⧫ Sujet 21

Soit p et q dans $]0\,;1[$ et $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

1. *Une première méthode pour déterminer les puissances de A*

a. Déterminer deux matrices B et C telles que $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.

b. Calculer B^2 et C^2. En déduire BC et CB.

c. On admet que la formule du binôme de Newton est utilisable pour des matrices M et N d'ordre 2 qui commutent, c'est-à-dire telles que $MN = NM$.

Écrire cette formule du binôme de Newton.

d. Calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 2$. On pourra noter $\alpha = 1 - p - q$.

2. Afin de tester la sensibilité aux couleurs bleu et rouge des amphibiens, on place une grenouille adulte (les têtards voient en noir et blanc) dans une boîte séparée en deux compartiments, l'un rouge et l'autre bleu. On observe les déplacements de l'animal et, à chaque minute, on note où il se trouve.

S'il était en « zone blueu » à la n-ième minute, il est passé en « zone rouge » à la minute $n+1$ avec une probabilité q. De même, s'il était en « zone rouge » à la n-ième minute, il est passé en « zone bleue » à la minute $n+1$ avec une probabilité p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n (resp. b_n) la probabilité que la grenouille soit en « zone rouge » (resp. bleue) à la minute n.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n à l'aide d'une relation matricielle.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n et b_n en fonction de r_0 et b_0 à l'aide d'une relation matricielle.

c. À l'instant initial, le grenouille est introduite en « zone bleue ». Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n et b_n en fonction de n.

d. Application numérique : on prend $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{1}{6}$.

Déterminer le comportement à l'infini de r_n et b_n.

3. *Une deuxième méthode pour déterminer les puissances de A*

a. Montrer que la matrice A est diagonalisable quelles que soient les valeurs prises par p et q.

Déterminer ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.

b. Exprimer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1. a. Soit B et C deux matrices carrées d'ordre 2. Alors,

$$\begin{aligned}\begin{cases} B+(1-p-q)C = A \\ B+C = I_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} I_2 - C + (1-p-q)C = A \\ B = I_2 - C \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} I_2 - (p+q)C = A \\ B = I_2 - C \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C = \frac{1}{p+q}(I_2 - A) \\ B = I_2 - \frac{1}{p+q}(I_2 - A) \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{B = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \text{ et } C = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}}$ vérifie $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.

b. On a

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} q^2+qp & q^2+qp \\ pq+p^2 & pq+p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} (p+q)q & (p+q)q \\ (p+q)p & (p+q)p \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{B^2 = B}$.

De même,

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p^2+qp & -pq-q^2 \\ -p^2-qp & pq+q^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p(p+q) & -q(p+q) \\ -p(p+q) & q(p+q) \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{B^2 = C}$.

Comme $B+C = I_2$, $B = C - I_2$ donc $BC = C^2 - C = C - C = 0_2$ et $CB = C^2 - C = C - C = 0_2$. Ainsi, $\boxed{BC = CB = 0_2}$.

c. La formule du binôme de Newton pour les matrices carrées d'ordre 2 s'écrit de la manière suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit M et N deux matrices carrées d'ordre 2 telles que $MN = NM$. Alors,

$$\boxed{(M+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k N^{n-k}}.$$

d. Posons $\alpha = 1-p-q$. Comme B et C commutent, il en est de même de B et αC donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour les matrices. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors

$$A^n = (B+\alpha C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (\alpha C)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} B^k C^{n-k}.$$

Si $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $k > 0$ et $n-k > 0$ donc

$$B^k C^{n-k} = B^{k-1}(BC)C^{n-k-1} = B^{k-1} 0_2 C^{n-k-1} = 0_2.$$

Ainsi, dans la somme ci-dessus, tous les termes sont nuls sauf le premier et le dernier. Ainsi,

$$A^n = \binom{n}{0}\alpha^n C^n + \binom{n}{k} B^n = B^n + \alpha^n C^n.$$

Or, comme $B^2 = B$ et $C^2 = C$, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$ et $C^n = C$ donc $A^n = B + \alpha^n C$ i.e.

$$\boxed{A^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q+\alpha^n p & q-\alpha^n q \\ p-\alpha^n p & p+\alpha^n q \end{pmatrix}}.$$

2. a. Soit $n\vec{n}\mathbb{N}$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ R_n : « la grenouille se trouve dans la zone rouge à la minute n ». Alors, R_n et $\overline{R_n}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} r_{n+1} = \mathbf{P}(R_{n+1}) &= \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(R_{n+1} \mid R_n) + \mathbf{P}(\overline{R_n})\mathbf{P}(R_{n+1} \mid R_n) \\ &= r_n \times (1-p) + b_n \times q = (1-p)r_n + qb_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid R_n) + \mathbf{P}(\overline{R_n})\mathbf{P}(B_{n+1} \mid R_n) \\ = r_n \times p + b_n \times (1-q) = pr_n + (1-q)b_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)r_n + qb_n \\ pr_n \\ (1-q)b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}}.$$

b. La suite $\left(\begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}\right)$ est donc une suite géométrique de matrices de raison A donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ b_n \end{pmatrix}},$$

c. Comme la grenouille se trouve initialement dans la zone bleue, $\begin{pmatrix} r_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q+\alpha^n p & q-\alpha^n q \\ p-\alpha^n p & p+\alpha^n q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-\alpha^n q \\ p+\alpha^n q \end{pmatrix}$$

donc $r_n = \dfrac{q-\alpha^n q}{p+q}$ et $b_n = \dfrac{p+\alpha^n q}{p+q}$. De plus, on vérifie que ces expressions sont encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ car $\dfrac{q-\alpha^0 q}{p+q} = 0 = r_0$, $\dfrac{p+\alpha^0 q}{p+q} = 1 = b_0$, $\dfrac{q-\alpha^1 q}{p+q} = \dfrac{q(1-(1-p-q))}{p+q} = q = r_1$ et $\dfrac{p+\alpha^1 q}{p+q} = \dfrac{p+(1-p-q)q}{p+q} = \dfrac{p+q-(p+q)q}{p+q} = 1-q = b_1$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ r_n = \dfrac{q-\alpha^n q}{p+q} \text{ et } b_n = \dfrac{p+\alpha^n q}{p+q}}$.

d. Comme $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{1}{6}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ donc, comme $|\alpha| < 1$, $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par produits et sommes de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{q}{p+q} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{p}{p+q}}$.

3. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (1-p-\lambda)(1-q-\lambda) - pq \\ &= 1-q-\lambda-p+pq+p\lambda-\lambda+q\lambda+\lambda^2-pq \\ &= \lambda^2-(\alpha+1)\lambda+\alpha\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $P = X^2-(\alpha+1)^2X+\alpha$ est

$$\Delta = (-(\alpha+1))^2 - 4\alpha = \alpha^2+2\alpha+1-4\alpha = \alpha^2-2\alpha+1 = (\alpha-1)^2.$$

Comme $p > 0$ et $q > 0$, $p+q > 0$ donc $\alpha = 1-p-q < 1$. Ainsi, $\Delta > 0$ donc P possède deux racines distinctes. Ainsi, A possède deux valeurs propres distinctes donc, comme A est d'ordre 2, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$. De plus, les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = \frac{\alpha+1-\sqrt{(\alpha-1)^2}}{2} = \frac{\alpha+1-|\alpha-1|}{2} = \frac{\alpha+1-(1-\alpha)}{2} = \alpha$$

et

$$\lambda_2 = \frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha-1)^2}}{2} = \frac{\alpha+1+|\alpha-1|}{2} = \frac{\alpha+1+(1-\alpha)}{2} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\,;\alpha\}}$.

Déterminons des vecteurs propres. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-p)x+qy = x \\ px+(1-q)y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -px+qy = 0 \\ px-qy = 0 \end{cases} \iff y = \frac{p}{q}x.$$

Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } 1}$.

De même,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-p)x+qy = \alpha x \\ px+(1-q)y = \alpha y \end{cases} \iff \begin{cases} qx+qy = 0 \\ px+py = 0 \end{cases} \iff y = -x.$$

Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \alpha}$.

