc $a(t) = 2x(t) - 3y(t)$ et $b(t) = -x(t) + 2y(t)$. On en déduit que a et b sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme combinaisons linéaires de fonctions dérivables et, pour tout réel t,

$$a'(t) = 2x'(t) - 3y'(t) = 2(-10x(t) + 18y(t)) - 3(-6x(t) + 11y(t)) = -2x'(t) + 3y'(t) = -a'(t)$$

et

$$b'(t) = -x'(t) + 2y'(t) = -(-10x(t) + 18y(t)) + 2(-6x(t) + 11y(t)) = -2x'(t) + 4y'(t) = 2b'(t).$$

Ainsi, $\boxed{a \text{ est solution de } (E_1) : z' + z = 0 \text{ et } b \text{ est solution de } (E_2) : z' - 2z = 0}$.

b. On en déduit qu'il existe une constante réelle C_1 telle que, pour tout réel t, $a(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}$. Or, $a(0) = 2x(0) - 3y(0) = 1$ donc $1 = C_1\mathrm{e}^0 = C_1$ et ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ a(t) = \mathrm{e}^{-t}}$.
De même, il existe une constante réelle C_2 telle que, pour tout réel t, $b(t) = C_2\mathrm{e}^{2t}$. Or, $b(0) = -x(0) + 2y(0) = 3$ donc $3 = C_2\mathrm{e}^0 = C_2$ et ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ b(t) = 3\mathrm{e}^{2t}}$.

c. Pour tout réel t, $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(t) + 3b(t) \\ a(t) + 2b(t) \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ x(t) = 2\mathrm{e}^{t} + 9\mathrm{e}^{2t} \text{ et } y(t) = \mathrm{e}^{-t} + 6\mathrm{e}^{2t}}$.

5. a. La fonction suivant convient :

```
from math import exp

def fonction_f(t):
  return 2*exp(-t) + 9*exp(2*t)
```

b. Par définition, $\boxed{f(0{,}5) = 2\mathrm{e}^{-0{,}5} + 9e \text{ et } f(1) = 2\mathrm{e}^{-1} + 9\mathrm{e}^{2}}$. À l'aide de la fonction précédente, on trouve $\boxed{f(0{,}5) \approx 25{,}68 \text{ et } f(1) \approx 67{,}24}$.

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composées et combinaisons linéaires de fonctions dérivables et, pour tout réel t, $f'(t) = -2\mathrm{e}^{-t} + 18\mathrm{e}^{2t}$. De plus, pour tout $t \geqslant 0$, $-t \leqslant 0$ donc, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$ et ainsi $-2\mathrm{e}^{-t} \geqslant -2$. De même, pour tout $t \geqslant 0$, $2t \leqslant 0$ donc, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2t} \geqslant 1$ et ainsi $18\mathrm{e}^{2t} \geqslant 18$. Dès lors, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) \geqslant -2 + 18 = 16$ donc $f'(t) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

On en déduit que f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ donc, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{2}\,;1\right]\right)$.

De plus, d'après la question précédente, $30 \in f\left(\left[\frac{1}{2}\,;1\right]\right)$ car $f(0{,}5) < 30$ et $f(1) > 30$ donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \text{ tel que } f(\alpha) = 30}$.

d. En programmant l'algorithme de dichotomie suivant :

```
u = 0.5
v = 1
while (v-u > 0.001):
  m=(u+v)/2
  if fonction_f(m) > 30:
    v = m
  else:
    u = m
print(m)
```

on obtient $\boxed{\alpha \approx 0{,}583}$.