4. En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $A = PDP^{-1}$. Par propriété, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = -(p+q)$ donc $P^{-1} = -\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -p & q \end{pmatrix} = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^n p & -\alpha^n q \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{A^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q+\alpha^n p & q-\alpha^n q \\ p-\alpha^n p & p+\alpha^n q \end{pmatrix}}.$$

⧫ Sujet 22

On étudie une partie de la surface du fond de l'océan sur laquelle poussent uniquement deux algues : l'algue A et l'algue B. La quantité totale d'algues est supposée constante au cours du temps, égale à 1000 algues. On sait que, chaque année,

- 5% des algues A et 10% des algues B meurent ;
- la moitié des algues qui meurent sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre d'algues A en vie à la fin de l'année n et b_n le nombre d'algues B en vie à la fin de l'année n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

où $M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M, de n et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que 1 est une valeur propre de M.

4. Montrer que M admet une autre valeur propre $\lambda \in [0\,;1[$.

5. En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, u_0, v_0, n et D.

7. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. On note a_∞ et b_∞ leurs limites.

8. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

9. Donner deux méthodes différentes pour calculer $a_\infty + b_\infty$.

10. En déduire que $u_0 = \dfrac{2000}{3}$.

11. Montrer que $a_\infty = \dfrac{2000}{3}$ et $b_\infty = \dfrac{1000}{3}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Au cours de l'année n, $0{,}05a_n$ algues A et $0{,}1b_n$ algues B meurent. Ainsi, le nombre total d'algues qui meurent est $0{,}05a_n + 0{,}1b_n$. Le moitié de celles-ci sont remplacées par des algues A et l'autre moitié par des algues B donc

$$a_{n+1} = a_n - 0{,}05a_n + 0{,}5(0{,}05a_n + 0{,}1b_n) = 0{,}975a_n + 0{,}05b_n$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0{,}1b_n + 0{,}5(0{,}05a_n + 0{,}1b_n) = 0{,}025a_n + 0{,}95b_n.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}975a_n + 0{,}05b_n \\ 0{,}025a_n + 0{,}95b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0{,}975 & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 \end{pmatrix}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation.** $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ donc H_0 est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

donc H_{n+1} est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}}.$$

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{cases} 0{,}975x + 0{,}05y = x \\ 0{,}025x + 0{,}95y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}025x + 0{,}05y = 0 \\ 0{,}025x - 0{,}05y = 0 \end{cases} \iff 0{,}05y = 0{,}025x \iff y = 0{,}5x$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne non nulle telle que $MX = X$ donc on conclut que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$.

4. **1^re méthode : par le calcul.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 0{,}975 - \lambda & 0{,}05 \\ 0{,}025 & 0{,}95 - \lambda \end{vmatrix} = (0{,}975 - \lambda)(0{,}95 - \lambda) - 0{,}025 \times 0{,}05 \\ &= \lambda^2 - 1{,}925\lambda + 0{,}925 \end{aligned}$$

Comme 1 est valeur propre, 1 est racine du trinôme $X^2 - 1{,}925X + 0{,}925$ et ainsi ce trinôme se factorise par $X - 1$. On obtient $X^2 - 1{,}925X + 0{,}925 = (X - 1)(X - 0{,}925)$. Ainsi, l'autre valeur propre de M est $\boxed{\lambda = 0{,}925}$.

2^de méthode : détermination à l'aide de Python
Grâce au code suivant,

```python
import numpy as np

M = np.array([[0.975, 0.05], [0.025, 0.95]])
print(np.linalg.eig(M))
```

qui affiche

```
(array([1., 0.925]), array([[ 0.89442719,
   -0.707106
78], [[ 0.4472136 ,  0.70710678]]))
```

Ainsi, l'autre valeur propre de M est $\boxed{\lambda = 0{,}925}$.

5. Comme M est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet 2 valeurs propres distinctes, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$. On a vu dans la question **3.** que $E_1(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right)$. Déterminons $E_{0{,}925}(M)$. Pour cela, on considère le système :

$$\begin{cases} 0{,}975x + 0{,}05y = 0{,}925x \\ 0{,}025x + 0{,}95y = 0{,}925y \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}05x + 0{,}05y = 0 \\ 0{,}025x + 0{,}025y = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

donc $E_{0{,}925}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que $\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}925 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1}M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Or, comme $M = PDP^{-1}$, par propriété, $M^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1}(PD^nP^{-1}) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = (P^{-1}P)D^n \left(P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}\right) = I_2 D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}$.

7. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}925^n \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}925^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0{,}925 v_0 \end{pmatrix}$$

donc $u_n = u_0$ et $v_n = 0{,}925^n v_0$. Ainsi, (u_n) est constante égale à u_0 et (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}925 \in [0\,;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Or, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ 0{,}5u_n + v_n \end{pmatrix}$ donc $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = 0{,}5u_n + v_n$. Ainsi, par somme de limites, on en déduit que (a_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = u_0}$ et que (b_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0{,}5u_0}$.

8. On a vu que $\begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0{,}5u_0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \in E_1(M)$. Ainsi, on conclut que

$\boxed{\begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

9. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1000$ donc, par passage à la limite, $a_\infty + b_\infty = 1000$. D'autre part, $a_\infty + b_\infty = u_0 + 0{,}5u_0 = 1{,}5u_0$. Ainsi, $a_\infty + b_\infty = 1000$. D'autre part, $\boxed{a_\infty + b_\infty = 1000 = 1{,}5u_0}$.

10. On en déduit que $u_0 = \dfrac{1000}{1{,}5}$ i.e. $\boxed{u_0 = \dfrac{2000}{3}}$.

11. D'après ce qui précède, $\boxed{a_\infty = u_0 = \dfrac{2000}{3} \text{ et } b_\infty = 0{,}5u_0 = \dfrac{1000}{3}}$.

⧫ Sujet 23

1. On considère la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par $H(x) = 1 - 10x^9 + 9x^{10}$.

a. Étudier les variations de H sur $[0\,;1]$.

b. Montrer que H réalise une bijection de $[0\,;1]$ vers un ensemble à déterminer.

c. Avec $\varepsilon = 0{,}025$, déterminer graphiquement a et b tels que $H(a) = 1 - \varepsilon$ et $H(b) = \varepsilon$. *(On pourra utiliser GeoGebra)*

d. Déterminer t_1 et t_2 tels que $H(\mathrm{e}^{-t_1}) = \varepsilon$ et $H(\mathrm{e}^{-t_2}) = 1 - \varepsilon$.

2. Dix imprimantes équipent une usine. Cette usine est fonctionnelle si au moins 9 de ces machines fonctionnent.

Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on appelle D_k la variable aléatoire donnant le temps de fonctionnement, en année, de la k-ème imprimante.

Les 10 variables aléatoires D_k sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle.

La durée moyenne de fonctionnement d'une imprimante est de 5 ans.

a. Déterminer la fonction de répartition de la loi exponentielle.

b. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, la probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins t années.

3. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note N_t la variable aléatoire donnant le nombre d'imprimantes qui fonctionnent au temps t.

Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier $n \in [\![0, 10]\!]$,

$$\mathbf{P}(N_t = n) = \binom{10}{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^n \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10-n}.$$

4. Soit D la variable aléatoire donnant le nombre d'années de fonctionnement de l'usine.

a. Déterminer la fonction de répartition de D.

b. Déterminer un intervalle de temps $I = [u\,;v]$ tel que $\mathbf{P}(D \in I) = 0{,}95$.

Solution.

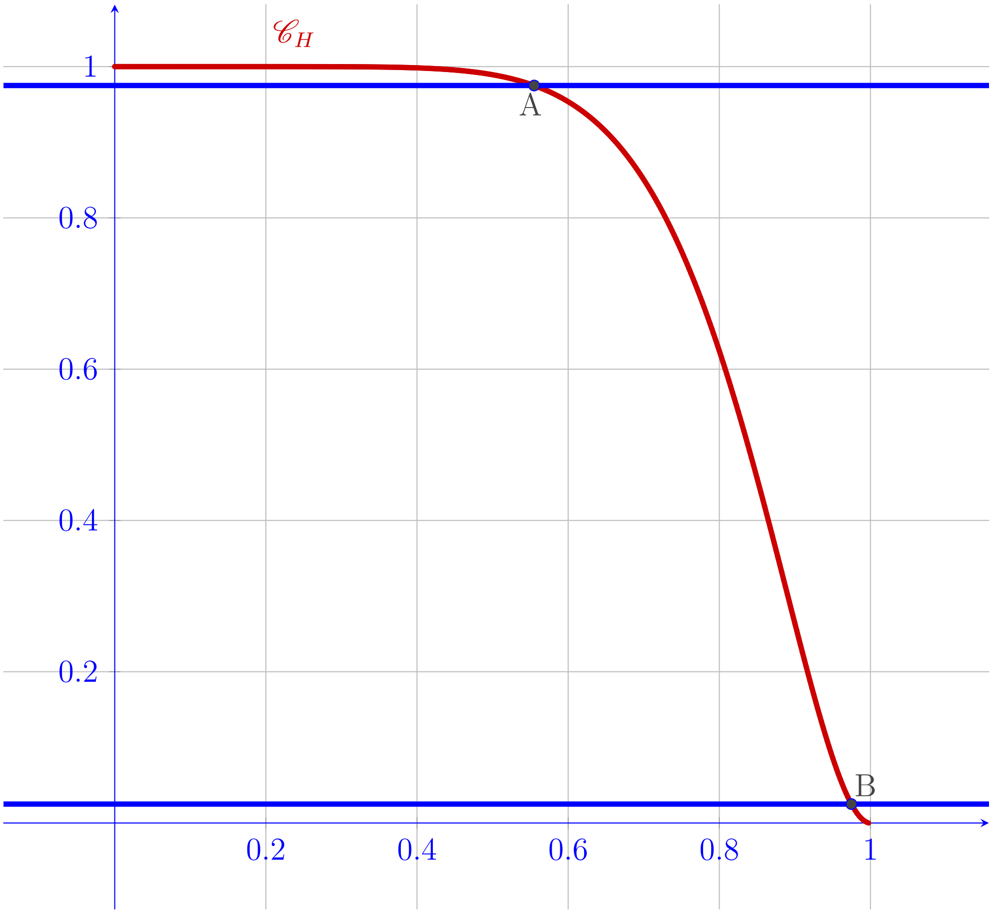
1. a. La fonction H est un polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,;1]$ et, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$H'(x) = -90x^8 + 90x^9 = 90x^8(x-1).$$

Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $x^8 \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$ donc $H'(x) \leqslant 0$. De plus, H' ne s'annule qu'en 0 et 1 donc $\boxed{H \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;1]}$.

b. La fonction H est continue (car elle est dérivable) et strictement décroissante sur $[0\,;1]$. De plus, $H(0) = 1$ et $H(1) = 0$ donc, par le théorème de la bijection continue, $\boxed{H \text{ réalise une bijection de } [0\,;1] \text{ dans lui-même}}$.

c. On trace, à l'aide de GeoGebra, la courbe de H et les droites d'équation $y = 0{,}025$ et $y = 0{,}975$.



Les points d'intersection A et B ont pour abscisses respectives environ 0,555 et 0,975 donc $\boxed{a \approx 0{,}555 \text{ et } b \approx 0{,}975}$.

d. Comme H est bijective,

$$H(\mathrm{e}^{-t}) = 0{,}025 \iff \mathrm{e}^{-t} = b \iff -t = \ln(b) \iff t = -\ln(b).$$

Ainsi, $\boxed{t_1 = -\ln(b) \approx 0{,}025}$.

De la même façon, $\boxed{t_2 = -\ln(a) \approx 0{,}589}$.

2. a. Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout réel x,

- si $x < 0$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = 0$;

- si $x \geqslant 0$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est définie par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}.$$

b. Soit un réel $t \geqslant 0$. La probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins t années est

$$\mathbf{P}(D_1 \geqslant t) = 1 - \mathbf{P}(D_1 < t) = 1 - F_{D_1}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

(la deuxième égalité découlant du fait que D_1 est une variable aléatoire à densité donc $\mathbf{P}(D_1 < t) = \mathbf{P}(D_1 \leqslant t)$).

La durée de vie moyenne d'une imprimante est 5 ans donc $\mathbf{E}(D_1) = 5$ i.e. $\frac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = \frac{1}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité qu'une imprimante fonctionne au moins } t \text{ années est } \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}}$.

3. Soit $t \geqslant 0$. Notons X_k la variable aléatoire valant 1 si l'imprimante k fonctionne au temps t et 0 sinon. Ainsi, X_k est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$. De plus, $N_t = \sum_{k=1}^{10} X_k$ et les variables aléatoires X_k sont indépendantes car les durées de vies D_k sont indépendantes. Ainsi, N_t suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.
On conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in [\![0, 10]\!] \quad \mathbf{P}(N_t = n) = \binom{10}{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^n \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10-n}}.$$

4. a. Par définition, pour tout réel $t < 0$, $\mathbf{P}(D \leqslant t) = 0$. De plus, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D \leqslant t) &= \mathbf{P}(N_t < 9) = 1 - \mathbf{P}(N_t = 9) - \mathbf{P}(N_t = 10) \\
&= 1 - \binom{10}{9}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right) - \binom{10}{10}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \\
&= 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right) - \left(e^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \\
&= 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 + 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} - \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} \\
&= 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 + 9\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10}
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_D de D est définie par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - 10\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^9 + 9\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)^{10} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

5. Comme D est une variable aléatoire à densité, pour tous réels a et b,

$$\mathbf{P}(D \in [u\,;v]) = \mathbf{P}(D \leqslant v) - \mathbf{P}(D < u) = \mathbf{P}(D \leqslant v) - \mathbf{P}(D \leqslant u) = F_D(v) - F_D(u).$$

Or, pour tout $t \geqslant 0$, $-t \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-t} \in [0\,;1]$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $F_D(t) = H(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}})$.
On déduit alors de la question **1.** que

$$\mathbf{P}(D \in [5t_1\,;5t_2]) = H(\mathrm{e}^{-t_2}) - H(\mathrm{e}^{-t_1}) = 1 - 0{,}025 - 0{,}025 = 0{,}95.$$

Ainsi, l'intervalle $\boxed{I = [5t_1\,;5t_2] \approx [0{,}125\,;2{,}945] \text{ convient}}$.

⧫ Sujet 24

Soit μ et K deux réels strictement positifs. On considère la fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}.$$

On considère également la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $x_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

1. Étude de la fonction f

a. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

b. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer f'.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$. On y fera apparaître la limite de f en $+\infty$.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a. Quelle information nous apporte le résultat de la question **1.a.** concernant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b. On suppose dans cette question que $x_0 \leqslant \frac{K}{\mu}$.

i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$.

ii. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Que se passe-t-il si $x_0 > \frac{K}{\mu}$?

3. Application

On étudie l'évolution de la population de cerfs dans une forêt. On suppose qu'au début de chaque année d'observation $n \in \mathbb{N}$, le nombre de cerfs vivant dans cette forêt est donné par x_n.

a. On suppose ici que $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 2$.

Que peut-on dire de l'évolution de la population de cerfs de cette forêt au fil des ans ?

b. Même question lorsque $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 20$.

c. Même question lorsque $x_0 = 20$, $K = 100$ et $\mu = 200$.

Solution.

1. Étude de la fonction f

a. Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} = x \iff x\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} - x = 0 \iff c\left(\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} - 1\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} = 1 \iff x = 0 \text{ ou } 1 - \frac{\mu}{K}x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{K}{\mu} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = x \text{ est } \{0\,;\tfrac{K}{\mu}\}}$.

b. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x} + x \times \left(-\frac{\mu}{K}\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}\right)$$

donc $\boxed{f'(x) = \left(1 - \tfrac{\mu}{K}x\right)\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x}}$.

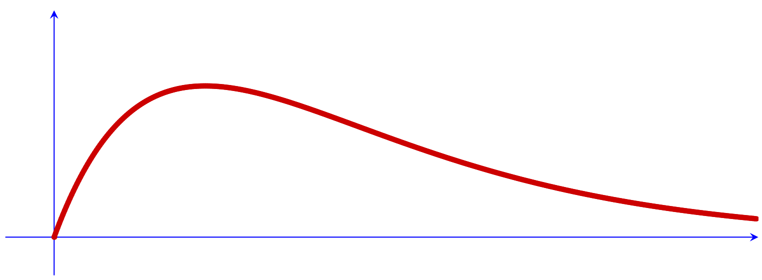
c. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positive, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - \frac{\mu}{K}x$. Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[0\,;\frac{K}{\mu}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[\frac{K}{\mu}\,;+\infty\right[$. On en déduit donc que f est croissante sur $\left[0\,;\frac{K}{\mu}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{K}{\mu}\,;+\infty\right[$.

De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = e \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{\mu}{K}x}}$. Or, comme $\frac{\mu}{K} > 0$, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mu}{K}x}}{x} = +\infty$ donc, par inverse et produit par une constante, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	0	$\frac{K}{\mu}$	$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$ $\frac{K}{\mu}$ $\searrow$	0

d. On obtient une courbe dont l'allure est la suivante.



2. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a. Si (x_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+$ alors (x_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Or, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$ donc, par unicité de la limite de (x_{n+1}), $f(\ell) = \ell$.

Ainsi, d'après la question **1.a.**, $\boxed{\text{si } (x_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } \ell = 0 \text{ ou } \ell = \tfrac{K}{\mu}}$.

b. i. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$ ».

Initialisation. Par hypothèse, $x_0 > 0$ et $x_0 \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$ et, comme f est croissante sur $\left[0\,;\frac{K}{\mu}\right]$, $f(0) \leqslant f(x_n) \leqslant f(\frac{K}{\mu})$ i.e. $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{K}{\mu}}.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $x_n \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc, comme $\frac{\mu}{K} > 0$, $\frac{\mu}{K}x_n \leqslant 1$ et ainsi $1 - \frac{\mu}{K}x_n \geqslant 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x_n} \geqslant 1$ donc, en multipliant par $x_n \geqslant 0$, $x_n\mathrm{e}^{1-\frac{\mu}{K}x_n} \geqslant x_n$ i.e. $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$.

iii. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{K}{\mu}$ donc elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de la limite monotone. De plus, comme (x_n) est à valeurs positives, $\ell \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après la question **2.a.**, ℓ vaut 0 ou $\frac{K}{\mu}$. Or, comme (x_n) est croissante, elle est minorée par $x_0 > 0$ donc $\ell \geqslant x_0 > 0$. Ainsi, $\ell \neq 0$ donc $\ell = \frac{K}{\mu}$.

On conclut que donc que $\boxed{(x_n) \text{ converge et que } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{K}{\mu}}$.

c. Si $x_0 > \frac{K}{\mu}$ alors, d'après l'étude de f, $x_1 = f(x_0) \leqslant \frac{K}{\mu}$ donc, d'après ce qui précède, la suite (x_{n+1}) (dont le premier terme est x_1 et qui vérifie la même relation de récurrence que (x_n)) et croissante et converge vers $\frac{K}{\mu}$.

Dès lors, $\boxed{(x_n) \text{ est croissante à partir du rang 1 et converge vers } \frac{K}{\mu}}$.

3. Application

a. Ici, $\frac{K}{\mu} = 50 \geqslant x_0$ donc la population de cerfs va croire et tendre vers 50.

b. Ici, $\frac{K}{\mu} = 5 \leqslant x_0$ donc la population de cerfs va décroître la première année puis croître et tendre vers 5. (Remarque. Dans ce cas, $f(x_0) \approx 1$ donc on imagine que des individus extérieurs à la forêt vont y venir durant l'année 1...)

c. Dans ce cas, $\frac{K}{\mu} = 0{,}5 < 1$ donc la population de cerfs s'éteint dès la première année.

⧫ Sujet 25

Soit a un nombre entier naturel non nul. Une urne contient a boules blanches et a boules noires.

On pioche une boule de l'urne.

- Si elle est blanche, on la replace dans l'urne.
- Si elle est noire, on la remplace par une blanche.

On répète cette expérience.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'évènement « on obtient une boule blanche au i-ème tirage ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées au bout de n tirages.

1. Déterminer $X_1(\Omega)$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega)$.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = 0)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, a]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{a+k}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \frac{a-k+1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1).$$

5. Montrer que la suite $(\mathbf{P}(X_n = a))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puis convergente.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2a\mathbf{E}(X_n) = (2a-1)\mathbf{E}(X_{n-1}) + a$.

7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \mathbf{E}(X_n)$.

a. Montrer que la suite $(e_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

Solution.

1. Si on tire une boule blanche au premier tirage alors $X_1 = 0$ et, sinon, $X_1 = 1$. Ainsi, $\boxed{X_1(\Omega) = \{0\,;1\}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Au bout de n tirages, on a tiré entre 0 et $\min(n, a)$ boules noires donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, \min(n, a)]\!]}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(X_n = 0) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ donc, par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = 0) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) \cdots \mathbf{P}(B_n \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, a]\!]$. L'évènement $(X_n = k)$ est réalisé si et seulement si on a tiré k boules noires lors des $n-1$ premiers tirages et on tire une boule blanche au n-ème tirage ou si on a tiré $k-1$ boules noires au cours des $n-1$ premiers tirages et on tire une boule noire au n-ième tirage. Autrement dit,

$$(X_n = k) = [(X_{n-1} = k) \cap B_n] \cup \left[(X_{n-1} = k-1) \cap \overline{B_n}\right]$$

donc, comme cette union est disjointe (puisque les deux évènements $(X_{n-1} = k)$ et $(X_{n-1} = k-1)$ sont incompatibles),

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\mathbf{P}(B_n \mid X_{n-1} = k) + \mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)\mathbf{P}(\overline{B_n} \mid X_{n-1} = k-1).$$

Or, si $(X_{n-1} = k)$ est réalisé alors on a tiré k boules noires au cours des $n-1$ premier tirage donc, au moment du n-ème tirage, l'urne contient $a+k$ boules blanches et, ainsi, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(B_n \mid X_{n-1} = k) = \frac{a+k}{2a}$. De même, si $(X_{n-1} = k-1)$ est réalisé alors on a tiré $k-1$ boules noires au cours des $n-1$ premier tirage donc, au moment du n-ème tirage, l'urne contient $a-(k-1)$ boules blanches et, ainsi, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(\overline{B_n} \mid X_{n-1} = k-1) = \frac{a-k+1}{2a}$.
On conclut donc que

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{a+k}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \frac{a-k+1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant ce qui précède avec $k = a$, on obtient

$$\mathbf{P}(X_n = a) = \mathbf{P}(X_{n-1} = a) + \frac{1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = a-1).$$

Or, $\frac{1}{2a}\mathbf{P}(X_{n-1} = a-1) \geqslant 0$ donc $\mathbf{P}(X_n = a) \geqslant \mathbf{P}(X_{n-1} = a)$. On conclut donc que la suite $\boxed{(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.
Or, par définition d'une probabilité, $(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 donc, on déduit du théorème de la limite monotone que $\boxed{(\mathbf{P}(X_n = a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question **4**, pour tout $k \in [\![1, a]\!]$,

$$2ak\mathbf{P}(X_n = k) = k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + k(a-k+1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{a} 2ak\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{a} \left[k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + k(a-k+1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)\right].$$

Par linéarité de la somme puis grâce au changement d'indice $j = k - 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 2a\sum_{k=1}^{a} k\mathbf{P}(X_n = k) &= \sum_{k=1}^{a} k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{k=1}^{a} k(a-k+1)\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{a} k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{j=0}^{a-1} (j+1)(a-j)\mathbf{P}(X_{n-1} = j) \end{aligned}$$

En remarquant que, dans les deux premières somme, le terme en $k = 0$ est nul et que, dans le troisième, le terme en $j = a$ est nul, on obtient

$$\begin{aligned} 2a\sum_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{a} k(a+k)\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{j=0}^{a} (j+1)(a-j)\mathbf{P}(X_{n-1} = j) \\ &= \sum_{k=0}^{a} \left[k(a+k) + (k+1)(a-k)\right]\mathbf{P}(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{a} \left[(2a-1)k + a\right]\mathbf{P}(X_{n-1} = k) \\ &= (2a-1)\sum_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_{n-1} = k) + a\sum_{k=0} \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \end{aligned}$$

Or, $X_n(\Omega)$ et $X_{n-1}(\Omega)$ sont tous les deux inclus dans $[\![0, a]\!]$ donc $\sum\limits_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{E}(X_n)$, $\sum\limits_{k=0}^{a} k\mathbf{P}(X_{n-1} = k) = \mathbf{E}(X_{n-1})$ et $\sum\limits_{k=0}^{a} \mathbf{P}(X_n = k) = 1$ donc on conclut que

$$\boxed{2a\mathbf{E}(X_n) = (2a-1)\mathbf{E}(X_{n-1}) + a.}$$

7. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question précédente,

$$e_{n+1} - a = \mathbf{E}(X_{n+1}) - a = \frac{2a-1}{2a}\mathbf{E}(X_n) + \frac{1}{2} - a = \frac{2a-1}{2a}e_n + \frac{a}{2a} - \frac{2a^2}{2a} = \frac{2a-1}{2a}(e_n - a).$$

Ainsi, $\boxed{(e_n - a)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{2a-1}{2a}}$.

b. Comme X_0 est une variable aléatoire certaine égale à 0, $e_0 = \mathbf{E}(X_0) = 0$ donc $e_0 - a = -a$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n - a = -a\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)^n$ donc $e_n = a - a\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)^n$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{E}(X_n) = a\left[1 - \left(\frac{2a-1}{2a}\right)^n\right]}.$$

⧫ Sujet 26

Le sujet traite d'une réaction chimique avec plusieurs réactifs.

Initialement, la concentration en benzène est de 0,2 mol.L^{-1}, la concentration en produit 1 est 0 mol.L^{-1} et la concentration en produit 2 est 0 mol.L^{-1}.

On note C la concentration en benzène.

- Si $\ln(C)$ est une fonction affine de t alors on dit que la réaction est d'ordre 1.
- Si $\dfrac{1}{C}$ est une fonction affine de t alors on dit que la réaction est d'ordre 2.

1. On observe les valeurs suivantes de C en fonction de t.

t	0	10	20	50	100	200	300
C	0,2	0,179	0,161	0,115	0,0666	0,0222	0,007

Déterminer l'ordre de cette réaction chimique.

2. On appelle maintenant x la concentration en benzène, y la concentration en produit 1 et z celle en produit 2, fonctions du temps t.

Ces fonctions vérifient, pour tout réel $t \geqslant 0$, le système

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = -K_1 x(t)\ (E_1) \\ y'(t) = -K_2 y(t) + K_1 x(t)\ (E_2) \\ z'(t) = -K_2 z(t)\ (E_3) \end{cases}.$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles distinctes et strictement positives. Déterminer les solutions de (E_1).

3. Proposer une valeur de K_1 en accord avec les valeurs expérimentales.

Une première version (analyse)

4. **a.** Montrer que y vérifie une équation différentielle notée (E_4).

b. Résoudre (E_4). On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\mathrm{e}^{-K_1 t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

5. Spit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}$ et $g(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1} f(t)$.

À quoi correspond la fonction g ?

6. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

Une seconde version (algèbre linéaire)

7. **a.** Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

Écrire le système (S) sous la forme matricielle $X'(t) = AX(t)\ \ (E)$.

b. Donner ensuite une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

c. On pose, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X_1(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_1'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$.

Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, la forme générale de $X_1(t)$.

d. En déduire, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X(t)$.

Solution.

1.

t	0	10	20	50	100	200	300
C	0,2	0,179	0,161	0,115	0,0666	0,0222	0,007
$\ln(C)$	$-1{,}61$	$-1{,}72$	$-1{,}83$	$-2{,}16$	$-2{,}71$	$-3{,}81$	$-4{,}96$
$\frac{1}{C}$	5	5,59	6,21	8,70	15,02	45,05	142,86

On constate que, lorsque t augmente de $10k$, les valeurs de $\ln(C)$ diminue de $0{,}11k$ donc $\ln(C)$ est une fonction linéaire de t (et ce n'est pas le cas pour $\frac{1}{C}$).

Ainsi, $\boxed{\text{la réaction est d'ordre 1}}$.

2. L'équation (E_1) est équivalente à $x'(t) + K_1 x(t) = 0$ donc, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-K_1 t} \mid A \in \mathbb{R}\}}$.

3. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $x(t) = A\mathrm{e}^{-K_1 t}$. De plus, $x(0) = 0{,}2$ donc $A = 0{,}2$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln(x(t)) = \ln(0{,}2) - K_1 t$ donc $-K_1$ est le coefficient de directeur de la fonction de la fonction affine $t \longmapsto \ln(x(t))$. Or, d'après la question **1.**, ce coefficient directeur est environ égale à $-\dfrac{0{,}11}{10} = -0{,}011$. Ainsi, $\boxed{K_1 \approx 0{,}011}$.

4. a. La fonction y vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$, $(E_4) : y'(t) + K_2 y(t) = 0{,}2K_1\mathrm{e}^{-K_1 t}$.

b. L'équation homogène associée à (E_4) est $(H) : y' + K_2 y = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \longmapsto B\mathrm{e}^{-K_2 t} \mid B \in \mathbb{R}\}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : t \longmapsto a\mathrm{e}^{-K_1 t}$. Alors, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$h'(t) + K_2 h(t) = -aK_1\mathrm{e}^{-K_1 t} + aK_2\mathrm{e}^{-K_1 t} = a(K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-K_1 t}$$

donc, pour que h soit solution de (E_4), il suffit que $a(K_2 - K_1) = 0{,}2K_1$ i.e. $a = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}$.

Ainsi, $h : t \longmapsto \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\mathrm{e}^{-K_1 t}$ est une solution particulière de (E_4).

On conclut que l'ensemble de solutions des (E_4) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \frac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\mathrm{e}^{-K_1 t} + B\mathrm{e}^{-K_2 t} \;\middle|\; B \in \mathbb{R}\right\}.}$$

5. Ainsi, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel t, $y(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\mathrm{e}^{-K_1 t} + B\mathrm{e}^{-K_2 t}$. De plus, $y(0) = 0$ donc $\dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1} + B = 0$ i.e. $B = -\dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) = \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\left(\mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}\right)$ donc $\boxed{g = y}$.

6. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composées de fonctions dérivables et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = -K_1\mathrm{e}^{-K_1 t} + K_2\mathrm{e}^{-K_2 t} = \mathrm{e}^{-K_2 t}\left(K_2 - K_1\mathrm{e}^{(K_2 - K_1)t}\right).$$

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-K_1 t} > 0$ donc, comme $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$,

$$f'(t) \geqslant 0 \iff K_2 - K_1\mathrm{e}^{(K_2 - K_1)t} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{(K_2 - K_1)t} \leqslant \frac{K_2}{K_1} \iff (K_2 - K_1)t \leqslant \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right).$$

On en déduit que si $K_1 < K_2$ alors

$$f'(t) \geqslant 0 \iff t \leqslant \frac{1}{K_2 - K_1} \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$$

et, si $K_1 > K_2$ alors

$$f'(t) \geqslant 0 \iff t \geqslant \frac{1}{K_2 - K_1} \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right).$$

Posons $t_0 = \dfrac{1}{K_2 - K_1} \ln\left(\dfrac{K_2}{K_1}\right)$. Notons que, si $K_1 < K_2$, $K_2 - K_1 > 0$ et $\ln\left(\dfrac{K_2}{K_1}\right) > 0$ donc $t_0 > 0$ et, si $K_1 < K_2$, $K_2 - K_1 < 0$ et $\ln\left(\dfrac{K_2}{K_1}\right) < 0$ donc $t_0 > 0$. Ainsi, dans tous les cas $t_0 > 0$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{si } K_1 < K_2,\ f \text{ est croissante sur } [0\,;t_0] \text{ et décroissante sur } [t_0\,;+\infty[}$ et, $\boxed{\text{si } K_1 > K_2,\ f \text{ est décroissante sur } [0\,;t_0] \text{ et croissante sur } [t_0\,;+\infty[}$.

7. a. L'écriture matricielle du système (S) est, pour tout réel $t \geqslant 0$, $X'(t) = AX(t)$ où

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 & 0 \\ K_1 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 \end{pmatrix}}.$$

b. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-K_1\,;-K_2\}$.

Déterminons les sous-espaces propres. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors, comme $K_1 \neq K_2$,

$$AX = -K_1X \iff \begin{cases} -K_1a = -K_1a \\ K_1a - K_2b = -K_1b \\ -K_2c = -K_1c \end{cases} \iff \begin{cases} K_1a = (K_2 - K_1)b \\ (K_1 - K_2)c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = \dfrac{K_1}{K_2 - K_1}a \\ c = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre $-K_1$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} K_2 - K_1 \\ K_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même,

$$AX = -K_2X \iff \begin{cases} -K_1a = -K_2a \\ K_1a - K_2b = -K_2b \\ -K_2c = -K_2c \end{cases} \iff \begin{cases} (K_2 - K_1)a = 0 \\ K_1a = 0 \end{cases}$$
$$\iff a = 0.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre $-K_2$ est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est $1+2=3$ donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ en posant

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} K_2 - K_1 & 0 & 0 \\ K_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

c. Pour tout réel t, $X'(t) = AX(t) = (PDP^{-1})X(t)$ donc, en multipliant à gauche par P^{-1}, $P^{-1}X'(t) = D(P^{-1}X(t))$ i.e. $X_1'(t) = DX_1(t)$. Ainsi,

$$\begin{cases} x_1'(t) = -K_1 x_1(t) \\ y_1'(t) = -K_2 y_1(y) \\ z_1'(t) = -K_2 z_1(t) \end{cases}$$

donc il existe des constantes α, β et γ telles que, pour tout réel t, $x_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{-K_1 t}$, $y_1(t) = \beta \mathrm{e}^{-K_2 t}$ et $z_1(t) = \gamma \mathrm{e}^{-K_2 t}$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\boxed{X_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{-K_1 t} \\ \beta \mathrm{e}^{-K_2 t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-K_2 t} \end{pmatrix}}.$$

d. Dès lors, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$X(t) = PX_1(t) = \begin{pmatrix} K_2 - K_1 & 0 & 0 \\ K_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{-K_1 t} \\ \beta \mathrm{e}^{-K_2 t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-K_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-K_1 t} \\ \alpha K_1 \mathrm{e}^{-K_1 t} + \beta \mathrm{e}^{-K_2 t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-K_2 t} \end{pmatrix}$$

De plus, $X(0) = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} \alpha(K_2 - K_1) = 0{,}2 \\ \alpha K_1 + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{0{,}2}{K_2 - K_1} \\ \beta = -\frac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1} \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on conclut que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} 0{,}2\mathrm{e}^{-K_1 t} \\ \dfrac{0{,}2K_1}{K_2 - K_1}\left(\mathrm{e}^{-K_1 t} - \mathrm{e}^{-K_2 t}\right) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

⧫ Sujet 27

On dispose de n pots, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On plante une graine dans chaque pot. Les germinations des graines sont indépendantes les unes des autres.

Pour chaque graine, la probabilité de germer est égale à p, avec $p \in]0\,;1[$.

Pour chaque graine, la probabilité de ne pas germer est donc égale à q, avec $q = 1 - p$.

1. On note X le nombre de graines ayant germé. Donner la loi de X et préciser, pour tout $i \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}(X = i)$.

2. Dans les pots où la graine n'a pas germé, on plante une nouvelle graine.

On note Y le nombre de nouvelles graines ayant germé.

Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y sachant $(X = i)$ et préciser, pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}_{(X=i)}(Y = j)$.

3. On note Z le nombre total de graines ayant germé. Ainsi, $Z = X + Y$.

a. Préciser $Z(\Omega)$ et exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ à l'aide des variables aléatoires X et Y.

b. En déduire, pour tout $k \in Z(\Omega)$, une expression sous forme de somme de la probabilité $\mathbf{P}(Z = k)$.

4. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, k]\!]$,

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$$

5. a. Montrer que $1 - p(1 + q) = q^2$.

b. Soit $k \in Z(\Omega)$. Développer $(1 + q)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{-i}$.

c. Montrer que, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} p^k q^{2n-i-k}$.

d. Montrer que Z suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

6. Déterminer l'espérance de Z et en donner une interprétation.

Solution.

1. Si on numérote les pots de 1 à n et si on note, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k la variable aléatoire égale à 1 si la graine du pot k germe et 0 sinon alors, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Comme les germinations sont indépendantes, les variables X_k sont mutuellement indépendantes. Or, $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X=i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}}$.

2. Si $(X = i)$ alors on a replanté $n-i$ graines et, par le même raisonnement que précédemment, la loi de Y sachant $(X=i)$ est la loi binomiale de paramètres $n-i$ et p.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0,n]\!] \text{ et, pour tout } j \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}_{(X=i)}(Y=j) = \binom{n-i}{j} p^j q^{n-i-j}}$.

3. a. Le nombre de graines qui ont germé est compris entre 0 et n donc $\boxed{Z(\Omega) = [\![0,n]\!]}$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Comme $((X=i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}
(Z=k) = (Z=k) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} (X=i)\right) &= \bigcup_{i=0}^{n} (X=i) \cap (Z=k) \\
&= \bigcup_{i=0}^{n} (X=i) \cap (X+Y=k) \\
&= \bigcup_{i=0}^{n} (X=i) \cap (i+Y=k) \\
&= \bigcup_{i=0}^{n} (X=i) \cap (Y=k-i)
\end{aligned}$$

De plus, si $k < i$ alors $(Y = k-i) = \varnothing$ donc, finalement,

$$\boxed{(Z=k) = \bigcup_{i=0}^{k} (X=i) \cap (Y=k-i)}.$$

Comme cette union est disjointe (car les évènement $(X=i)$ sont deux à deux incompatibles), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}((X=i)\cap(Y=k-i)) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{(X=i)}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} q^{n-i-(k-i)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} p^k q^{2n-k-i}}.$$

4. Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $i \in [\![0,k]\!]$. Alors,

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-i-(k-i))!} \times \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}$$

donc

$$\boxed{\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}}.$$

5. a. Comme $p = 1-q$, $1-p(1+q) = 1-(1-q)(1+q) = 1-(1-q^2) = 1-1+q^2$ donc $\boxed{1-p(1+q) = q^2}$.

b. D'après la formule du binôme de Newton, $(1+q)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}1^i q^{k-i}$ donc

$$\boxed{(1+q)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{k-i}}.$$

On en déduit que $(1+q)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^k q^{-i}$ donc, par linéarité de la somme, $(1+q)^k = q^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{-i}$ et ainsi

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{-i} = \frac{(1+q)^k}{q^k}}.$$

c. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On déduit des questions **3.b.** et **4.**,

$$\boxed{\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^k q^{2n-k-i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}p^k q^{2n-k-i}}$$

d. Par linéarité de la somme, on en déduit que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z=k) = \binom{n}{k}p^k q^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{-i}$$

donc, d'après la question **5.b.**, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z=k) = \binom{n}{k}p^k q^{2n-k}\frac{(1+q)^k}{q^k} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k q^{2n-2k} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k\left(q^2\right)^{n-k}.$$

Dès lors, d'après la question **5.a.**,

$$\mathbf{P}(Z=k) = \binom{n}{k}p^k q^{2n-k}\frac{(1+q)^k}{q^k} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k q^{2n-2k} = \binom{n}{k}(p(1+q))^k(1-p(1+q))^{n-k}.$$

On conclut donc que $\boxed{Z \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p(1+q)}$.

6. Dès lors, $\boxed{\mathbf{E}(Z) = np(1+q)}$. Cette espérance représente le nombre moyen de graines qui germent.

⧫ Sujet 28

On s'intéresse au nombre de couples de lapins dans un élevage.

En janvier (mois 0), un couple de lapereaux est réuni.

En février, ce couple devient mature. Le mois suivant, il donne naissance à un couple de lapereaux.

La suite du développement suit les règles suivantes :

- un couple mature donne naissance à un couple de lapereaux tous les mois ;
- en revanche, un couple de lapereaux doit attendre un mois avant d'atteindre sa maturité et, adulte, se mettre à procréer tous les mois.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n le nombre de couples de lapins le n-ème mois.

1. Montrer que $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$ (mois de mars) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

2. **a.** À l'aide du logiciel de votre choix (Python, Excel ou la calculatrice), écrire une fonction permettant de calculer f_n, n étant passé en argument.

b. Donner les 8 premiers termes de la suite (f_n).

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. À l'aide du logiciel de votre choix, donner une conjecture sur le lien existant, pour tout entier $n \geqslant 2$, entre A^n, f_n, f_{n-1} et f_{n-2}.

Démontrer cette conjecture.

b. Sachant que, pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$.

Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre A, X_{n+1} et X_n.

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n avec la méthode de votre choix. On pourra introduire $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_n, A, n et X_0. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre de couples de lapins le n-ème mois en fonction de n.

7. Donner un équivalent de f_n. En déduire la limite du rapport $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

Solution.

1. En janvier, il y a un seul couple de lapereaux donc $\boxed{f_0 = 1}$. En février, ce couple devient mature mais ne s'est pas encore reproduit donc $\boxed{f_1 = 0}$. En mars, il se reproduit en donnant naissance à un couple de lapereaux donc il y a 2 couples en mars soit $\boxed{f_2 = 2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de couple de lapereaux au mois $n+1$ est $f_{n+1} - f_n$. Ceux-ci ne peuvent pas encore se reproduire au mois $n+2$. En revanche, les f_n couples du mois n sont matures au mois $n+2$ est peuvent donc se reproduire. Ainsi, au mois $n+2$, il y aura :

- les f_n couples présents au mois n ;
- les f_n couples de lapereaux engendrés par les lapins du mois n ;
- les $f_{n+1} - f_n$ couples de lapereaux nés au mois $n+1$.

Dès lors, $f_{n+2} = f_n + f_n + (f_{n+1} - f_n)$ i.e. $\boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n}$.

2. a. En Python, on écrit la fonction suivante :

```
def lapin(n):
  f = 1
  g = 1
  for i in range(n):
    f, g = g, f+g
  return f
```

b. En utilisant l'instruction

```
for n in range(8):
  print(lapin(n))
```

On obtient $\boxed{f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3,\ f_4 = 5,\ f_5 = 8,\ f_6 = 13 \text{ et } f_7 = 21}$.

3. a. En utilisant le script suivant :

```
import numpy as np

A=np.array([[1,1],[1,0]])
B=A
for k in range(1,6):
  B=B@A
  print(B)
```

On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_3 \\ f_3 & f_1 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$ et $A^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_6 & f_5 \\ f_5 & f_4 \end{pmatrix}$.

On peut donc conjecturer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$.

Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. On a vu que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} & f_n \\ f_{n-1} + f_{n-2} & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Or, d'après la question **1.**, $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ et $f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$ donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \quad A^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\det(A^{n+1}) = \det(AA^n) = \det(A)\det(A^n) = (1 \times 0 - 1 \times 1)\det(A^n) = -\det(A^n).$$

Ainsi, la suite $(\det(A^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -1 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = \det(A^0)(-1)^n$. Or, $\det(A^0) = \det(I_2) = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = (-1)^n$. En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $\det(A^{n+1}) = (-1)^{n+1}$ et, comme $n \geqslant 1$, $n+1 \geqslant 2$ donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^{n+1}) = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$ et on conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$.

5. La matrice A est une matrice symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc celui-ci possède 2 racines réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad [\lambda_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Déterminer des vecteurs propres associés. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$AX = \psi X \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x - x \\ \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}x \\ y = \dfrac{2(1+\sqrt{5})}{1^2 - \sqrt{5}^2}x \end{cases}$$

$$\iff y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x = -\varphi x$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\-\varphi\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ψ.

$$\begin{aligned}
AX=\varphi X &\iff \begin{cases} x+y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{cases} &&\iff \begin{cases} x+y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x-x \\ \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}x=y \end{cases} &&\iff \begin{cases} y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}x \\ y=\dfrac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-\sqrt{5}^2}x \end{cases} \\
&\iff y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}x=-\psi x
\end{aligned}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\-\psi\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre φ.

Ainsi, en posant $P=\begin{pmatrix}1&1\\-\varphi&-\psi\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}\psi&0\\0&\varphi\end{pmatrix}$, $A=PDP^{-1}$.

Dès lors, par propriété, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$. Or, D est diagonale donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $D^n=\begin{pmatrix}\psi^n&0\\0&\varphi^n\end{pmatrix}$. De plus,

$$\det(P)=-\psi+\varphi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

donc $P^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\psi&-1\\\varphi&1\end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n&=\begin{pmatrix}1&1\\-\varphi&-\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^n&0\\0&\varphi^n\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\psi&-1\\\varphi&1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&1\\-\varphi&-\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\psi^{n+1}&-\psi^n\\\varphi^{n+1}&\varphi^n\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}&\varphi^n-\psi^n\\\varphi\psi^{n+1}-\psi\varphi^{n+1}&\psi\varphi^n-\psi\varphi^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En remarquant que $\psi\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1^2-\sqrt{5}^2}{4}=-1$, on en déduit que

$$A^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}&\varphi^n-\psi^n\\(\varphi\psi)\psi^n-(\varphi\psi)\varphi^n&(\varphi\psi)\psi^{n-1}-(\varphi\psi)\varphi^{n-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}&\varphi^n-\psi^n\\\varphi^n-\psi^n&\varphi^{n-1}-\psi^{n-1}\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}&\varphi^n-\psi^n\\\varphi^n-\psi^n&\varphi^{n-1}-\psi^{n-1}\end{pmatrix}}$$

6. On a vu que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=AX_n$ donc (X_n) est une suite géométrique de matrices de raison A donc, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ X_n=A^nX_0}$.

Comme $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, on en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$X_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}&\varphi^n-\psi^n\\\varphi^n-\psi^n&\varphi^{n-1}-\psi^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}+\varphi^n-\psi^n\\\varphi^n-\psi^n+\varphi^{n-1}-\psi^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n + \varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1}(\varphi+1) - \psi^{n-1}(\psi+1)}{\sqrt{5}}.$$

Or, comme ψ et φ sont racines du polynôme $X^2 - X - 1 = 0$, on a $\psi^2 - \psi - 1 = 0$ et $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ donc $\psi^2 = \psi + 1$ et $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dès lors, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}}.$$

7. Comme $\varphi \approx 1{,}6$, $\varphi > 1$ et, comme $\psi \approx -0{,}6$, $\psi \in [-1\,;1]$, $\varphi^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{f_n}{\frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}} = 1 - \dfrac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On conclut que

$$\boxed{f_n \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}}.$$

Dès lors, $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \sim \dfrac{\frac{\varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}} \sim \varphi$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi}$.

♦ Sujet 29

Dans tout l'exercice, p désigne un réel appartenant à $]0\,;1[$.

Partie A. Étude d'une suite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - p + px^2$$

ainsi que la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}.$$

1. Étudier le sens de variations de la fonction f.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

3. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = \dfrac{1-p}{p}$.

Ranger ces deux solutions dans l'ordre croissant. *On discutera selon les valeurs de p.*

4. Montrer que si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors la suite (v_n) est croissante et converge vers un réel à déterminer.

5. Que se passe-t-il si $p > \dfrac{1}{2}$?

Partie B. Application

On considère des cellules pouvant

- soit se diviser en deux cellules filles, avec une probabilité égale à p ;
- soit mourir, avec une probabilité égale à $q = 1 - p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de cellules à la $n^{\text{ème}}$ génération.

On suppose que $X_0 = 1$ de façon certaine.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$.

a. Donner u_0 et u_1.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir, à partir du système complet d'événements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$, une relation entre u_n et u_{n+1}.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution.

Partie A. Étude d'une suite

1. La fonction f est une fonction polynomiale du second degré dont le coefficient dominant est $p > 0$ et qui atteint son minimum en $x_0 = \dfrac{0}{2p} = 0$. On en déduit donc que $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;0] \text{ et croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. $v_0 = 0 \in [0\,;1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(1)$. Or, $f(0) = 1-p \geqslant 0$ car $p \leqslant 1$ et $f(1) = 1$ donc $0 \leqslant f(v_n) \leqslant 1$ i.e. $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) = x \iff 1 - p + px^2 = x \iff px^2 - x + 1 - p = 0$$

Le discriminant de $px^2 - x + 1 - p = 0$ est $\Delta = (-1)^2 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2$. Ainsi, $px^2 - x + 1 - p$ possède deux solutions (non nécessairement distinctes) :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(1-2p)^2}}{2p} = \frac{1 - |1-2p|}{2p} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{(1-2p)^2}}{2p} = \frac{1 + |1-2p|}{2p}.$$

Si $1 - 2p \geqslant 0$, on obtient $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{1-p}{p}$ et su $1 - 2p \leqslant 0$, on obtient $x_1 = \dfrac{1-p}{p}$ et $x_2 = 1$.

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{f(x) = x \text{ si et seulement si } x = 1 \text{ ou } x = \dfrac{1-p}{p}}$.

Comme $x_2 - x_1 = \dfrac{|1-2p|}{p} \geqslant 0$, $x_2 \geqslant x_2$. Ainsi, si $1 - 2p \geqslant 0$ alors $\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1$ et si $1 - 2p \leqslant 0$ alors $\dfrac{1-p}{p} \leqslant 1$.

Autrement dit, $\boxed{\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1 \text{ si } p \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{1-p}{p} \leqslant 1 \text{ si } p \geqslant \dfrac{1}{2}}$.

4. Supposons que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1}$ ».

Initialisation. $v_0 = 0$ et $v_1 = 1 - p$ donc, comme $p \leqslant 1$, $v_1 \geqslant v_0$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(v_n) \leqslant f(v_{n+1})$ i.e. $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$. Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.

Dès lors, (v_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge vers une limite } \ell \leqslant 1}$.

Alors, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc, d'une part, $v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, d'autre part, par produit et somme, $1 - p + pv_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - p + p\ell^2$. Par unicité de la limite de (v_{n+1}), on en déduit que $\ell = 1 - p + \ell^2$ donc, d'après la question **3.**, $\ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{1-p}{p}$. Or, comme $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1-p}{p} \geqslant 1$ donc, comme $\ell \leqslant 1$, $\boxed{\ell = 1}$.

5. Si $p > \dfrac{1}{2}$, (v_n) demeure croissante (car le raisonnement de la question précédente n'utilise pas le fait que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour montrer que (v_n) est croissante) donc, comme précédemment, (v_n) converge vers 1 ou vers $\dfrac{1-p}{p}$.

Montrons par récurrence que (v_n) est bornée par $\dfrac{1-p}{p}$.

Initialisation. $v_0 = 0 \leqslant \dfrac{1-p}{p}$ car $p \in]0\,;1[$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$. Alors, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(v_n) \leqslant f\left(\dfrac{1-p}{p}\right)$ i.e. $v_{n+1} \leqslant \dfrac{1-p}{p}$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \dfrac{1-p}{p}$.

Dès lors, $\ell \leqslant \dfrac{1-p}{p} < 1$ donc $\boxed{\ell = \dfrac{1-p}{p}}$.

Partie B. Application

1. Comme l'évènement $(X_0 = 1)$ est un évènement certain, il y a initialement 1 seule cellule. Ainsi, $\boxed{X_1(\Omega) = \{0\,;2\},\ \mathbf{P}(X_1 = 0) = p \text{ et } \mathbf{P}(X_1 = 1) = p}$.

Dès lors, $\mathbf{E}(X_1) = 0 \times q + 2 \times p$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = 2p}$.

De plus, $\mathbf{E}(X_1^2) = 0^2 \times q + 2^2 \times p = 4p$ donc, par la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \mathbf{E}(X_1)^2 = 4p - (2p)^2 = 4p - 4p^2$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X) = 4p(1-p) = 4pq}$.

2. a. Comme $(X_0 = 1)$ est un évènement certain, $\boxed{u_0 = 0}$. De plus, on a vu précédemment que $\boxed{u_1 = q}$.

b. En utilisant la formule de probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 1)\}$, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2) \end{aligned}$$

Or, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 0) = 1$ et, s'il y a 2 cellules à la génération 1, la probabilité qu'il n'y en ait plus à la génération $n+1$ est la probabilité que la descendance de chacune de ces 2 cellules s'éteigne en au plus n générations. Or, pour chacun des deux cellules, la probabilité que leur descendance s'éteigne en au plus n générations est u_n donc, par indépendance, la probabilité qu'il n'y ait plus de cellules à la génération $n+1$ est u_n^2. Ainsi, $u_{n+1} = u_1 \times 1 + u_0 \times u_n^2 = q + pu_n^2$ soit $\boxed{u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2}$.

3. Par définition, $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. On déduit donc des résultats de la **Partie A** que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-p}{p} & \text{si } p \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}}.$$

⧫ Sujet 30

Xavier et Yann participe à un jeu dont le principe est le suivant :

- les deux joueurs lancent chacun et de façon simultanée un dé (cubique, équilibré et dont les faces sont numérotées de 1 à 6) ;
- ils répètent l'opération jusqu'à ce que l'un d'eux obtienne un 6 ; si ce joueur est seul à obtenir un 6 à ce tour, il est alors déclaré gagnant ;
- le perdant continue alors à lancer son dé jusqu'à obtenir lui aussi un 6. Il devra verser au gagnant un montant en euros égal au nombre de lancers supplémentaires qu'il aura dû réaliser avant d'obtenir lui aussi un 6 ;
- dans le cas où les deux joueurs obtiennent un 6 lors du même tour, il n'y a ni gagnant ni perdant et le jeu s'arrête.

Par exemple, si Xavier obtient son premier 6 au 5^{e} lancer et Yann obtient son premier 6 au 8^{e} lancer alors Xavier est déclaré gagnant et Yann doit lui verser 3 €.

On définit les variables aléatoires suivantes :

- X désigne le nombre de lancers nécessaires à Xavier pour obtenir 6 ;
- Y désigne le nombre de lancers nécessaires à Yann pour obtenir 6 ;
- $Z = \min(X, Y)$;
- $T = \max(X, Y)$;
- G désigne le nombre d'euros attribués au gagnant.

1. Exprimer le gain G en fonction de Z et T.

2. Donner la loi de X et la loi de Y, leur espérance et leur variance.

3. **a.** Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(Z \geqslant n)$ en fonction des variables aléatoires X et Y.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(X \geqslant n)$, en déduire la probabilité $\mathbf{P}(Z \geqslant n)$.

c. Déterminer la loi de Z.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Comparer, d'une part, les évènements $(Z = n) \cap (T = n)$ et $(X = n) \cap (Y = n)$ et, d'autre part, les évènements $(Z = n) \cup (T = n)$ et $(X = n) \cup (Y = n)$.

b. Exprimer $\mathbf{P}\left[(Z = n) \cup (T = n)\right]$ de deux façons différentes.
En déduire $\mathbf{P}(T = n)$.

c. Calculer $\mathbf{E}(T)$.

5. Déterminer, en euros, le gain moyen du gagnant.

Solution.

1. La variables Z représente le nombre de lancers effectués par le gagnant et T le nombre de lancers effectués par le perdant donc $\boxed{G = T - Z}$.

2. Les variables X et Y correspondent au rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli, en prenant comme succès « Obtenir 6 ».

Dès lors, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent des lois géométriques de paramètre } \frac{1}{6}}$.

Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 6 \text{ et } \mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2} = 30}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(Z \geqslant n)$ est réalisé si et seulement si $(X \geqslant n)$ et $(Y \geqslant n)$ sont réalisés donc $\boxed{(Z \geqslant n) = (X \geqslant n) \cap (Y \geqslant n)}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geqslant n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \left((\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \underset{j=k-n}{=} \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j+n-1} \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$.

Comme Y suit la même loi que X, on a également $\mathbf{P}(Y \geqslant n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

Dès lors, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(Z \geqslant n) = \mathbf{P}((X \geqslant n) \cap (Y \geqslant n)) = \mathbf{P}(X \geqslant n)\mathbf{P}(Y \geqslant n) = \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]^2$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(Z \geqslant n) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $(Z = n) = (Z \geqslant n) \setminus (Z \geqslant n+1)$ et que $(Z \geqslant n+1) \subset (Z \geqslant n)$, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(Z \geqslant n) - \mathbf{P}(Z \geqslant n+1) &= \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} - \left(\frac{25}{36}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{25}{36}\right) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{11}{36}\right)$.

4. a. Par définition, l'une des deux variables Z ou T vaut X et l'autre vaut Y donc $\boxed{(Z = n) \cap (T = n) = (X = n) \cap (Y = n)}$ et $\boxed{(Z = n) \cup (T = n) = (X = n) \cup (Y = n)}$.

b. D'une part,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((Z = n) \cup \mathbf{P}(T = n)) &= \mathbf{P}(Z = n) + \mathbf{P}(T = n) - \mathbf{P}((Z = n) \cap (T = n)) \\
&= \mathbf{P}(Z = n) + \mathbf{P}(T = n) - \mathbf{P}((X = n) \cap (Y = n))
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((Z=n)\cup\mathbf{P}(T=n)) &= \mathbf{P}((X=n)\cup 2\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Z=n)\mathbf{P}(Y=n))\\ &= \mathbf{P}(X=n)+\mathbf{P}(Y=n)-\mathbf{P}((X=n)\cap(Y=n))\\ &= 2\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}((X=n)\cap(Y=n))\end{aligned}$$

car X et Y ont même loi. Ainsi, $\mathbf{P}(Z=n)+\mathbf{P}(T=n)=2\mathbf{P}(X=n)$ donc

$$\mathbf{P}(T=n)=2\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Z=n)=2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}-\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\frac{11}{36}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(T=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{11}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}}.$$

c. On peut remarque que $Z+T=X+Y$ donc $T=X+Y-Z$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{E}(T)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)-\mathbf{E}(Z)=2\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(Z)=2\times 6-\frac{36}{11}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(T)=\frac{96}{11}}$.

5. Comme $G=T-Z$, par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(G)=\mathbf{E}(T)-\mathbf{E}(Z)=\frac{96}{11}-\frac{36}{11}=\frac{60}{11}$$

donc $\boxed{\text{le gain moyen de gagnant est } \frac{60}{11}\approx 5{,}45 \text{ euros}}$.